

幾何学から物理学へ 物理を圏論・微分幾何の言葉で語ろう 第18A回

ダルブーの定理

谷村 省吾

このノートは、数理科学に連載された記事『幾何学から物理学へ』の補足解説である．とくに『第11回：ミンコフスキー計量とシンプレクティック形式』（数理科学 2017 年 11 月号）の (11.34) で定義だけを述べたダルブー枠について、ここではその構成方法を示す．また、『第18回：幾何学的なハミルトン力学』（数理科学 2018 年 10 月号）の (18.6) で結果だけを述べたダルブーの定理について、ここではその証明を述べる．

1. 反対称双線形形式の標準形

有限な m 次元の実ベクトル空間 V 上の双線形写像 $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ が任意の元 $v, w \in V$ に対して**反対称性** $A(w, v) = -A(v, w)$ を満たしているとする．もちろん $A(v, v) = -A(v, v) = 0$ である．一般に、 V の枠（基底） $\{v_1, \dots, v_m\}$ が与えられれば $a_{ij} := A(v_i, v_j)$ で A の成分が定まる ((5.29) や (6.8) を参照)． A によって決まる整数 r があり、 V の枠 $\{e_1, \dots, e_m\}$ で

$$A(e_{2i-1}, e_{2i}) = -A(e_{2i}, e_{2i-1}) = 1 \quad (i = 1, \dots, r), \quad (\text{A.1})$$

$$A(e_k, e_l) = 0 \quad (\text{それら以外の組み合わせ}) \quad (\text{A.2})$$

を満たすものが存在する．標準形 $s_{ij} := A(e_i, e_j)$ がどのようなものか具体的に記しておこう：

$$(s_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

4 個の成分 $(0, 1, -1, 0)$ からなる 2 行 2 列のブロックが対角線に沿って r 個並んでいる他は、すべての成分が 0 である。このとき $\text{rank } A = 2r$ である。とくに A が非退化であるための必要十分条件は $2r = m$ である。 $A = 0$ のときのみ $r = 0$ となる。条件 (A.1), (A.2) を満たす枠を反対称形式 A の**標準枠** (standard frame) あるいは**ダルブー枠** (Darboux's frame) という。

内積に関する正規直交基底を作るグラム・シュミットの方法とよく似た方法でダルブー枠は構成できる。その構成方法を以下に示そう。有限次元ベクトル空間の基底の存在は保証されているので、適当な基底 $\{v_1, \dots, v_m\}$ はある。この中に $A(v_i, v_j) \neq 0$ となる元の組 v_i, v_j がなければ、 $r = 0$ であり、 A の成分はすべて (A.2) を満たすということで終わり。

$A(v_i, v_j) \neq 0$ となる元の組 v_i, v_j があれば、番号を付け替えて v_1, v_2 とし、

$$e_1 := v_1, \quad (\text{A.4})$$

$$e_2 := \frac{1}{A(v_1, v_2)} v_2 \quad (\text{A.5})$$

とおくと、 $A(e_1, e_1) = A(e_2, e_2) = 0$, $A(e_1, e_2) = 1$ が成り立つ。 $m = 2$ ならこれで終わり。

$m \geq 3$ ならば、 $i, j \geq 3$ で $A(v_i, v_j) \neq 0$ となる v_i, v_j を探して、あれば番号を付け替えて v_3, v_4 とし、

$$e_3 := v_3 - A(e_1, v_3) e_2 + A(e_2, v_3) e_1, \quad (\text{A.6})$$

$$e_4 := \frac{1}{A(e_3, v_4)} \left(v_4 - A(e_1, v_4) e_2 + A(e_2, v_4) e_1 \right) \quad (\text{A.7})$$

とおくと、 $e_3 \neq 0$, $e_4 \neq 0$ であり、 $A(e_1, e_3) = A(e_2, e_3) = A(e_3, e_3) = 0$, $A(e_1, e_4) = A(e_2, e_4) = A(e_4, e_4) = 0$, $A(e_3, e_4) = 1$ が成り立つ。もしも $i, j \geq 3$ で $A(v_i, v_j) \neq 0$ となる v_i, v_j がなければ、(A.10) のステップに進む。

この調子で、 $k \geq 2$ について、必要なら番号の付け替えをして $A(v_{2k-1}, v_{2k}) \neq 0$ となる対 v_{2k-1}, v_{2k} が見つかる限り

$$e_{2k-1} := v_{2k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} A(e_{2i-1}, v_{2k-1}) e_{2i} + \sum_{i=1}^{k-1} A(e_{2i}, v_{2k-1}) e_{2i-1}, \quad (\text{A.8})$$

$$e_{2k} := \frac{1}{A(e_{2k-1}, v_{2k})} \left(v_{2k} - \sum_{i=1}^{k-1} A(e_{2i-1}, v_{2k}) e_{2i} + \sum_{i=1}^{k-1} A(e_{2i}, v_{2k}) e_{2i-1} \right) \quad (\text{A.9})$$

とおくという操作を繰り返す。この操作が $k = r$ で途切れたら（つまり、 $2k = m$ に達するか、 $v_{2r+1} \neq 0$ は存在しても $A(e_{2r+1}, v_j) \neq 0$ となる v_j ($j \geq 2r+2$) がなければ）、残りのベクトル v_j ($j \geq 2r+1$) について

$$e_j := v_j - \sum_{i=1}^r A(e_{2i-1}, v_j) e_{2i} + \sum_{i=1}^r A(e_{2i}, v_j) e_{2i-1} \quad (\text{A.10})$$

とおくと (A.1), (A.2) を満たす枠 $\{e_1, \dots, e_m\}$ ができる。

以上の構成結果を

$$a_{ij} = A(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \quad (\text{A.11})$$

$$s_{ij} = A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & (i \text{ が奇数で } i+1 = j \leq 2r) \\ -1 & (i \text{ が偶数で } i-1 = j \leq 2r) \\ 0 & (\text{どちらでもない場合}) \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i T_j^i \quad (\text{A.13})$$

と書く． (s_{ij}) を成分とする行列が A の標準形である．このとき

$$s_{ij} = \sum_{k,l=1}^m a_{kl} T_i^k T_j^l \quad (\text{A.14})$$

が成り立つ．任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V$ の展開係数を

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m x^i \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^m y^j \mathbf{e}_j \quad \mathbf{x}' = \sum_{i=1}^m x'^i \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^m y'^j \mathbf{e}_j \quad (\text{A.15})$$

で定めると

$$\sum_{j=1}^m T_j^i y^j = x^i, \quad (\text{A.16})$$

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x^i x'^j = \sum_{i,j=1}^m s_{ij} y^i y'^j \quad (\text{A.17})$$

が成り立つ．つまり，枠 $(\mathbf{e}_j)$ による座標 (y^j) において反対称形式 A は標準形になる．とくに A がシンプレクティック形式のときは， $(y^1, y^2, y^3, y^4, \dots, y^{2n-1}, y^{2n}) = (p_1, q^1, p_2, q^2, \dots, p_n, q^n)$ とおいたものが正準変数になる．

2. ダルブーの定理

多様体 M 上の 2 次微分形式 ω が非退化かつ閉 ($d\omega = 0$) であるならば， (M, ω) はシンプレクティック多様体であるという．**ダルブーの定理** (Darboux's theorem) は， $2n$ 次元のシンプレクティック多様体 (M, ω) について M の任意の点 x_0 の近傍 U で

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i \quad (\text{A.18})$$

が成り立つような座標チャート $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ が存在することを主張する．このような座標を**正準変数** (canonical variable) という．以下では Abraham と Marsden の “Foundations of Mechanics”¹⁾ に書かれている証明に植田⁴⁾ の記述を補って紹介する．

証明： $\mathbb{R}^{2n}$ の原点を $\mathbf{0}$ と書く．座標関数 $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ を $\phi(x_0) = \mathbf{0}$ となるように選ぶことはできる． $\phi(u) = (u^1, \dots, u^m)$ ($m = 2n$) と書く．以下では，

$U \subset M$ 上のテンソル場を $\phi(U) \subset \mathbb{R}^{2n}$ 上のテンソル場と同一視する．任意の点 $u \in U$ に対して

$$\omega_1(u) := \omega(\mathbf{0}) \quad (\text{A.19})$$

において定微分形式 (constant form) ω_1 を定める．つまり ω の座標表示が $\sum_{i,j} \omega_{ij}(u^1, \dots, u^m) du^i \wedge du^j$ なら $\omega_1(u^1, \dots, u^m) := \sum_{i,j} \omega_{ij}(\mathbf{0}) du^i \wedge du^j$ とおく．また,

$$\Delta\omega := \omega_1 - \omega, \quad (\text{A.20})$$

$$\omega_t := \omega + t \Delta\omega \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (\text{A.21})$$

とおく． $\Delta\omega(\mathbf{0}) = 0$ であり, $\omega_t(\mathbf{0}) = \omega(\mathbf{0})$ は非退化なので, U を十分小さくとれば, 任意の $t \in [0, 1]$ と任意の $u \in U$ に対して $\omega_t(u)$ は非退化．領域 U を一点可縮に選ぶ． ω_1 は成分が定数なので微分するとゼロだから

$$d(\Delta\omega) = d\omega_1 - d\omega = 0. \quad (\text{A.22})$$

ゆえに, ポアンカレの補題より U 上で

$$\Delta\omega = d\alpha \quad (\text{A.23})$$

と条件 $\alpha(\mathbf{0}) = 0$ を満たす 1 次微分形式 α が存在する． ω_t は非退化なので

$$i_{X_t} \omega_t = -\alpha \quad (\text{A.24})$$

を満たす U 上のベクトル場 X_t が一意的に存在する． $\alpha(\mathbf{0}) = 0$ なので $X_t(\mathbf{0}) = 0$ であることに注意．ベクトル場 X_t が定めるフローを

$$\xi : [0, 1] \times U \rightarrow M, \quad (t, u) \mapsto \xi_t(u) \quad (\text{A.25})$$

とする．つまり, ξ_t は次の微分方程式と初期条件

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_t(u) = X_t(\xi_t(u)), \quad (\text{A.26})$$

$$\forall u \in U, \quad \xi_0(u) = u \quad (\text{A.27})$$

を満たす写像とする．とくに, 任意の t で $X_t(\mathbf{0}) = 0$ なので $\xi_t(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である．ベクトル場 X_t が時刻 t に陽に依存しているので, 合成側 $\xi_s \circ \xi_t = \xi_{s+t}$ は成り立たない．また, 関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\xi_t^* f)(u) &= \frac{\partial}{\partial t} f(\xi_t(u)) \\ &= (X_t f)(\xi_t(u)) \\ &= (\xi_t^* X_t f)(u) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

が成り立つ．関数 f を任意の微分形式 β で置き換えると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\xi_t^* \beta)(u) &= (\mathcal{L}_{X_t} \beta)(\xi_t(u)) \\ &= (\xi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \beta)(u) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

が成り立つ. 定義式 $\omega_t := \omega + t \Delta\omega$ (A.21) と $d\omega = 0, d(\Delta\omega) = 0$ (A.22) より, $d\omega_t = 0$ であることに注意. 公式 (A.29) と, リー微分の本モトピー公式 $\mathcal{L}_X\omega = di_X\omega + i_Xd\omega$ (18.29), $\mathbf{X}_t$ の定義式 $i_{X_t}\omega_t = -\alpha$ (A.24), さらに α の定義式 $\Delta\omega = d\alpha$ (A.23) も用いて

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\xi_t^*\omega_t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ \xi_{t+h}^*\omega_{t+h} - \xi_t^*\omega_t \} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ (\xi_{t+h}^*\omega_{t+h} - \xi_{t+h}^*\omega_t) + (\xi_{t+h}^*\omega_t - \xi_t^*\omega_t) \} \\
&= \xi_t^* \frac{\partial}{\partial t} \omega_t + \xi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \omega_t \\
&= \xi_t^* \frac{\partial}{\partial t} (\omega + t \Delta\omega) + \xi_t^* (d i_{X_t} \omega_t + i_{X_t} d\omega_t) \\
&= \xi_t^* \Delta\omega + \xi_t^* (d(-\alpha) + 0) \\
&= \xi_t^* (\Delta\omega - d\alpha) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.30}$$

を得る. よって

$$\xi_1^*\omega_1 = \xi_0^*\omega_0 = (\text{id})^*\omega = \omega \tag{A.31}$$

を得る. $\xi_1 : U \rightarrow M$ の座標表示を $\xi(u) = x$ とし, $\omega_1 = \sum a_{ij} dx^i \wedge dx^j$ と書くと, $\xi_1^*\omega_1 = \omega$ は

$$\sum_{i,j,r,s=1}^{2n} a_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^r} \frac{\partial x^j}{\partial u^s} du^r \wedge du^s = \omega(u) \tag{A.32}$$

を意味する. つまり座標 $(x^1, \dots, x^{2n})$ を用いれば ω の成分は U 上いたるところ定数行列 a_{ij} になる. あとは前節の (A.17) を導いたのと同じ操作によって座標 $(y^1, \dots, y^{2n})$ に移ればシンプレクティック形式の成分は標準形になる.

参考文献

- 1) R. Abraham and J. E. Marsden, “Foundations of Mechanics”, AMS Chelsea Publishing, 2nd ed. 2008. p.175, Theorem 3.2.2. なんと, 本の全文がネットに公開されている: CaltechBOOK:1987.001, <https://authors.library.caltech.edu/25029/> (2018 年 5 月 7 日閲覧)
- 2) スタンバーク (高橋恒郎 訳) 『微分幾何学』吉岡書店, 1974. III 章の 5 節 Frobenius の定理, 6 節 Darboux の定理, 7 節 Hamilton 構造も参考になる.
- 3) 伊藤秀一 『常微分方程式と解析力学』共立出版, 1998. 4.5 節 ダルブーの定理の証明.
- 4) 植田一石 『数物系のためのシンプレクティック幾何学入門』サイエンス社, 2015. 3.2 節 Darboux の定理.

(たにむら・しょうご, 名古屋大学大学院情報学研究科)