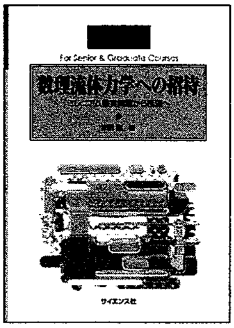
数理流体力学への招待

ミレニアム懸賞問題から乱流へ

米田剛著，B5 判，128 頁，本体 2100 円，サイエンス社



本書は，多くの流れ現象の支配方程式として知られている非圧縮 Navier–Stokes 方程式および非圧縮 Euler 方程式の数学解析の入門書として最適であり，特に，著者が取り組んでいる「数理流体力学」に焦点を当てているところが特徴である．「数理流体力学」は「実験流体力学」や「数値流体力学」とは違い，純粋数学的洞察を原動力として流体物理現象の解明に迫るものである．もちろん，これらは以前からともに影響しあって研究されているが,「数理流体力学」は比較的新しい語ではないだろうか．ミレニアム懸賞問題は，Clay 財団によって懸賞金がかけられた，3 次元 Navier–Stokes 方程式の滑らかな時間大域解の存在あるいは爆発解についての数学の未解決問題である．本書ではこのミレニアム懸賞問題が投げかけている疑問から出発して，なぜ爆発などの現象が起こる可能性があるのかについて，わかりやすい言葉で解説されている．2 次元と 3 次元の対比や，3 次元に特有な渦の引き延ばし（vortex stretching）現象などの重要な考え方に触れることにより，流れ現象に現れる豊潤で多様なダイナミクスが未解決問題と無関係ではないことを感じることができる．以下，各章のトピックを挙げていく．

第 1 章では，ポイントを押さえながら Fourier 級数の基礎事項が述べられる．第 2 章では，Fourier 級数展開された非圧縮 Navier–Stokes 方程式が導入され，3 次元での小さい初期値に対する時間大域解の一意存在と，2 次元での小さくない初期値に対する時間大域解の一意存在が示される．第 3 章において，Sobolev 空間の基礎事項および Littlewood–Paley 分解（一の分解）が述べられる．

第 4 章において，非圧縮 Euler 方程式の時間局所解の一意存在が示される．ここでは，Helmholtz–Leray 射影による Euler 方程式の別表現，その軟化子による近似方程式，関数の積の評価とエネルギー型不等式，commutator estimate などが用いられる．

第 5 章において，2 次元非圧縮 Euler 方程式の時間大域解の存在と非適切性が議論される．回転（rot）を作用させることによって非圧縮 Euler 方程式を渦度方程式に書き換えた後，渦度方程式の解が subcritical ($s > 1$) において時間大域的に存在し，critical ($s = 1$) において，非適切となる（ノルム・インフレーションが起こる）結果の紹介と解説をしている．この章では，流体力学でしばしば現れる，Lagrangian flow および Lagrangian deformation の定義とそれらの意味を説明している．特に，Lagrangian deformation は vortex stretching と関連するため重要である．

第 6 章および第 7 章は乱流，すなわち「非線形移流項が卓越している場合の流れ」，を主題としている．第 6 章では，その基礎概念であるスケール間のエネルギー移動（energy transfer）について，それが 3 次元で正当化されることと，2 次元では逆になりうることが具体例を通して解説されている．そして，最後の第 7 章において，Goto–Saito–Kawahara（2017）の 3 次元数値シミュレーションの結果の紹介と考察がなされる．大きな渦（反対称性をもつ渦対）が誘導する歪み速度場に沿った vortex stretching によって小さな渦が生成され，energy transfer が起きていることを視覚的に確認できる．

終わりになるが，本書は流体力学における幾何学量，特に，vortex stretching, Lagrangian flow, Lagrangian deformation に着目して，非圧縮 Navier–Stokes 方程式および非圧縮 Euler 方程式の時間大域解の適切性および非適切性での数学解析の結果を再考している．特に，2 次元非圧縮 Euler 方程式の非適切性（ノルム・インフレーション）と energy transfer（スケール間のエネルギー移動）を対応させて説明している点は興味深い．著者の熱意と努力により，本書において数学解析に重点を置きながら，数値シミュレーションやその物理的および幾何学的考察を併用して，流体物理現象の解明に迫る数理流体力学の魅力や可能性を感じられることに感謝したい．

野津 裕史（金沢大学数物科学系）