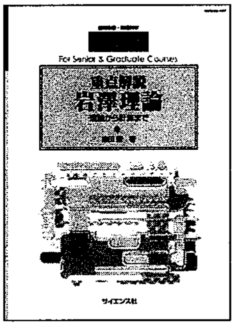

重点解説 岩澤理論

理論から計算まで

福田隆著，B5 判，216 頁，本体 2315 円，サイエンス社

岩澤理論は，岩澤健吉氏の 20 世紀半ば以降の研究によって創始された非常に独創的な理論である．もともとは円分体のイデアル類群を対象とする理論であったが，楕円曲線をはじめとする様々な数論的対象にも拡張され，20 世紀末には岩澤理論の手法が Wiles による Fermat 予想の解決で大きな役割を演じたことからも注目を浴びた．本書はそのような岩澤理論の入門書である．著者の福田氏は，長年にわたり岩澤理論において Greenberg 予想の研究を活発に続けてきた研究者であり，特にこれらの予想を数値的に検証するために代数的整数論における計算的なアプローチを追求してきた．したがって，本書も計算数論の観点からの説明に内容が多く割かれているという特徴がある．まず，本書の目次は以下の通りである．第 1 章：イデアル類群と単数群，第 2 章：無限次ガロア拡大，第 3 章：無限次拡大の分岐理論，第 4 章：Λ 加群の構造定理，第 5 章：岩澤の類数公式，第 6 章：アーベル体の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大，第 7 章：ディリクレ指標，第 8 章：L 関数，第 9 章：p 進 L 関数，第 10 章：岩澤主予想，第 11 章：グリーンバーグ予想，第 12 章：岩澤マイナス不変量の計算，第 13 章：アーベル体のイデアル類群，第 14 章：ウェーバーの問題，第 15 章：コーツ予想，第 16 章：数論ソフト PARI/GP の使い方，第 17 章：問題解答．

評者の私見ではあるが，本書は大まかに捉えると全体的には三部に分けられる．第一部（第 1 章から第 3 章まで）は予備知識のまとめである．岩澤理論を論じるためには，例えば無限次拡大のガロワ理論や代数的整数論の基本に慣れている必要がある．ページ数の都合もあり第一部は証明や具体例がほとんどない要項に近い．しかしながら，第 1 章，第 2 章，第 3 章の冒頭で挙げられている教科書に戻ることでおよそ必要な知識はカバーできるかもしれない．ただ，類体論に関しては，カバーされていない．類体論の使い方に慣れていない読者は，例えば，Washington の『Introduction to cyclotomic fields』の Appendix にコンパクトな類体論の説明がある．

第二部（第 4 章から第 10 章まで）は，岩澤理論の導入としてスタンダードな話題（例えば，岩澤代数や岩澤加群の構造，岩澤類数公式，久保田–Leopoldt 型の p 進 L 関数，岩澤主予想など）をスタンダードな方法で説明している．十分に証明がついていて所々に例も挙げられている．久保田–Leopoldt 型の p 進 L 関数には複数の異なる構成が知られているが本書では岩澤による Stickelberger 元を使った構成が説明されている．イデアル類群の岩澤理論の最初の頂とも言える岩澤主予想は，Mazur–Wiles によるモジュラー形式やガロワ表現など数論的代数幾何学の道具立てを用いた証明も Rubin による Euler 系の別証明も本書の枠を超えるので，いくつかの条件下で Stickelberger 元を用いた Coates と Lichtenbaum による部分証明のみを 10 章で説明している．

第三部（第 11 章から第 16 章まで）は，従来の岩澤理論の本には含まれていない著者自身の色が出ているユニークな内容である．11 章では，実 2 次体の場合に日本人のグループ（小松・福田，尾崎・田谷，市村・隅田）によって得られた Greenberg 予想の真偽を判定するのに役立つ定理たちが証明なしで紹介され，それらの定理を用いて実 2 次体の導手や素数 p を動かしたときの検証の発展具合を俯瞰することができる．別の章でも岩澤理論に関連の深い Weber の問題，Coates 予想という問題が紹介され，著者を含む日本人研究者による理論的な結果とそれらを用いた数値的な検証の試みが紹介されている．また，12 章，13 章でも岩澤 λ^--不変量を効率的に計算するための理論と計算機への実装が説明され，16 章では数論ソフト PARI/GP での岩澤理論的な計算のガイドが展開されている．

本書の特徴の一つは各章の終わりに演習問題がついていることである．オーソドックスな問題，本文で示さなかった等式の証明を示す問題もあるが，解答もついており学習者への配慮が感じられる．また，その他の特徴として，計算のアルゴリズムや高速性などに関するコメントがいたるところに散りばめられていることがあげられる．岩澤理論を学ぶ若い読者にも意義のある内容が数多く見つかるのではないかと思う．

落合 理（大阪大学大学院理学研究科）