「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

池田 信行

1978年11月号

1970年代の半ばを過ぎる頃になると，興味の持ち方が似た友人たちから，「確率解析（Stochastic Analysis)」と言う聞き慣れない名前の集会の知らせが来るようになった．この特集：「確率微分方程式」もちょうどその頃企画された．その直前に，伊藤清先生が大枠から細部まで自ら準備された確率微分方程式に関する国際会議が京都で開催され，この分野の発展に大きな影響を及ぼした．例えばMalliavin解析の考えもここで最初に披露された．この特集は，その頃の雰囲気を広い範囲の人に伝えることを目指したものである．それから30年の年月が過ぎて状況は様変わりし，Mumfordが21世紀の数学を語る会合で，新たな考え方の典型的な例として，確率解析の代表的な成果である「無限分解可能な確率測度のFourier変換の標準形と加法過程のLévy・伊藤表現の対応」を挙げるまでになっている（[1]の108頁，[2]）．

近代的な確率解析は，Wienerが，液体の中に浮遊する微粒子の運動を，連続関数の空間 W 上の確率測度，(Wiener測度 P^W)，を用いて捉えたときに始まる．少し遅れてKolmogorovは媒質が一様でなく滑らかに変わる場合の微粒子の運動は本質的に組：$P=$ (Riemann計量，ベクトル場) で特徴づけられることを示した．この運動を P に対応する運動方程式（確率微分方程式）の解より決まる写像 $F: W \to$ (軌跡の空間) による P^W の像測度として捉えた伊藤[3]の成果により，確率解析の次の転機が訪れる．すなわち，Wiener空間を接空間とする経路空間上の解析と幾何の話が始まる．この後の発展は，確率積分をmartingaleの枠組みで論じた，Doobに始まり本尾，渡辺，国田，Meyer等と続く成果により支えられている．さらに，応用分野での一般化された写像 F の活用や，確率微分方程式の幾何学的な視点からの定式化（伊藤[4]，Eells–Elworthy）等により多様な発展がもたらされる．またCameron, Martin, Kac, 丸山，Lévy等の成果のFeynmanの経路積分と対比した新たな考察や，伊藤–西尾[5]による

（Wienerに始まる）Brown運動の軌跡のFourier展開等により確率解析の基盤が一層豊かになる．

その後，これらの研究はDonsker–Varadhanの大偏差理論等と相携えて発展を続け，数理ファイナンスの理論を初め数知れぬ課題への応用が広がっている．このことは，伊藤清先生の第一回Gauss賞の受賞に象徴されている．近年，状況はさらに変貌し，数学の数多くの分野の人たちが，確率解析の考えや成果を特別視することなく，あたかも微積分のように自由自在に駆使して研究を行うまでになっている．（文献：[1] Mumford 確率時代の夜明け，『数学の最先端(6)』，シュプリンガー・ジャパン，[2]～[5]はそれぞれ，K. Itô: Selected Papersの文献番号[1], [2], [23]. [29]）．

（いけだ・のぶゆき，大阪大学名誉教授）