

## 配位空間の対称性と運動量写像

谷村 省吾

このノートは、数理科学に連載された記事『幾何学から物理学へ』の『第19回：リー群・リー代数と力学系の対称性』(2018年11月号掲載)に対する補足解説である。とくに19.6節, (19.39)–(19.45)で式の羅列だけで済ませた部分を詳しく説明する。

### 1. 余接ベクトル束上のシンプレクティック構造

18.3節(18.8)の復習から始める。 $n$ 次元多様体 $Q$ の点 $q$ は質点系の配置などを表しているとし、 $Q$ を配位空間(configuration space)と呼ぶ。点 $q \in Q$ の座標を $(q^1, \dots, q^n)$ とする。接ベクトル束 $TQ$ と余接ベクトル束 $T^*Q$ の定義は12.4節を参照。余接ベクトル束 $M = T^*Q$ の元 $x \in T_q^*Q$ を $x = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$ と書くと、 $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ は $x$ の座標になる。さらに $T(T^*Q)$ の元は

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \left( v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + u_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \in T_x(T^*Q) \quad (\text{A.1})$$

と書ける。可換図式

$$\begin{array}{ccc} TM = T(T^*Q) & \xrightarrow{\pi_p} & M = T^*Q \\ \pi_q = \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi \\ TQ & \longrightarrow & Q \end{array} \quad (\text{A.2})$$

を見ながら考えてほしいが、射影 $\pi : T^*Q \rightarrow Q$ は $x \in T_q^*Q$ を $\pi(x) = q \in Q$ に移す。その微分 $\pi_* = \pi_q : T(T^*Q) \rightarrow TQ$ は $\mathbf{X} \in T_x(T^*Q)$ を

$$\pi_q(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \in T_qQ \quad (\text{A.3})$$

に移す。一方で接ベクトル束の射影 $\pi_p : T(T^*Q) \rightarrow T^*Q$ は $\mathbf{X} \in T_x(T^*Q)$ を

$$\pi_p(\mathbf{X}) = x = \sum_{i=1}^n p_i dq^i \in T_q^*Q \quad (\text{A.4})$$

に移す．これらのペアリング

$$\theta(\mathbf{X}) := \langle \pi_p(\mathbf{X}), \pi_q(\mathbf{X}) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n p_i dq^i, \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial}{\partial q^j} \right\rangle = \sum_{i=1}^n p_i v^i \quad (\text{A.5})$$

により写像  $\theta : T(T^*Q) \rightarrow \mathbb{R}$  が定まる．これは  $\mathbf{X} \in TM$  の成分  $v^i$  の線形関数になっているので， $\theta$  は  $M = T^*Q$  上の 1 形式である．これは本文の (19.44) 式

$$\theta : T(T^*Q) \xrightarrow{\pi_p \oplus \pi_q} T^*Q \oplus TQ \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \mathbb{R} \quad (\text{A.6})$$

を詳しく書いたものになっている．見方を替えると，

$$\theta = \sum_{i=1}^n p_i dq^i \quad (\text{A.7})$$

は，各  $p_i$  が  $(q^1, \dots, q^n)$  の関数であれば， $Q$  上の 1 形式なのだが， $(p_1, \dots, p_n)$  を独立変数とみなすことによって  $\theta$  は  $M = T^*Q$  上の 1 形式に格上げされている．この  $\theta$  を  $T^*Q$  上の正準 1 形式という．このとき

$$\omega := d\theta = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i \quad (\text{A.8})$$

が閉かつ非退化な 2 形式であることは明らかであり， $\omega$  は  $T^*Q$  上のシンプレクティック形式になっている． $(q^1, \dots, q^n)$  の座標領域は  $Q$  の全域を覆っていないかもしれないが，写像  $\pi_q, \pi_p$  は座標によらない概念であり，1 形式としての  $\theta$  および 2 形式としての  $\omega$  は  $T^*Q$  の全域で定義されている．

## 2. 記法

以下では，さまざまな集合の元が登場するので，整理しておく：実数変数  $s, t, u \in \mathbb{R}$ ．リー群の元  $a, g \in G$ ．リー代数の元  $\mathfrak{h}, \mathfrak{k} \in \mathfrak{g}$ ．配位空間の点  $q \in Q$ ．配位空間の接ベクトル  $\mathfrak{v}, \mathfrak{h}_Q \in T_q Q$ ．配位空間の余接ベクトル  $x \in T_q^* Q$ ．余接ベクトル束  $T^*Q = M$ ． $M$  の接ベクトル  $X, \mathfrak{h}_M \in T_x M$ ．

## 3. 配位空間上の群作用

リー群  $G$  が多様体  $Q$  に作用しているとは，(i) 微分可能写像

$$\mu : G \times Q \rightarrow Q, \quad (g, q) \mapsto \mu(g, q) = gq \quad (\text{A.9})$$

があり，(ii) 任意の  $g_1, g_2 \in G$  と任意の点  $q \in Q$  に対して  $g_2(g_1 q) = (g_2 g_1) q$ ，(iii) 単位元  $e \in G$  と任意の点  $q \in Q$  に対して  $e q = q$  が成り立っていることである．ただし，群作用を表す写像  $\mu$  をいちいち書かずに， $\mu(g, q) = gq$  と書いて済ませることが多い．また，群の元  $a \in G$  による作用  $q \mapsto aq$  のことを写像  $a = \mu(a, \bullet) : Q \rightarrow Q$  と書く．

一般に，群  $G$  が作用している多様体  $Q_1, Q_2$  と写像  $\varphi : Q_1 \rightarrow Q_2$  があって，

任意の  $a \in G$  と任意の  $q_1 \in Q_1$  に対して

$$\varphi(aq_1) = a\varphi(q_1) \quad (\text{A.10})$$

が成り立っていれば、すなわち、

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_2 \\ a \downarrow & & a \downarrow \\ Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} q_1 & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(q_1) \\ a \downarrow & & a \downarrow \\ aq_1 & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(aq_1) = a\varphi(q_1) \end{array} \quad (\text{A.11})$$

が可換図式になっていけば、 $\varphi: Q_1 \rightarrow Q_2$  は  $G$ -同変 (equivariant) であるという。 $G$ -同変写像は、じつは圏論で言うところの自然変換でもある。

リー群  $G$  が多様体  $Q$  に作用しているとき、 $\text{AD}_a: G \rightarrow G, g \mapsto \text{AD}_a(g) = aga^{-1}$  と  $a: Q \rightarrow Q, q \mapsto aq$  に関して可換図式

$$\begin{array}{ccc} G \times Q & \xrightarrow{\mu} & Q \\ (\text{AD}_a, \downarrow a) & & a \downarrow \\ G \times Q & \xrightarrow{\mu} & Q \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (g, q) & \xrightarrow{\mu} & gq \\ (\text{AD}_a, \downarrow a) & & a \downarrow \\ (aga^{-1}, aq) & \xrightarrow{\mu} & (aga^{-1}) \cdot (aq) = a(gq) \end{array} \quad (\text{A.12})$$

が成立する。従って、群作用を表す写像  $\mu: G \times Q \rightarrow Q$  は同变的である。

#### 4. 群作用から派生する写像

$G$  上の曲線、すなわち微分可能写像  $\mathbb{R} \rightarrow G, s \mapsto g(s)$  が、 $g(0) = e$  を満たすとする。このとき任意の点  $q \in Q$  に対して  $q(s) = g(s)q$  は  $q(0) = q$  を通る  $Q$  上の曲線を定める。曲線  $g(s), q(s)$  の  $s = 0$  における接ベクトルをそれぞれ

$$\mathbf{k} := \left. \frac{dg}{ds} \right|_{s=0} \in T_e G \cong \mathfrak{g}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{k}q = \mathbf{k}_Q(q) := \left. \frac{d}{ds} g(s)q \right|_{s=0} \in T_q Q \quad (\text{A.14})$$

とおくことにより写像

$$\mathfrak{g} \times Q \rightarrow TQ, \quad (\mathbf{k}, q) \mapsto \mathbf{k}q \quad (\text{A.15})$$

が定まるが、これは  $\mathbf{k} \in \mathfrak{g}$  に関して線形である。また、 $\mathbf{k}_Q: Q \rightarrow TQ$  は  $Q$  上のベクトル場になる。 $\mathbf{k}_Q$  をリー代数の元  $\mathbf{k} \in \mathfrak{g}$  が  $Q$  上に起こす無限小変換 (infinitesimal transformation) ともいう。

また、 $Q$  上の任意の曲線、すなわち微分可能写像  $\mathbb{R} \rightarrow Q, t \mapsto q(t)$  に対して

$$\mathbf{v} := \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} \in T_q Q, \quad (\text{A.16})$$

$$a_* \mathbf{v} := \left. \frac{d}{dt} aq(t) \right|_{t=0} \in T_{aq} Q \quad (\text{A.17})$$

とおくことにより接ベクトルの移動

$$G \times TQ \rightarrow TQ, \quad (a, v) \mapsto a_*v \quad (\text{A.18})$$

が定まる．いちいち区別しなくてもわかる場面では  $a_*v$  のことを  $av$  と書くこともある．

$\text{Ad}_a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, k \mapsto \text{Ad}_a(k) = aka^{-1}$  に関して，同変性を表す可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times Q & \longrightarrow & TQ \\ (\text{Ad}_a, \downarrow a) & & \downarrow a_* \\ \mathfrak{g} \times Q & \longrightarrow & TQ \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (k, q) & \longrightarrow & kq \\ (\text{Ad}_a, \downarrow a) & & \downarrow a_* \\ (aka^{-1}, aq) & \longrightarrow & (aka^{-1}) \cdot (aq) = a_*(kq) \end{array} \quad (\text{A.19})$$

および

$$\begin{array}{ccc} G \times TQ & \longrightarrow & TQ \\ (\text{AD}_a, \downarrow a_*) & & \downarrow a_* \\ G \times TQ & \longrightarrow & TQ \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (g, v) & \longrightarrow & g_*v \\ (\text{AD}_a, \downarrow a_*) & & \downarrow a_* \\ (aga^{-1}, a_*v) & \longrightarrow & (aga^{-1}) \cdot (a_*v) = a_*(g_*v) \end{array} \quad (\text{A.20})$$

が成立する．

$a \in G$  の  $TQ$  上の作用 (A.18)，すなわち

$$a_* : T_qQ \rightarrow T_{aq}Q, \quad v \mapsto a_*v \quad (\text{A.21})$$

の双対は

$$a^* : T_{aq}^*Q \rightarrow T_q^*Q, \quad x \mapsto a^*x := x \circ a_* \quad (\text{A.22})$$

である． $x \in T_{aq}^*Q$  と  $v \in T_qQ$  のペアリングは

$$\langle a^*x, v \rangle = \langle x, a_*v \rangle \quad (\text{A.23})$$

を満たす．射影  $T_qQ \rightarrow \{q\}, T_q^*Q \rightarrow \{q\}$  に関して

$$\begin{array}{ccccc} TQ & \longrightarrow & Q & \longleftarrow & T^*Q \\ a_* \downarrow & & \downarrow a & & \uparrow a^* \\ TQ & \longrightarrow & Q & \longleftarrow & T^*Q \end{array} \quad (\text{A.24})$$

が可換図式になっている．ただ，このままだと  $a, b \in G$  に対して  $(ab)^*x = b^*a^*x$  となつて， $G$  の作用が反変的になるので， $\tau_a(x) := (a^*)^{-1}x$  とおいて

$$G \times T^*Q \xrightarrow{\tau} T^*Q, \quad (a, x) \mapsto \tau_a x = (a^*)^{-1}x = (a^{-1})^*x = x \circ (a^{-1})_* \quad (\text{A.25})$$

を定める．こうすると  $\tau_a : T_q^*Q \rightarrow T_{aq}^*Q$  であり， $\tau_{ab}(x) = (\tau_a \tau_b)(x)$  が成り立つ．雑に  $\tau_a x = xa^{-1}$  と書くこともある．これについても同変性の可換図式

$$\begin{array}{ccc} G \times T^*Q & \xrightarrow{\tau} & T^*Q \\ (\text{AD}_a, \downarrow \tau_a) & & \downarrow \tau_a \\ G \times T^*Q & \xrightarrow{\tau} & T^*Q \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (g, x) & \longrightarrow & \tau_g x = xg^{-1} \\ (\text{AD}_a, \downarrow \tau_a) & & \downarrow \tau_a \\ (aga^{-1}, xa^{-1}) & \longrightarrow & (xa^{-1})(aga^{-1})^{-1} = xg^{-1}a^{-1} \end{array} \quad (\text{A.26})$$

が成立する .

(A.25) の群作用  $G \times T^*Q \rightarrow T^*Q$  から 2 通りの微分  $G \times T(T^*Q) \rightarrow T(T^*Q)$  と  $\mathfrak{g} \times T^*Q \rightarrow T(T^*Q)$  を誘導することができる . 写像  $\tau_a : T^*Q \rightarrow T^*Q$ ,  $x \mapsto \tau_a(x)$  の微分は各  $x$  ごとに写像  $(\tau_a)_* : T_x(T^*Q) \rightarrow T_{\tau_a x}(T^*Q)$  を定める . これらを点  $x \in T^*Q$  についてまとめて

$$(\tau_a)_* : T(T^*Q) \rightarrow T(T^*Q) \quad (\text{A.27})$$

と書く . 群作用のつねとして , 同変性の可換図式

$$\begin{array}{ccc} G \times T(T^*Q) & \xrightarrow{\tau_*} & T(T^*Q) \\ (\text{Ad}_a, \downarrow \tau_{a*}) & & \downarrow \tau_{a*} \\ G \times T(T^*Q) & \xrightarrow{\tau_*} & T(T^*Q) \end{array} \quad (\text{A.28})$$

が成立する .

一点  $x \in T^*Q$  と  $a(0) = e$  を通る  $G$  上の曲線  $a(s)$  が与えられると , (A.25) の群作用  $\tau : G \times T^*Q \rightarrow T^*Q$  により ,  $T^*Q$  の曲線  $x(s) = \tau_{a(s)}x$  とその接ベクトルが誘導される :

$$\mathbf{h} := \left. \frac{da}{ds} \right|_{s=0} \in T_e G \cong \mathfrak{g}, \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{h}x = \mathbf{h}_M(x) := \left. \frac{d}{ds} \tau_{a(s)}x \right|_{s=0} \in T_x M = T_x(T^*Q). \quad (\text{A.30})$$

こうして写像

$$\mathfrak{g} \times T^*Q \rightarrow T(T^*Q), \quad (\mathbf{h}, x) \mapsto \mathbf{h}x \quad (\text{A.31})$$

を定める . これは  $\mathbf{h} \in \mathfrak{g}$  に関して線形である . また ,  $\mathbf{h}_M : M \rightarrow TM$  は  $M$  上のベクトル場になる . ここでも同変性の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times T^*Q & \longrightarrow & T(T^*Q) \\ (\text{Ad}_a, \downarrow \tau_a) & & \downarrow (\tau_a)_* \\ \mathfrak{g} \times T^*Q & \longrightarrow & T(T^*Q) \end{array} \quad (\text{A.32})$$

が成立する .

## 5. 余接ベクトル束上の運動量写像

正準 1 形式  $\theta : T(T^*Q) \rightarrow \mathbb{R}$ , (A.6) に群作用を施すとどうなるか見てみよう . 写像  $\tau_a : T^*Q \rightarrow T^*Q$  の微分は  $(\tau_a)_* : T_x(T^*Q) \rightarrow T_{\tau_a x}(T^*Q)$  を定める .  $\mathbf{X} \in T_x(T^*Q)$  に対して  $\pi_p(\mathbf{X}) = x \in T^*_q Q$  かつ  $\pi_q(\mathbf{X}) = \mathbf{v} \in T_q Q$  とすると ,  $\tau_{a*}\mathbf{X} \in T_{\tau_a x}(T^*Q)$  の射影は  $\pi_p(\tau_{a*}\mathbf{X}) = \tau_a x = (a^{-1})^*x \in T^*_{aq} Q$  および  $\pi_q(\tau_{a*}\mathbf{X}) = a_*\mathbf{v} \in T_{aq} Q$  となる . これらのペアリングの値は

$$\begin{aligned}
\theta_{ax}(\tau_{a*}\mathbf{X}) &= \langle \pi_p(\tau_{a*}\mathbf{X}), \pi_q(\tau_{a*}\mathbf{X}) \rangle \\
&= \langle (a^{-1})^*x, a_*\mathbf{v} \rangle \\
&= \langle x, (a^{-1})_*a_*\mathbf{v} \rangle \\
&= \langle x, \mathbf{v} \rangle \\
&= \theta_x(\mathbf{X})
\end{aligned} \tag{A.33}$$

となる．同じことを図式で書くと，可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
T(T^*Q) & \xrightarrow{\pi_p \oplus \pi_q} & T^*Q \oplus TQ & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & \mathbb{R} \\
(\tau_a)_* \downarrow & & (a^{-1})^* \oplus a_* \downarrow & & \text{id} \downarrow \\
T(T^*Q) & \xrightarrow{\pi_p \oplus \pi_q} & T^*Q \oplus TQ & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & \mathbb{R}
\end{array} \tag{A.34}$$

となる．以上で， $\theta$  の不変性

$$\begin{array}{ccc}
T(T^*Q) & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{R} \\
(\tau_a)_* \downarrow & & \text{id} \downarrow \\
T(T^*Q) & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{R}
\end{array} \tag{A.35}$$

が示された．よって，配位空間の余接ベクトル束上の正準 1 形式  $\theta$  は，任意の  $a \in G$  に対して  $\tau_a^*\theta = \theta \circ (\tau_a)_* = \theta$  を満たす． $\tau_a^*\omega = \tau_a^*d\theta = d\tau_a^*\theta = d\theta = \omega$  なので， $\tau_a: M \rightarrow M$  はシンプレクティック変換になっている．

写像 (A.31) と (A.6) の合成写像

$$\begin{aligned}
J: \mathfrak{g} \times T^*Q &\rightarrow T(T^*Q) \rightarrow \mathbb{R} \\
(\mathbf{h}, x) &\mapsto \mathbf{h}_M(x) \mapsto J_h(x) := \theta(\mathbf{h}_M(x)) = \langle x, \mathbf{h}_Q(q) \rangle
\end{aligned} \tag{A.36}$$

で運動量写像  $J$  を定める．可換図式 (A.32) と (A.35) の合成により

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{g} \times T^*Q & \longrightarrow & T(T^*Q) & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{R} \\
(\text{Ad}_a, \downarrow \tau_a) & & (\tau_a)_* \downarrow & & \text{id} \downarrow \\
\mathfrak{g} \times T^*Q & \longrightarrow & T(T^*Q) & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{R}
\end{array} \tag{A.37}$$

を得る．これは

$$J_{aha^{-1}}(\tau_a x) = J_h(x) \tag{A.38}$$

を意味する． $aha^{-1}$  を改めて  $\mathbf{h}$  とし， $J_h(\tau_a x) = (\tau_a^* J_h)(x)$  と書くと，上式は

$$(\tau_a^* J_h)(x) = J_{a^{-1}ha}(x) \tag{A.39}$$

となる．これは，示しなかった運動量写像の同変性 (19.38) に他ならない． $\tau_a = (a^*)^{-1}$  であることに注意すると (A.37) は

$$\begin{array}{ccc}
T^*Q & \xrightarrow{J} & \mathfrak{g}^* \\
\uparrow a^* & & \uparrow \text{Ad}_a^* \\
T^*Q & \xrightarrow{J} & \mathfrak{g}^*
\end{array} \tag{A.40}$$

とも書ける．

以上より，配位空間上の群作用は，相空間のシンプレクティック変換になり，必ず運動量写像を伴うことがわかった．一般には，相空間上の群作用は，必ずしもシンプレクティック変換ではないし，シンプレクティック変換だったとしても運動量写像が存在するとは限らない（条件 (19.31) と (19.38) を満たさなければならない）．

なお，運動量写像は，つねに保存量とは限らない．その時間変化はハミルトン方程式

$$\frac{d}{dt} J_h(\gamma(t)) = \{J_h, H\}_P = -\mathbf{X}_{J_h} H = -\mathbf{h}_M H = -\mathcal{L}_{\mathbf{h}_M} H \tag{A.41}$$

を満たすので，ベクトル場  $\mathbf{h}_M$  が生成するフローの下でハミルトニアンが不変であることが， $J_h$  が保存量であるための必要十分条件である．

## 6. ネーターチャージ

$T^*Q$  の点は  $x = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$  と座標表示されていた．リー代数の元  $h \in \mathfrak{g}$  が  $Q$  上に起こすベクトル場  $h_Q$  を

$$\mathbf{h}_Q(q) = \sum_{i=1}^n h_Q^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} \tag{A.42}$$

と座標表示すると，(A.36) に定めた運動量写像は

$$J_h(x) := \langle x, \mathbf{h}_Q(q) \rangle = \sum_{i=1}^n p_i h_Q^i(q) \tag{A.43}$$

で表される， $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  の関数である．

ラグランジュ力学系からハミルトン力学系に移るときは，ルジャンドル変換

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i} \tag{A.44}$$

で運動量変数  $p$  と速度変数  $\dot{q}$  とを関係づける．パラメータ  $s$  を持つ変換  $q(s) = \exp(s\mathbf{h})q$  の無限小変換のベクトル場の成分を

$$h_Q^i = \delta q^i = \left. \frac{\partial q^i}{\partial s} \right|_{s=0} \tag{A.45}$$

と書けば，運動量写像 (A.43) は

$$J_h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \tag{A.46}$$

となり，ネーターの保存量（ネーターチャージ）になる．

### 7. 運動量写像の例：平行移動と運動量

$Q = \mathbb{R}^2$  の座標を  $q = (q^1, q^2)$  とする． $Q$  には加法群  $G = \mathbb{R}^2$  が平行移動として作用する：

$$G \times Q \rightarrow Q, \quad (a, q) = \left( \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \right) \mapsto aq = \begin{pmatrix} q^1 + a^1 \\ q^2 + a^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.47})$$

この変換の下で  $d(q^1 + a^1) = dq^1$ ,  $d(q^2 + a^2) = dq^2$  は不変なので,  $\theta = p_1 dq^1 + p_2 dq^2$  も不変．この変換の下で座標値  $p_1, p_2$  は不変なので,  $a \in G$  の作用を  $T^*Q$  に拡張すると

$$G \times T^*Q \rightarrow T^*Q, \quad (a, x) = \left( \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \tau_a x = \begin{pmatrix} q^1 + a^1 \\ q^2 + a^2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.48})$$

となる．とくに  $s$  を助変数とする, ベクトル  $h = (h^1, h^2)$  方向の平行移動の族

$$a(s) = s \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix}, \quad a(s) \cdot \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^1 + sh^1 \\ q^2 + sh^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.49})$$

は  $Q$  上にベクトル場

$$h_Q = \frac{\partial a(s)q^1}{\partial s} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial a(s)q^2}{\partial s} \frac{\partial}{\partial q^2} \Big|_{s=0} = h^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + h^2 \frac{\partial}{\partial q^2} \quad (\text{A.50})$$

を起こす．これに伴う運動量写像 (A.43) は

$$J_h = \langle p_1 dq^1 + p_2 dq^2, h_Q \rangle = p_1 h^1 + p_2 h^2 \quad (\text{A.51})$$

となる．とくに  $(h^1, h^2) = (1, 0)$  を選べば  $J_h = p_1$  であり,  $(h^1, h^2) = (0, 1)$  を選べば  $J_h = p_2$  である．つまり, 配位空間の平行移動変換 (A.47) に伴う運動量写像 (A.51) は, 通常の「運動量」である．

### 8. 運動量写像の例：回転と角運動量

$Q = \mathbb{R}^2$  には直交変換群  $G = SO(2)$  が回転として作用する：

$$G \times Q \rightarrow Q, \quad (g, q) = \left( \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \right) \mapsto gq. \quad (\text{A.52})$$

引き戻しにより  $T^*Q$  の成分は

$$g^*(p_1, p_2) = (p_1, p_2) \circ g = (p_1, p_2) \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \quad (\text{A.53})$$

に変換する．従って, (A.25) に定めた  $T^*Q$  の共变的変換は

$$\tau_g(p_1, p_2) = (p_1, p_2) \circ g^{-1} = (p_1, p_2) \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{A.54})$$

となるが、直交行列の逆行列は転置行列と一致するので、結局  $\tau_g$  の  $T^*Q$  上の作用は

$$\tau_g x = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & 0 & \sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.55})$$

と書ける．この変換の下で  $\theta = p_1 dx + p_2 dy$  は不変．直交群の作用 (A.52) は

$$g(u)q^1 = q^1 \cos u - q^2 \sin u, \quad (\text{A.56})$$

$$g(u)q^2 = q^1 \sin u + q^2 \cos u \quad (\text{A.57})$$

と書けて、助変数  $u$  に関する微分は

$$\frac{\partial g(u)q^1}{\partial u} = -q^1 \sin u - q^2 \cos u, \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{\partial g(u)q^2}{\partial u} = q^1 \cos u - q^2 \sin u \quad (\text{A.59})$$

となるので、 $g(u)$  は  $Q$  上にベクトル場

$$\mathbf{k}_Q = \frac{\partial g(u)q^1}{\partial u} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial g(u)q^2}{\partial u} \frac{\partial}{\partial q^2} \Big|_{s=0} = -q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + q^1 \frac{\partial}{\partial q^2} \quad (\text{A.60})$$

を起こす．これに伴う運動量写像 (A.43) は

$$J_k = \langle p_1 dq^1 + p_2 dq^2, \mathbf{k}_Q \rangle = -p_1 q^2 + p_2 q^1 = q^1 p_2 - q^2 p_1 \quad (\text{A.61})$$

となる． $J_k = xp_y - yp_x$  という書き方のほうがなじみがあるだろうが、運動量写像 (A.61) は、通常の「角運動量」である．

## 9. 配位空間の座標変換と余接ベクトル束の座標変換：極座標への変換

ついでながら、配位空間の座標変換と余接ベクトル束の座標変換がどう連動するか見ておこう．こういう計算をやってみると微分形式の扱いやすさを味わえると思われる．

$Q = \mathbb{R}^2$  の直交座標を  $q = (x, y)$  とする．極座標  $(r, \phi)$  を

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad (\text{A.62})$$

で導入する．その微分は

$$dx = dr \cos \phi - r d\phi \sin \phi, \quad dy = dr \sin \phi + r d\phi \cos \phi \quad (\text{A.63})$$

となる．あるいは行列を使ってまとめ書きすると

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.64})$$

となる．このとき余接ベクトルの元  $\theta = \sum_i p_i dq^i$  は不変でなくてはならないので (A.4) では  $T^*Q$  の元を  $x = \sum_i p_i dq^i$  と書いたが，ここでは  $(x, y)$  を  $Q$  の座標として使っているので，混同を避けるため  $T^*Q$  の元を  $\theta$  と書く)，

$$\theta = p_x dx + p_y dy = p_r dr + p_\phi d\phi = (p_x, p_y) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (p_r, p_\phi) \begin{pmatrix} dr \\ d\phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.65})$$

が成り立つように  $(p_x, p_y)$  の変換則が定まる：

$$(p_x, p_y) \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = (p_r, p_\phi). \quad (\text{A.66})$$

つまり，運動量座標の変換則は

$$p_r = p_x \cos \phi + p_y \sin \phi = \frac{p_x x + p_y y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (\text{A.67})$$

$$p_\phi = -p_x r \sin \phi + p_y r \cos \phi = -p_x y + p_y x \quad (\text{A.68})$$

となる．この  $p_\phi$  は角運動量 (A.61) と一致している．運動量変数の変換則は，(A.65) のような微分形式の不変性だけで決まることに注意してほしい．ラグランジアンは関係式 (A.44) を通して速度変数  $\dot{q}^i$  と運動量変数  $p_i$  を関係づけるが，ハミルトン形式の力学では，運動量は独立変数であり，とくにラグランジアンを介さなくてもその変換性は定まる．

## 10. 重心・相対座標への変換

もう一つ，余接ベクトル  $\theta$  の不変性から変数変換則が定まる例として， $n$  次元アフィン空間中の 2 つの質点の座標変換を見ておこう． $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$  と  $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^n) \in \mathbb{R}^n$  の内積を  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + \dots + a^n b^n$  と書く．2 つの質点の位置を  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbb{R}^n$  とすると，質点系の配位空間は  $Q = \mathbb{R}^{2n}$  である．各質点の運動量を  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^n$  とする．

$$\mathbf{R} := \frac{m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2}{m_1 + m_2}, \quad (\text{A.69})$$

$$\mathbf{r} := \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 \quad (\text{A.70})$$

により重心位置  $\mathbf{R}$  と相対位置  $\mathbf{r}$  を定める．このとき，これらの変数に共役な運動量変数  $\mathbf{p}_R, \mathbf{p}_r$  を求めよう．(A.65) と同様に，不変であるべき余接ベクトル

$$\begin{aligned} \theta &= \mathbf{p}_1 \cdot d\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot d\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_R \cdot d\mathbf{R} + \mathbf{p}_r \cdot d\mathbf{r} \\ &= (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \cdot \begin{pmatrix} d\mathbf{q}_1 \\ d\mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{p}_R, \mathbf{p}_r) \cdot \begin{pmatrix} d\mathbf{R} \\ d\mathbf{r} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

を書く．質量の和を  $M := m_1 + m_2$  とおいて，(A.69), (A.70) の微分

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{R} \\ d\mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.72})$$

を (A.71) に入れれば,

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = (\mathbf{p}_R, \mathbf{p}_r) \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.73})$$

を得る。つまり,

$$\mathbf{p}_1 = \frac{m_1}{M} \mathbf{p}_R - \mathbf{p}_r, \quad (\text{A.74})$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{m_2}{M} \mathbf{p}_R + \mathbf{p}_r \quad (\text{A.75})$$

であり, すなわち,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_R, \quad (\text{A.76})$$

$$-m_2 \mathbf{p}_1 + m_1 \mathbf{p}_2 = M \mathbf{p}_r \quad (\text{A.77})$$

でもある。これらが (A.69), (A.70) に伴う運動量変数の変換則である。これらの変数を用いると, 質点系の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2m_1} \mathbf{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2} \mathbf{p}_2^2 = \frac{1}{2M} \mathbf{p}_R^2 + \frac{M}{2m_1 m_2} \mathbf{p}_r^2 \quad (\text{A.78})$$

のように書き換えられる。ベクトル  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  方向の平行移動は  $\mathbf{q}_1 \mapsto \mathbf{q}_1 + s\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{q}_2 \mapsto \mathbf{q}_2 + s\mathbf{h}$  あるいは  $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} + s\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}$  のように作用する。この変換に対する運動量写像は (A.43), (A.71) より

$$J_{\mathbf{h}} = \langle \theta, \mathbf{h}_Q \rangle = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{p}_R \cdot \mathbf{h} \quad (\text{A.79})$$

となる。また, 細かい説明は省くが,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  の無限小回転は,  $n$  次反対称行列  $A \in \mathfrak{so}(n)$  ( $A^T = -A$ ) によって

$$\mathbf{k}_Q = A\mathbf{q} \quad (\text{A.80})$$

で与えられる。この変換に対する運動量写像は

$$J_{\mathbf{k}} = \langle \theta, \mathbf{k}_Q \rangle = \mathbf{p}_1 \cdot A\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot A\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_R \cdot A\mathbf{q}_R + \mathbf{p}_r \cdot A\mathbf{q}_r \quad (\text{A.81})$$

となる。とくに  $n = 3$  の場合, 3 次反対称行列  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.82})$$

のように表記することができて, 行列  $A$  の作用は 3 次元ベクトル積を用いて  $A\mathbf{q} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{q}$  と書ける。これを用いると (A.81) は

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{k}} &= \mathbf{p}_1 \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{q}_1) + \mathbf{p}_2 \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{q}_2) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{p}_2) \\ &= \mathbf{p}_R \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{q}_R) + \mathbf{p}_r \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{q}_r) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{q}_R \times \mathbf{p}_R + \mathbf{q}_r \times \mathbf{p}_r) \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

となる。これは 3 次元空間中の角運動量の  $\boldsymbol{\varepsilon}$  方向成分に他ならない。

#### 参考文献

- 1) J.-M. Souriau, “Structure des systèmes dynamiques”, Dunod, 1970. “moment” という用語で運動量写像 (moment map) に相当する概念を定義している . C. H. Cushman-de Vries による英訳, “Structures of Dynamical Systems”, Birkhäuser, 1997 の p.101, Chapter II, Section 11, 命題 (11.7b) がそれ . フランス語で書かれた書物の全編がネットに公開されている : <http://www.jmsouriau.com> (2018年8月29日閲覧)
- 2) B. Kostant, “Quantization and unitary representations”, Lectures in Modern Analysis and Applications III, pp. 87–208, Springer, 1970. 群の表現についての論文だが, 運動量写像にあたるものが書かれている . 私の記法で書くと p. 176 の  $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$  がそれ . 論文<sup>2,3)</sup> のことは Twitter を通して Paul Painlevé@JPN さんにご教示いただいた .
- 3) A. A. Kirillov, “Unitary representations of nilpotent Lie groups”, Russ. Math. Surv. **17**, 53–104 (1962). 群の表現についての論文 . 群作用の軌道と表現の関係が論じられている .
- 4) V. I. アーノルド (安藤韶一, 蟹江幸博, 丹羽敏雄 訳) 『古典力学の数学的方法』岩波書店, 1980. 付録 5 「対称性をもつ力学系」で運動量写像を扱っている . 短い記述ではあるが, p.378 の脚注が力学系の簡約の歴史について書かれている .
- 5) J. E. Marsden and T. S. Ratiu, “Introduction to Mechanics and Symmetry”, Springer, 2nd ed. 2003. 古典力学系の対称性を包括的に扱っている本 . 運動量写像を moment map と表記する流儀と momentum map と表記する流儀があるようだが, この著者は momentum map と書いている . 量子力学系についても若干の解説あり .
- 6) 大貫義郎 『解析力学』岩波書店, 1987. 簡潔にまとまっていて, 随所に著者独自の視点が伺える, 特徴ある本である . ネーターの定理を知らない読者には, この本で確認することをおすすめする .
- 7) S. Tanimura and T. Iwai, “Reduction of quantum systems on Riemannian manifolds with symmetry and application to molecular mechanics”, Journal of Mathematical Physics **41**, 1814–1842 (2000). e-print archive: math-ph/9907005. この論文中の (5.8) 式で  $N$  個の質点からなる系に対して重心運動と相対運動を分離するヤコビ・ベクトルを導入している .

(たにむら・しょうご, 名古屋大学大学院情報学研究所)