「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

野 崎　昭 弘

1980年2月号

多値論理関数族の完全性は極めて特殊な分野であるが，それでも30年間にはいくつか大きな進展があった．ここでは詳細は述べられないが，前回の寄稿に関係する成果をいくつか紹介してみたい．

土台となる集合 X を $\{0,1,2,\cdots,k-1\}$ とすると，X 上で定義された関数のある集合 F が完全であるための必要十分条件は，F がいかなる極大（非完全）関数族にも含まれないことである．そこで極大関数族の分類が鍵となるが，前回述べたように遅れつきの多値論理関数族については，すべての極大関数族の特徴付けができていた．その後かなりの範囲で極大関数族が決定できたが，まだ一部分が残っている（疋田輝雄 2005）．

一方，遅れなしの（普通の）関数族については，極小関数族の分類・決定や，関数族のクラスの（位相的・代数的）構造を調べる研究が進んでいるが，この方面では町田元氏がよい仕事をしている．

前回挙げたペシェルの問題（私は同氏から教わった）は否定的に解かれ，その拡張版は肯定的に解けた．

問題：有限半順序集合 X 上の多変数単調関数の全体 M は，有限関数族から生成できるか？

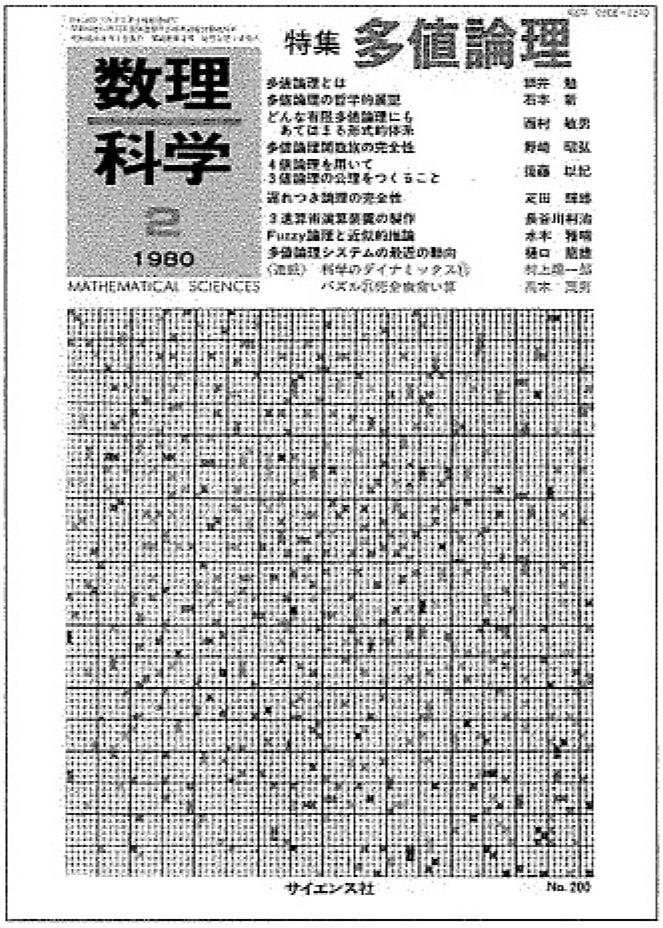
解答（タルドス 1986）：ある（有界）半順序についての単調関数族は，有限関数族からは生成できない．

拡張版：一部の関数値が "未定義"（don't care）でもよい，いわゆる部分関数族についてはどうなるか？

解答（野崎 2000）：どんな半順序についても，単調部分関数族はすべて有限生成である．

ところでこれまでの完全性の問題は，電子回路の言葉で言えば「記憶能力はない素子」で「フィードバックループを含まない回路」を組み立てることによって，すべての多値論理関数が実現されるかどうか，を問うていた．そこで次のような拡張が考えられる．

(1) 素子として，記憶能力を持つ「有限オートマトン」を考える．



(2) 回路として，フィードバックループを含む回路（いわゆる順序回路）を考える．

(1) については，否定的な結果が知られている．

解答（ダッソー 1981）：有限オートマトンの有限集合が完全であるかどうかを一般的に判定するアルゴリズムは存在しない．

(2) については，単位遅れつき論理関数族（$k=2$）の場合だけ解決された（野崎 1981）．$k \geqq 3$ の場合についての問題 (2) は手ごわくて，まだ何の進展も見られない．遅れつき多値論理関数の極大関数族の決定と併せて，さらに30年後が楽しみである．

（のざき・あきひろ，日本サイバー大学 IT 総合学部）