『量子論と代数—思考と表現の進化論』の補足解説

谷 村　省 吾

このノートは数理科学 2018 年 3 月号 pp.42–48 に掲載された記事『量子論と代数』（以下では本稿と呼ぶ）に対する補足解説 (supplementary commentary) である．第 1 版を 2018 年 1 月 19 日に書き下し，語句の修正を施して第 6 節以降を加筆した第 2 版を 2018 年 3 月 28 日に完成した．

1. スペクトル値と最小多項式

単位元 I を持つ複素係数体上の結合的代数の元 X と複素数 λ について，$(X-\lambda I)$ の逆元が存在しないならば λ を X の**スペクトル値** (spectral value) という．

$B \neq 0$ かつ $AB=0$ ならば A の逆元はない．もしも A の逆元 A^{-1} があれば $B=IB=A^{-1}AB=0$ となり仮定に反するから．

いま代数の元 L と複素数 a,b について $a \neq b$ かつ $L \neq aI$ かつ $L \neq bI$ および

$$(L-aI)(L-bI)=0 \tag{S.1}$$

が成り立つとする．このとき a,b は L のスペクトル値であることは明らか．また，

$$P_a := \frac{L-bI}{a-b} \neq 0, \tag{S.2}$$

$$P_b := \frac{L-aI}{b-a} \neq 0 \tag{S.3}$$

とおくと，

$$I = P_a + P_b = \frac{L-bI}{a-b} + \frac{L-aI}{b-a}, \tag{S.4}$$

$$L = aP_a + bP_b = a\frac{L-bI}{a-b} + b\frac{L-aI}{b-a} \tag{S.5}$$

が成り立つことが確かめられる．また，

$$
\begin{aligned}
P_a^2 &= \frac{(L-bI)(L-bI)}{(a-b)^2} = \frac{\{(L-aI)+(a-b)I\}(L-bI)}{(a-b)^2} \\
&= \frac{0+(a-b)I(L-bI)}{(a-b)^2} = \frac{L-bI}{a-b} = P_a
\end{aligned} \tag{S.6}
$$

であり，同様に

$$P_b^2 = P_b \tag{S.7}$$

も成り立つ．明らかに

$$P_aP_b = P_bP_a = \frac{(L-aI)(L-bI)}{(b-a)(a-b)} = 0 \tag{S.8}$$

が成り立つ．

$$LP_a = P_aL = aP_a, \qquad LP_b = P_bL = bP_b \tag{S.9}$$

も確かめられる．さらに $\lambda \neq a, b$ として

$$L'_\lambda := \frac{1}{a-\lambda}P_a + \frac{1}{b-\lambda}P_b \tag{S.10}$$

とおくと

$$(L-\lambda I)L'_\lambda = \frac{a-\lambda}{a-\lambda}P_a + \frac{b-\lambda}{b-\lambda}P_b = P_a + P_b = I \tag{S.11}$$

となり，$L'_\lambda = (L-\lambda I)^{-1}$ が (S.10) のとおり具体的に存在している．ゆえに L のスペクトル値は a, b に限られる．

次いで，代数の元 M と複素数 a, b, c について a, b, c は互いに異なり，$(M-aI)$, $(M-bI)$, $(M-cI)$ のうちのどの二つの積も 0 ではなく，

$$(M-aI)(M-bI)(M-cI) = 0 \tag{S.12}$$

が成り立つとする．このとき a, b, c が M のスペクトル値であることは明らか．また，

$$Q_a := \frac{(M-bI)(M-cI)}{(a-b)(a-c)} \neq 0, \tag{S.13}$$

$$Q_b := \frac{(M-aI)(M-cI)}{(b-a)(b-c)} \neq 0, \tag{S.14}$$

$$Q_c := \frac{(M-aI)(M-bI)}{(c-a)(c-b)} \neq 0 \tag{S.15}$$

とおくと，やや長い計算によって

$$I = Q_a + Q_b + Q_c \tag{S.16}$$

が成り立つことが確かめられる．また，

$$
\begin{aligned}
Q_a^2 &= \frac{(M-bI)^2(M-cI)^2}{(a-b)^2(a-c)^2} \\
&= \frac{\{(M-aI)+(a-b)I\}(M-bI)(M-cI)\{(M-aI)+(a-c)I\}}{(a-b)^2(a-c)^2} \\
&= \frac{(a-b)I(M-bI)(M-cI)(a-c)I}{(a-b)^2(a-c)^2} \\
&= \frac{(M-bI)(M-cI)}{(a-b)(a-c)} = Q_a, \qquad \text{(S.17)} \\
Q_b^2 &= Q_b, \qquad \text{(S.18)} \\
Q_c^2 &= Q_c \qquad \text{(S.19)}
\end{aligned}
$$

も成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&Q_aQ_b = Q_bQ_a = 0, \quad Q_bQ_c = Q_cQ_b = 0, \\
&Q_cQ_a = Q_aQ_c = 0 \qquad \text{(S.20)}
\end{aligned}
$$

も容易に確かめられる．

$$
\begin{aligned}
&MQ_a = Q_aM = aQ_a, \qquad MQ_b = Q_bM = bQ_b, \\
&MQ_c = Q_cM = cQ_c \qquad \text{(S.21)}
\end{aligned}
$$

も確かめられる．これらより M のスペクトル分解

$$
M = MI = M(Q_a + Q_b + Q_c) = aQ_a + bQ_b + cQ_c \qquad \text{(S.22)}
$$

を得る．さらに $\lambda \neq a, b, c$ として

$$
M'_\lambda := \frac{1}{a-\lambda}Q_a + \frac{1}{b-\lambda}Q_b + \frac{1}{c-\lambda}Q_c \qquad \text{(S.23)}
$$

とおくと

$$
(M-\lambda I)M'_\lambda = I \qquad \text{(S.24)}
$$

となるので，$M'_\lambda = (M-\lambda I)^{-1}$ が (S.23) のとおり具体的に存在している．ゆえに M のスペクトル値は a, b, c 以外にはない．

長い話を書いたが，要するに

$$
\begin{aligned}
&(L-aI)(L-bI) = 0, \qquad \text{(S.25)} \\
&(M-aI)(M-bI)(M-cI) = 0 \qquad \text{(S.26)}
\end{aligned}
$$

のような式が成り立つなら L のスペクトル値は a, b であり，M のスペクトル値は a, b, c だと結論してよい．(S.25), (S.26) のように 0 になる非自明な多項式で次数が最低のものを**最小多項式** (minimal polynomial) という．

また，これは以下の議論では使わないことだが，次のような定理が成り立つ．変数 x の任意の多項式

$$
f(x) := \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n, \qquad \alpha_i \in \mathbb{C} \qquad \text{(S.27)}
$$

に対して

$$f(L) := \alpha_0 L^n + \alpha_1 L^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} L + \alpha_n I \tag{S.28}$$

と定める．多項式 $g(x)$ に対しても同様に $g(M)$ を定める．さらに

$$F(x) := f(a)P_a(x) + f(b)P_b(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}, \tag{S.29}$$

$$\begin{aligned} G(x) &:= g(a)Q_a(x) + g(b)Q_b(x) + g(c)Q_c(x) \\ &= g(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + g(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \\ &\quad + g(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \end{aligned} \tag{S.30}$$

とおくと

$$f(L) = F(L), \tag{S.31}$$

$$g(M) = G(M) \tag{S.32}$$

が成り立つことがわかる．とくに $f(x) = x$, $g(x) = x$ とおくと，(S.31), (S.32) は (S.5), (S.22) を再現する．(S.29) は，関数 $f(x)$ の値 $f(a), f(b)$ が与えられたときに，$F(a) = f(a)$, $F(b) = f(b)$ となる唯一の 1 次多項式 $F(x)$ を決める式になっている．同様に，(S.30) は，関数 $g(x)$ の値 $g(a), g(b), g(c)$ が与えられたときに，$G(a) = g(a)$, $G(b) = g(b)$, $G(c) = g(c)$ となる唯一の 2 次多項式 $G(x)$ を決める式になっている．$F(x)$ や $G(x)$ は**ラグランジュの補間多項式** (Lagrange's interpolating polynomial) とも呼ばれる．

2. 本稿の式 (2) の導出

物理量 X, Y, I が以下の関係を満たすとする：

$$X \neq \pm I, \tag{S.33}$$

$$Y \neq \pm I, \tag{S.34}$$

$$X \neq Y, \tag{S.35}$$

$$X^2 = I, \tag{S.36}$$

$$Y^2 = I, \tag{S.37}$$

$$YX = XY \tag{S.38}$$

ただし I は単位元．これらの元が生成する代数は可換代数である．このとき $X + Y$ のスペクトル値を求めたい．仮定より

$$\begin{aligned} (X+Y)^2 &= X^2 + XY + YX + Y^2 \\ &= I + 2XY + I \\ &= 2XY + 2I. \end{aligned} \tag{S.39}$$

両辺に $-4I$ を加えて

$$(X+Y)^2-4I=2XY+2I-4I=2XY-2I=2(XY-I). \tag{S.40}$$

両辺に $(X+Y)$ を掛けて

$$\begin{aligned}(X+Y)\{(X+Y)^2-4I\} &= 2(X+Y)(XY-I)\\ &= 2(X^2Y+XY^2-X-Y)\\ &= 2(Y+X-X-Y) \;=\; 0\end{aligned} \tag{S.41}$$

を得る．すなわち

$$\{(X+Y)-0\}\{(X+Y)-2I\}\{(X+Y)+2I\} \;=\; 0. \tag{S.42}$$

これは本稿の式 (2) である．この式から $X+Y$ のスペクトル値は $0, 2, -2$ であることがわかる．

ちなみに (S.35) の $X \neq Y$ という仮定を $X = Y$ で置き換えると，(S.39) は

$$(X+Y)^2 = 2XY+2I = 2X^2+2I = 2I+2I = 4I \tag{S.43}$$

となり，これは

$$(X+Y)^2-4I \;=\; \{(X+Y)-2I\}\{(X+Y)+2I\} \;=\; 0 \tag{S.44}$$

を意味する．当然のことながら，$X+Y=2X$ のスペクトル値は $2, -2$ だけである．何が言いたかったのかというと，(S.35) の $X \neq Y$ という仮定には意味があるということが言いたかったのである．

3. 本稿の式 (4) の導出

A, B, U, V は物理量として互いに等しくなく，関係式

$$A \neq \pm I, \qquad B \neq \pm I, \qquad U \neq \pm I, \qquad V \neq \pm I, \tag{S.45}$$

$$A^2 = I, \qquad B^2 = I, \qquad U^2 = I, \qquad V^2 = I, \tag{S.46}$$

$$UA = AU, \qquad VA = AV, \qquad UB = BU, \qquad VB = BV, \tag{S.47}$$

$$BA = AB, \qquad VU = UV \tag{S.48}$$

を満たすとする．ただし I は単位元．これらの元は可換代数を生成する．このとき

$$S \,:=\, AU + AV + BU - BV \tag{S.49}$$

のスペクトル値を求めたい．仮定より

$$
\begin{aligned}
S^2 &= (AU)^2 + (AV)^2 + (BU)^2 + (BV)^2 \\
&\quad +2AUAV + 2AUBU - 2AUBV + 2AVBU - 2AVBV - 2BUBV \\
&= I + I + I + I \\
&\quad +2UV + 2AB - 2ABUV + 2ABUV - 2AB - 2UV \\
&= 4I \qquad \text{(S.50)}
\end{aligned}
$$

ゆえに，$S^2 - 4I = 0$ すなわち

$$
(S - 2I)(S + 2I) = 0 \qquad \text{(S.51)}
$$

を得る．これは本稿の式 (4) であり，この式から S のスペクトル値は ± 2 であることがわかる．

4. 本稿の式 (6) の導出

前提となる本稿 (5) 式の条件をもう一度書いておく．A, B, U, V は物理量として互いに異なり，仮定 (S.45)-(S.47) を満たし，(S.48) の代わりに

$$
BA = -AB, \qquad VU = -UV \qquad \text{(S.52)}
$$

を満たすとする．このとき

$$
S := AU + AV + BU - BV = A(U + V) + B(U - V) \qquad \text{(S.53)}
$$

のスペクトル値を求めたい．まず，仮定 (S.46), (S.52) より

$$
\begin{aligned}
(U + V)^2 &= U^2 + UV + VU + V^2 \\
&= I + UV - UV + I \\
&= 2I \qquad \text{(S.54)}
\end{aligned}
$$

がわかる．ゆえに $U + V$ のスペクトル値は $\pm\sqrt{2}$ である．同様に

$$
\begin{aligned}
(U - V)^2 &= U^2 - UV - VU + V^2 \\
&= I - UV + UV + I \\
&= 2I \qquad \text{(S.55)}
\end{aligned}
$$

もわかる．また，

$$
\begin{aligned}
(UV)^2 &= UVUV \\
&= -UVVU \\
&= -UU \\
&= -I \qquad \text{(S.56)}
\end{aligned}
$$

を得る．この結果は，UV のスペクトル値は $\pm\sqrt{-1} = \pm i$（虚数！）であるこ

とを示している．同様に

$$(AB)^2 = -I \tag{S.57}$$

も得る．さらに (S.47) も用いると

$$\begin{aligned}(ABUV)^2 &= (AB)^2\,(UV)^2 \\ &= (-I)\times(-I) \\ &= I\end{aligned} \tag{S.58}$$

を得る．この式から $ABUV$ のスペクトル値は ± 1 であることがわかる．以上の結果を踏まえて (S.53) の S の 2 乗を計算すると，

$$\begin{aligned}S^2 &= A^2(U+V)^2 + AB(U+V)(U-V) \\ &\quad +BA(U-V)(U+V) + B^2(U-V)^2 \\ &= 2I + AB(U^2 - UV + VU - V^2) + BA(U^2 + UV - VU - V^2) + 2I \\ &= 2I + AB(I - UV - UV - I) - AB(I + UV + UV - I) + 2I \\ &= 4I - 4ABUV\end{aligned} \tag{S.59}$$

となる．これを

$$S^2 - 8I = -4I - 4ABUV \tag{S.60}$$

と書き換えてから両辺に S を掛け算すると

$$(S^2 - 8I)S = -4\,(I + ABUV)S \tag{S.61}$$

となるが，(S.47) と (S.52) に気をつけて $ABUVS$ を計算すると

$$\begin{aligned}ABUVS &= ABUV(AU + AV + BU - BV) \\ &= BV - BU - AV - AU \\ &= -S\end{aligned} \tag{S.62}$$

となるので，

$$(I + ABUV)S = S + ABUVS = S - S = 0 \tag{S.63}$$

となる．ゆえに (S.61) は

$$\big(S - \sqrt{8}I\big)\big(S + \sqrt{8}I\big)S = \big(S - 2\sqrt{2}I\big)\big(S + 2\sqrt{2}I\big)\big(S - 0\big) = 0 \tag{S.64}$$

となる．この式は本稿の式 (6) であり，S のスペクトル値が $2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0$ であることを意味している．

5. 量子力学をよく知っている人向けのコメント

量子力学（非可換代数）の物理量 A や B は，パウリ行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ と 2 次の単位行列 I_2 を使って，例えば

$$A = \sigma_z \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{S.65}$$

$$B = \sigma_x \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{S.66}$$

$$U = I_2 \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{S.67}$$

$$V = I_2 \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{S.68}$$

$$I = I_2 \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{S.69}$$

と表現される．パウリ行列は，光子の偏光状態に関する物理量や，電子のスピンに関する物理量を表す．これらが仮定 (S.45)-(S.47) と (S.52) を満たすことは確かめられる．これらを S の定義式 (S.53) に代入すると，S の行列表現

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{S.70}$$

を得る．これの固有値を計算すれば $\pm 2\sqrt{2}, 0$ という値を得る．これが通常の量子力学の計算方法である．ポイントは，非可換代数の物理量 A, B, U, V は普通の数ではなく行列であり，物理量の積は行列の掛け算で表されるところである．

6. ウィグナーの論説と進化論

ウィグナーの講演論文 "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences" は書籍[5] で見られると私は本稿に書いたが，本稿を掲載した『数理科学』誌が出版された後，中西 襄(のぼる) 氏から，1960 年の学術誌 Communications on Pure and Applied Mathematics[6] に原論文が掲載されており中西氏による翻訳が 1961 年に『科学』誌に掲載されていることを教えていただいた．なお，中西襄氏による訳文の題名は「自然科学における数学の有効性について」となっており，Unreasonable にあたる訳語が見当たらないが，これは出版社編集部の判断でそうなったそうである．

改めてウィグナーの原論文と中西襄氏による翻訳を読んで思うことを述べる．ウィグナーは，論説中の「数学とは何か（What is Mathematics?）」という節で「Darwin の自然淘汰の過程によって，われわれの推理力が，その持つと思われる極致にまで到達したとはとうてい信じ難い．(it is hard to believe that our reasoning power was brought, by Darwin's process of natural selection, to the perfection which it seems to possess.)」と述べている．つまり，生物学的な進化によって人類の数理的推論能力がもたらされたとは信じられないとウィグナーは論じている．

一方，私は，生物学者ドーキンス[7] や歴史学者ハラリ[8]，哲学者戸田山の論[9] に便乗して，脳の情報処理・記憶・指令・発話・解釈・想像という能力も進化の産物であり，そういう能力がこの世界での人類の生存と繁栄に有利に働いたと本稿で論じた．また，我々のアイデアや文化や嗜好様式はミームという抽象的な遺伝子・自己複製子だと考えられるというドーキンスの説を借りて，数学や物理学もミーム群だと私は論じ[10]，自然科学がうまくいっているのは，それがこの世界に適応しているからであると私は主張した．つまり，ミームの段階も含めた生物学的な進化によって人類の数理的能力がもたらされたと私は考えている．

ウィグナーも私もダーウィン流の自然淘汰説を知りながら，正反対の結論に達しているのは興味深い不一致である．この点に関してウィグナーが間違っていて私だけが正しいとは，私は思わない．人類の数理的能力が生物学的進化の産物であることが，科学的に，疑いの余地なく証明されたわけではない．ただ，現代では，人類は他の生物と共通の祖先・共通の体のしくみを持つ生物種だという認識は普及しているし，分子生物学や集団遺伝学の発展によりミクロとマクロの両スケールでの発生と進化の基礎の理解が進んできている．また，人類以外の動物もいろいろな意味での知性を持っていることが知られるようになった．さらに，ミームという新種の増殖単位も認められるようになった．私はこれらの学問的進展の影響を受けて，生物学的な進化によって人類は数理的能力を授けられたと考えることに抵抗がなくなっているし，それ以外に考えようがないという気になっているのである．

念のために言うが，**生物進化論の安易な拡大解釈は危険である．**数学や物理

学は自然淘汰の産物だという説は，仮説にすぎず，慎重な検証を要する．

7. 数学・物理学の成功は奇跡か？

もう少しウィグナーの論説[6]を検討したい．全体的にウィグナーの論説は，数学や物理学が自然現象を説明するという面でかくも成功しているのはまことに不思議だという論調で占められている．ウィグナーは，これらの成功を神秘と捉えているというよりは，なぜこの世界はこのように都合よくできているのかはわからないが好都合は謙虚に感謝すべきことだと捉えている．

論説[6]中の「物理学の理論における数学の役割（The Role of Mathematics in Physical Theories）」と題する節でウィグナーは「自然法則の定式化にあたって，物理学がある数学的概念を選ぶことは本当だし，数学的概念のうちわずかのものが物理学に用いられているにすぎないことも確かである．(It is true, of course, that physics chooses certain mathematical concepts for the formulation of the laws of nature, and surely only a fraction of all mathematical concepts is used in physics.)」と述べている．

私は本稿で「数学の一部分が自然界の規則性の記述にちょうどうまく当てはまり，それを使うとものごとが正確に予測できることがわかったので，みんながそれをまねして使うようになったのである」と述べた．数学全部が自然科学で使われるわけではないことを私も認め，さらに「みんながそれをまねした」というちょっと踏み込んだ一言を付け加えた．

また,「物理学の理論の成功はほんとうに驚くべきことなのか（Is the Success of Physical Theories Truly Surprising?）」という節でウィグナーは，ニュートンの重力の法則が百万分の一の精度で確かめられたこと，ヘリウム原子のエネルギー準位についての量子力学による計算値が実測値と千万分の一の精度で一致したこと，水素原子のエネルギー準位のわずかなシフトについての量子電磁気学による計算値がラムとクッシュが実測した値と千分の一の精度で一致したことなどの例を挙げたのち,「まだいくらでも例は挙げられるが，以上の三つの例は，自然法則を，とりあつかいやすいということで選ばれた概念で数学的に定式化することの，いかに適切であり正確であるかを説明していると思われる．‘自然法則’は厳格に限られた範囲内ではあるが，ほとんど考えられないような正確さをもっている．(The preceding three examples, which could be multiplied almost indefinitely, should illustrate the appropriateness and accuracy of the mathematical formulation of the laws of nature in terms of concepts chosen for their manipulability, the “laws of nature” being of almost fantastic accuracy but of strictly limited scope.)」と述べている.「物理学の理論の成功はほんとうに驚くべきことなのか」という節の見出しに対する答えはあからさまには書かれていないが，ウィグナーは物理理論の成功に素直に驚いているように見える．

たしかに，明瞭な数学的体裁の整った物理理論が自然現象を正確に予測する

という成功例は数多くあり，そういう正確な予測力が物理学の魅力であり有用性の源でもあることは間違いないと私も思う．しかし待てよと私は言いたい．数学的体裁は整っていたが現実の現象を予測・説明することに関して失敗した物理理論もあるし，逆に，体裁は不細工であったが，なかなかの成功をおさめた物理理論もある．

数学的ではあったが失敗に終わった物理理論の例として，**渦原子論** (vortex theory of atom) という理論を挙げておこう．これは，エーテルという流体が空間を満たしており，エーテルの渦が原子だと考える理論である[11,12]．1867年にウィリアム・トムソン[13]（1892年に爵位を得てケルヴィン卿となる）がそのような理論を提案して以来，19世紀末まで渦原子論はかなり熱心に研究された．トムソンが最初に書いた論文にはたいした数式は書かれていないが，その後の研究では微分方程式を用いて渦のモデルが論じられている[14]．当時は，渦糸が結び目や絡み目になったものに対応して原子の種類や結合を説明できると考えられていた．さらには原子が吸収・放出する光のスペクトルもこの理論で説明できると考えられた[15]．この頃はエーテル理論の全盛期であり，電磁気・重力・光・原子などすべての物理現象・物理的存在様式はエーテル一元論で説明できると期待されていた．渦原子論はエーテル論の枝葉の一つであった．しかし，エーテルの存在（観測可能性）が1887年のマイケルソン・モーリーの実験で否定され，渦原子論の研究は次第に下火になった．流体中の渦が安定な構造を保つことも説明し難（がた）く，1905年にはW. トムソンも渦原子の安定性の証明をあきらめている[14]．

エーテル理論や渦原子論はそれなりに数学的体裁を装（よそお）った理論であったが，物理の理論としてはまったくの失敗であったと言えるだろう．ただ，物理と数学は切り離して考えることができるので，物理としては失敗であっても，数学的には正しい部分が残ることもある．例えば，エーテルの渦糸の結び目が原子であるなら結び目の分類は原子の分類と対応するはずだという考えに従って，テイトは結び目の分類表を初めて作成して1885年に発表したそうである（テイトの表には少し誤りもあったそうである）[15,16]．テイトらの研究は**結び目理論** (knot theory) と呼ばれる数学分野の契機になった．テイトが提起した数学上の問題は，後にテイト予想と呼ばれ，その予想は1991年に解決した[17]．

渦原子論には興味深い派生理論もある．原子はエーテルの渦だと考えるだけでなく，原子はエーテルの湧き出し口または吸い込み口だと考える理論を1880年代にピアソンという数学者が提案した[11]．吸い込み口に流れ込んだエーテルはどうやって湧き出し口に現れるのかとピアソンは考えて，エーテルは3次元空間とは別の空間を通過して再び3次元空間に現れるのだろうという説まで考えた．また，数学者クリフォードは，物質とエーテルの運動は空間の曲率変化であるという説を1870年に示唆していた[11]．このように，19世紀後半には空間の幾何学と物質とを対応させるアイデアや超空間のアイデアは珍しくなかった．

その他にも科学史を紐（ひも）解いてみれば，物理理論の失敗例を見つけることは難しくない．むしろ成功例も失敗談も列挙する方が科学史として誠実であるし，

教訓的だし，面白いと思う.「相対論・量子論の出現以前の物理学が未熟で失敗もしたのは，当時の実験観測範囲が狭かったり数学的厳密性の要請が甘かったからしかたのないことで，そんな昔の失敗を引っ張り出すのは時代錯誤だ」と批判されるかもしれない．20 世紀以降の物理学にも失敗例は少なからずあるのだが，失敗であることをきちんと立証するには大変な労力を要するし，おおっぴらに失敗を指摘しても避けられるだけで，何の得にもならないから，おとなしい物理学者は静観しているのである．

以上では「数学的体裁を装っていたが，現実の現象を予測・説明することに関して失敗した（あるいは無用だった）物理理論」の例を挙げた.「体裁は不細工であったが，なかなかの成功をおさめた物理理論」の方は，詳しく説明しないが，少し例を挙げよう．本稿でも言及したが，ニュートンのオリジナルの力学は，微分方程式の体をなしておらず，作図で質点の軌道を決定するという体裁であり，汎用性に乏しかった[18]．ボーアやゾンマーフェルトの量子論（量子力学が完成した後には「前期量子論」と呼ばれる）は，後から見れば量子力学の近似理論であり，解析力学に量子条件という仮説を付け加えた，その場しのぎ的な修正理論であったが，ゾンマーフェルトはこの理論をベースにして相対論的補正まで入れたごてごてした計算を行い，水素原子のスペクトルをかなり正確に求めていた[19]．その計算結果は後のディラック方程式と同じ答えだった[20]．量子力学の定式化の一つであるハイゼンベルク・ボルン・ヨルダンの行列力学は，行列の様式を守って計算していたら大変不便であったろうし，行列力学しかなかったら状態ベクトルの確率解釈も出遅れていたであろう．シュレーディンガーの波動力学とディラック，フォンノイマンなどによる抽象化を経て量子力学は真に使いやすいものになったし，物理的意味も見通せるものになったし，場の量子論への発展も可能になったと思われる．

話が長くなったが，数学的な物理理論の素晴らしい成功にウィグナーはいたく感心し，これは奇跡ではなかろうかというところまで行っているが，**それは華々しい成功例だけに目を奪われすぎでしょう**ということを私は言いたかったのである．現実には，大失敗もあったし，ほどほどの中途半端な成功もあったし，当初の目的に関しては失敗したけど副産物を得たというケースもあるのである．

成功したものだけが多くの子孫を残すことこそ自然淘汰の特性であり，結果的に目につくものは成功例ばかりになってしまい，奇跡が起こったかのように見えてしまうのである．

8. 進化は必ずしも改善を意味しない

生物進化論の拡大解釈は危険だと言っておきながら，もう一つ，進化論になぞらえて言っておきたいことがある．

ドーキンス[7] は，**生物学的自然淘汰の対象は遺伝子であり，個体ではない**ことを強調した．各個体の生存にとって不利な特質でも，それが遺伝子のコピー

増殖に有利に働くならば，そのような特質が後の世代に引き継がれる．極端な例としては，働きバチは，自分では子供を産まないし，巣を守るために戦って命を落とすことも厭(いと)わないが，女王バチとその子の世話をすることにより，自分と類似性の高い遺伝子コピーを効率よく生産している．自分を働きバチにしてしまう遺伝子は，その個体の生存に有利に働いているとは思えないが，遺伝子の増殖には有利なのである．

また，自然淘汰には善悪の価値判断や，目的論的な計画性がないので，うっかりすると，進化の方向が生物個体の生存にとって不利なだけでなく，遺伝子の増殖にとってすら有利とは思えない方向に進むこともある．そのような例としては，クジャクのオスの羽がよく挙げられる．クジャクのオスの羽は大きくてきらびやかだが，大きすぎて動くのに不便だし，敵にも見つかりやすいし，大きくて美しい羽を形成して維持するにも栄養などのコストがかかる．解釈としては，そのような無駄に大きくて美しい羽を持っていられるオスは美しい羽という代償を払えるくらいに有利な別の特性を備えていると見てよく，メスはそのような優秀な生体を形作る遺伝子を持つオスと交配して，優秀な遺伝子を子に引き継ぎたいのだろうと考えられる．いったんオスが「大きくて美しい羽を作る」遺伝子を獲得し，メスが「大きくて美しい羽を持つオスとの交配を好む」遺伝子を獲得してしまうと，これら 2 種の遺伝子がともに手を取り合って淘汰を勝ち進んでしまい，クジャクがいまのような姿になった，と利己的遺伝子説は説明する．しかし本当に子孫繁栄を目的とするなら，こんな無駄の多いデザインをすることはなかったであろう．

この他にも，**自然淘汰・進化は必ずしも個体にとっての改善をもたらさない**という例はあるだろう．とくに，遺伝子の突然変異と自然淘汰のプロセスは非常に緩慢なので，環境が急変すると，以前は生存・増殖に有利だった特性が，環境変化後には不利な特性になってしまうことはあり得る．もちろん，その逆に，以前は生存・増殖にさして有利ではなかった特性が，環境変化後には俄然(がぜん)有利に働くこともあり得る．

遺伝子には，先を見通す能力がないし，将来の計画を立てて準備する能力もない．我々人間は，未来を構想して，現在した方がよいことを検討し選ぶ能力がある，と考えられている．ゆえに，人類の動向を生物進化になぞらえて考えることは当たっていないかもしれない．

しかし，学問分野のマクロな動向は，個々人の検討・選択によって動いていると言うよりは，抗(あらが)いがたい潮流のように見えることもある．だからこそ，物理理論の失敗や放棄も起きるのだろう．すべての研究が計画通りによい方向に進むものなら，そのような無駄なことは起きなかったはずである．

研究分野の将来がいかなるものか予測することは，個人の先見能力よりも高次の能力を要するのかもしれない．我々は自分たちの遠い将来を見通せるほどには賢明ではないことを知る謙虚さを持つべきだと思う．

9. 謝辞

紙幅の都合上，数理科学誌掲載記事には書けなかった謝辞をここに記します．本稿の草稿を，細谷曉夫氏，筒井泉氏，杉尾一氏，谷村倖氏，古田彩氏，青木摂之氏に読んでいただき，有益なコメントをいただきました．皆様に感謝します．とくに杉尾一氏には科学哲学者の立場から議論していただきました．古田彩氏と青木摂之氏からは分子生物学の観点から適切な用語使用についてご助言をいただきました．中西襄（のぼる）氏から，ウィグナーの原論文が学術誌 Communications on Pure and Applied Mathematics[6)] に掲載されていることと中西氏による翻訳が『科学』誌に掲載されていることを教えていただき，その上，翻訳記事の別刷までお送りいただきました．中西襄氏の親切に感謝します．もちろん本稿および補足解説の誤りは著者の責任に帰します．

参考文献

1) 谷村省吾「21 世紀の量子論入門」，理系への数学（現代数学社）2010 年 5 月号から 2012 年 4 月号まで連載．代数的量子論の解説．とくに「第 5 回：スピン代数の GNS 表現と純粋状態・混合状態」2010 年 9 月号 pp.62–67,「第 6 回：ゲルファント・ナイマルクの双対性」2010 年 10 月号 pp.63–68,「第 8 回：ベルの不等式とミステリー姉妹」2010 年 12 月号 pp.59–65 を参照してほしい．

2) 谷村省吾「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」，別冊日経サイエンス No.199『量子の逆説』pp.66–75 (2014). 補足記事がウェブにある：
`http://www.nikkei-science.com/?p=37107`

3) T. Isobe, S. Tanimura, “A method for systematic construction of Bell-like inequalities and a proposal of a new type of test”, Prog. Theor. Phys. **124**, 191–205 (2010). 量子力学に忠実な計算．

4) B. S. Cirel’son, “Quantum generalizations of Bell’s inequality”, Lett. Math. Phys. **4**, 93–100 (1980). C* 代数の方法で一般的な不等式を証明．

5) E. P. ウィグナー（岩崎洋一ほか訳）「自然科学において数学がおかしなほど有効であることについて」,『自然法則と不変性』ダイヤモンド社 (1974)，第 17 章に所収．原著は Eugene P. Wigner, Symmetries and Reflections, Indiana University Press (1967). `http://ch.nicovideo.jp/niconicoffee/blomaga/ar1125952` に日英対訳あり．

6) Eugene P. Wigner, “The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences”, Communications on Pure and Applied Mathematics XIII, 1–14 (1960). (中西襄 訳)「自然科学における数学の有効性について」科学（岩波書店）1961 年 9 月号，pp.450–457.

7) リチャード・ドーキンス（日高敏隆ほか訳）『利己的な遺伝子』紀伊國屋書店 (1991). 原著初版 1976 年.

8) ユヴァル・ノア・ハラリ（柴田裕之 訳）『サピエンス全史 上, 下』河出書房新社 (2016). 原著 2011 年.

9) 戸田山和久『科学哲学の冒険』NHK 出版 (2005). 戸田山和久『哲学入門』筑摩書房 (2014). 戸田山和久『恐怖の哲学』NHK 出版 (2016).

10) 谷村省吾「ミームとしての科学」，現代数学 2014 年 2 月号 p.3.

11) ヘリガ・カーオ（岡本拓司 監訳，有賀暢迪ら訳）『20 世紀物理学史 上巻』名古屋大学出版会 (2015)，第 1 章.

12) 武谷三男『量子力学の形成と論理 I—原子模型の形成』勁草書房 (1972)，2.2 節「原子のエーテル模型」

13) Lord Kelvin (Sir William Thomson), “On vortex atoms”, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. VI, 94–105 (1867). Reprinted in Phil. Mag. Vol. XXXIV, 15–24 (1867). URL: `https://zapatopi.net/kelvin/papers/` にケルヴィン卿（W. トムソン）の書きものを集めたライブラリがある．ただし論文を電子的に読み込んだ際に若干の読み誤りが生じているようなので注意が必要．例えば，“Kinetic theory of the dissipation of energy”, `https://zapatopi.net/kelvin/papers/kinetic_theory.html`

の文末に書かれている数値 4012×10^3 は，原論文では 4012×10^9 と書かれている（論文レプリント集『Maxwell's Demon 2』を参照）.
14) E. T. ホイッテーカー（霜田光一，近藤都登 訳）『エーテルと電気の歴史 下』講談社 (1976). とくに pp.333–344 を参照.
15) History of knot theory, https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_knot_theory（2018 年 3 月 22 日閲覧）
16) 今井 淳「結び目の数学」日本数学会 2008 年秋季総合分科会・市民講演会 原稿. http://mathsoc.jp/publication/tushin/1303/1303imai.pdf（2018 年 3 月 22 日閲覧）
17) Tait conjectures, https://en.wikipedia.org/wiki/Tait_conjectures（2018 年 3 月 22 日閲覧）
18) 山本義隆『古典力学の形成：ニュートンからラグランジュへ』日本評論社 (1997).
19) ゾンマーフェルト（増田秀行 訳）『原子構造とスペクトル線 I 上下』講談社 (1973).
20) 菊池 健『原子物理学（増補版）』共立出版 (1979), p.157.

（たにむら・しょうご，名古屋大学大学院情報学研究科）