「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

宇敷　重広　　　　1982年2月号

19世紀末頃のポアンカレの論文には，微分方程式の解でありながら複雑な挙動を示すものが存在することが記されている．スメールを中心として発展した可微分力学系の研究で，馬蹄力学系と呼ばれるメカニズムがあって，複雑な挙動の源泉になっているらしい，とされたのは，1960年代であった．当時は，電気回路など，実際の物理現象を観察して，理論的考察を加えていた．1970年代でも，電子計算機を使うのはなかなか厄介で，アナログコンピュータを使いこなす研究者が優位に立っていた．

1970年代末頃から，カオスの理論が注目されるようになった．その頃，プログラム電卓やパソコンなど，貧弱な研究環境でも工夫次第で計算できる手段が出現した．2次関数の繰り返しでできる力学系が，すでに高度に複雑な挙動を呈するというカオス現象は，研究テーマとして，魅力的であった．計算機を活用することで，新しい研究分野が開けたのであった．この記事で取り上げた理論は，物理学においては画期的なものであった．相転移などの臨界現象や乱流には，様々な形で自己相似のメカニズムが関わっており，繰り込みと呼ばれる操作を通じて，解析される．

ファイゲンバウムは，解析的な力学系でこの現象を解析することによって，相空間における軌道や分岐パラメータの集積の自己相似のスケール比などを，驚くべき高精度で計算し，それが，ユニバーサルなもの，すなわち，こうした現象においては，数学現象であれ，物理現象であれ，同じ構造と定数（ファイゲンバウム定数）が支配している，と結論した．

その後，ファイゲンバウムの繰り込みの極限の力学系の正体を巡って様々な研究が行われた．ランフォードが，ファイゲンバウムの繰り込みの下で不変な関数が存在することを，コンピュータによる精度保証付きの計算で「証明」した．サリバンは，そのような「証明」で満足するべきでなく，概念的に理解可能な証明が必要だと主張した．繰り込みという操作は力学系の空間内のいわばメタ力学系をなすものであり，不変関数はその不動点であり，定数はそこでの固有値である，という．

繰り込みの考え方は，数学にも深く影響し，リュービッチは複素力学系としてのファイゲンバウム分岐の研究に活用し，ヨコツは，ジーゲル円盤の問題に利用した．カオス力学系や複素力学系の研究では，様々な形で展開する．マンデルブロー集合の「自己相似性」にもこうした考え方が利用できたし，放物型不動点の研究では，繰り込みの操作が，タイヒミューラー空間上の力学系として定式化可能であることが宍倉と稲生の研究で示され，現在でも研究の最前線である．

（うしき・しげひろ，京都大学大学院人間・環境学研究科）