特集／

『微分形式と電磁気学』の補足解説

電磁場のエネルギー・運動量を表す微分形式の計算

谷 村　省 吾

このノートは数理科学 2023 年 8 月号 pp.24–31 掲載記事（以下では，本誌・本記事と呼ぶ）『微分形式と電磁気学：アブラハム–ミンコフスキー論争』についての補足解説 (supplementary commentary) である．誌面には書ききれなかった計算や論証をここで詳述する．(1), (2) などは本誌記事中の数式番号を指している．

1. 計算の詳細

1.1 (43) の計算

本誌の巻頭言にも書いた式だが，微分形式の原型とも言える式 (43)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{S.1}$$

の導出らしきものを書いておこう．実数変数 (x, y, z) の実数値関数 $f(x, y, z)$ において，各変数を微小量 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ だけ変動させたときの関数値の変分は

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)\\
&= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)\\
&\quad + f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z)\\
&\quad + f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)\\
&= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta x}\Delta x\\
&\quad + \frac{f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z)}{\Delta y}\Delta y\\
&\quad + \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}\Delta z
\end{aligned} \tag{S.2}$$

であり，この式の $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ の極限のつもりで書いたものが (S.1) である．数学的には「無限に小さい dx とは何か？」という点が問題になり，これを数学的に明確な形に定めたものが微分形式である．

1.2 (6), (7), (8) を使って微分形式の表示を変える

電場の微分形式の成分表示 $E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$ を直交座標表示から極座標表示に移す式を書いておく．本記事の数式 (6), (7), (8) を (2) に入れて式変形すると

$$
\begin{aligned}
E &= E_x dx + E_y dy + E_z dz \\
&= E_x(\sin\theta\cos\phi\, dr + r\cos\theta\cos\phi\, d\theta - r\sin\theta\sin\phi\, d\phi) \\
&\quad + E_y(\sin\theta\sin\phi\, dr + r\cos\theta\sin\phi\, d\theta + r\sin\theta\cos\phi\, d\phi) \\
&\quad + E_z(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) \\
&= (E_x\sin\theta\cos\phi + E_y\sin\theta\sin\phi + E_z\cos\theta)dr \\
&\quad + (E_x r\cos\theta\cos\phi + E_y r\cos\theta\sin\phi - E_z r\sin\theta)d\theta \\
&\quad + (-E_x r\sin\theta\sin\phi + E_y r\sin\theta\cos\phi)d\phi
\end{aligned} \tag{S.3}
$$

となり，極座標での $E = E_r dr + E_\theta d\theta + E_\phi d\phi$ の係数 E_r, E_θ, E_ϕ が読み取れる．

1.3 (22) の前に現れた 3 コベクトルの値の計算

3 つのコベクトル $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の外積 $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3$ は, 3 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を与えると実数値

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = &+ \langle\alpha_1, \boldsymbol{v}_1\rangle\langle\alpha_2, \boldsymbol{v}_2\rangle\langle\alpha_3, \boldsymbol{v}_3\rangle \\
&- \langle\alpha_1, \boldsymbol{v}_2\rangle\langle\alpha_2, \boldsymbol{v}_1\rangle\langle\alpha_3, \boldsymbol{v}_3\rangle \\
&+ \langle\alpha_1, \boldsymbol{v}_2\rangle\langle\alpha_2, \boldsymbol{v}_3\rangle\langle\alpha_3, \boldsymbol{v}_1\rangle \\
&- \langle\alpha_1, \boldsymbol{v}_3\rangle\langle\alpha_2, \boldsymbol{v}_2\rangle\langle\alpha_3, \boldsymbol{v}_1\rangle \\
&+ \langle\alpha_1, \boldsymbol{v}_3\rangle\langle\alpha_2, \boldsymbol{v}_1\rangle\langle\alpha_3, \boldsymbol{v}_2\rangle \\
&- \langle\alpha_1, \boldsymbol{v}_1\rangle\langle\alpha_2, \boldsymbol{v}_3\rangle\langle\alpha_3, \boldsymbol{v}_2\rangle
\end{aligned} \tag{S.4}
$$

を返す関数である．このように変数 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を入れ替えるごとに符号を反転させて足すことを**交代和** (alternating sum) という．$\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3$ は 3 コベクトルであり，3 形式である．

$$
(dx\wedge dy\wedge dz)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) \tag{S.5}
$$

は 3 つのベクトルを 3 辺とする平行六面体の体積に等しいことは読者に証明してもらいたい.「これが平行六面体の体積の定義です」と言い張るのではなく，証明・説明してほしい.

1.4 (32) の計算

機械的にやればよいだけの計算だが，クーロン電場に対する電束密度を直交座標表示から極座標表示に変換する式 (32) に現れる

$$
x\, dy\wedge dz + y\, dz\wedge dx + z\, dx\wedge dy = r^3\,\sin\theta\, d\theta\wedge d\phi \tag{S.6}
$$

の計算を示しておこう．この式の左辺に本記事の (3)-(8) を適用して愚直に展開するだけである：

$$
\begin{aligned}
& x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy \\
={}& r\sin\theta\cos\phi(\sin\theta\sin\phi\,dr + r\cos\theta\sin\phi\,d\theta + r\sin\theta\cos\phi\,d\phi) \\
& \quad \wedge (\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) \\
& + r\sin\theta\sin\phi(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) \\
& \quad \wedge (\sin\theta\cos\phi\,dr + r\cos\theta\cos\phi\,d\theta - r\sin\theta\sin\phi\,d\phi) \\
& + r\cos\theta(\sin\theta\cos\phi\,dr + r\cos\theta\cos\phi\,d\theta - r\sin\theta\sin\phi\,d\phi) \\
& \quad \wedge (\sin\theta\sin\phi\,dr + r\cos\theta\sin\phi\,d\theta + r\sin\theta\cos\phi\,d\phi) \\
={}& r\sin\theta\cos\phi\Big\{dr \wedge d\theta(-\sin\theta\sin\phi\, r\sin\theta - r\cos\theta\sin\phi\,\cos\theta) \\
& \quad + dr \wedge d\phi(-r\sin\theta\cos\phi\,\cos\theta) \\
& \quad + d\theta \wedge d\phi(+r\sin\theta\cos\phi\, r\sin\theta)\Big\} \\
& + r\sin\theta\sin\phi\Big\{dr \wedge d\theta(\cos\theta\, r\cos\theta\cos\phi + r\sin\theta\,\sin\theta\cos\phi) \\
& \quad + dr \wedge d\phi(-\cos\theta\, r\sin\theta\sin\phi) \\
& \quad + d\theta \wedge d\phi(+r\sin\theta\, r\sin\theta\sin\phi)\Big\} \\
& + r\cos\theta\Big\{dr \wedge d\theta(\sin\theta\cos\phi\, r\cos\theta\sin\phi - r\cos\theta\cos\phi\,\sin\theta\sin\phi) \\
& \quad + dr \wedge d\phi(\sin\theta\cos\phi\, r\sin\theta\cos\phi + r\sin\theta\sin\phi\,\sin\theta\sin\phi) \\
& \quad + d\theta \wedge d\phi(r\cos\theta\cos\phi\, r\sin\theta\cos\phi + r\sin\theta\sin\phi\, r\cos\theta\sin\phi)\Big\} \\
={}& r\sin\theta\cos\phi\Big\{dr \wedge d\theta(-r\sin\phi) \\
& \quad + dr \wedge d\phi(-r\sin\theta\cos\phi\,\cos\theta) \\
& \quad + d\theta \wedge d\phi(+r\sin\theta\cos\phi\, r\sin\theta)\Big\} \\
& + r\sin\theta\sin\phi\Big\{dr \wedge d\theta(r\cos\phi) \\
& \quad + dr \wedge d\phi(-\cos\theta\, r\sin\theta\sin\phi) \\
& \quad + d\theta \wedge d\phi(+r\sin\theta\, r\sin\theta\sin\phi)\Big\} \\
& + r\cos\theta\Big\{0 \\
& \quad + dr \wedge d\phi\, r\sin^2\theta \\
& \quad + d\theta \wedge d\phi(r^2\cos\theta\,\sin\theta)\Big\} \\
={}& dr \wedge d\phi\Big(-r^2\sin^2\theta\,\cos\theta\,\cos^2\phi - r^2\sin^2\theta\,\cos\theta\,\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\,\cos\theta\Big) \\
& + d\theta \wedge d\phi\Big(r^3\sin^3\theta\,\cos^2\phi + r^3\sin^3\theta\sin^2\phi + r^3\sin\theta\,\cos^2\theta\Big) \\
={}& dr \wedge d\phi\Big(-r^2\sin^2\theta\,\cos\theta\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + r^2\sin^2\theta\,\cos\theta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ d\theta \wedge d\phi \Big(r^3 \sin\theta \{ \sin^2\theta\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta \} \Big) \\
&= d\theta \wedge d\phi\, r^3\, \sin\theta \\
&= r^3\, \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi.
\end{aligned}
\tag{S.7}
$$

1.5 (24) の計算

式番号が前後するが，(24) 式は (32) 式から容易に導ける．3 次元空間の体積を与える 3 形式の極座標表示

$$
dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\phi \tag{S.8}
$$

も愚直な計算で確かめることができるが，(S.6) の両辺を外微分すると

$$
3\, dx \wedge dy \wedge dz = 3r^2\, dr \wedge \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi \tag{S.9}
$$

となることからも導ける．

1.6 (62) の計算

本記事 (19) 式の磁束密度を表す 2 形式

$$
B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \tag{S.10}
$$

の 1 番目のスロットにベクトル（単位ベクトルである必要はない）

$$
\boldsymbol{e} = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{S.11}
$$

を入れると，

$$
\begin{aligned}
&B(\boldsymbol{e}, \cdot) \\
&= B_x(e_y\, dz - e_z\, dy) + B_y(e_z\, dx - e_x\, dz) + B_z(e_x\, dy - e_y\, dx) \\
&= (-B_y dz + B_z dy) e_x + (-B_z dx + B_x dz) e_y + (-B_x dy + B_y dx) e_z
\end{aligned}
\tag{S.12}
$$

となる．これと電流密度を表す捩 2 形式

$$
j = (j_x dy \wedge dz + j_y dz \wedge dx + j_z dx \wedge dy) \otimes \mathbf{o} \tag{S.13}
$$

との外積は

$$
\begin{aligned}
&B(\boldsymbol{e}, \cdot) \wedge j \\
&= \Big\{ (-B_y j_z + B_z j_y) e_x + (-B_z j_x + B_x j_z) e_y + (-B_x j_y + B_y j_x) e_z \Big\} \\
&\quad dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \\
&= \Big\{ e_x (j_y B_z - j_z B_y) + e_y (j_z B_x - j_x B_z) + e_z (j_x B_y - j_y B_x) \Big\} \\
&\quad dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o}
\end{aligned}
\tag{S.14}
$$

となり，本記事の (62) と一致する．

1.7 (71) の計算

本記事 (49)-(52) に示した微分形のマクスウェル方程式

$$dB = 0, \tag{S.15}$$

$$dE + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \tag{S.16}$$

$$dD = \rho, \tag{S.17}$$

$$dH - \frac{\partial D}{\partial t} = j \tag{S.18}$$

をローレンツ力を表す微分形式 (61) に入れ，外微分のライプニッツ則 (46)

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta) \tag{S.19}$$

とカルタンの公式 (70)

$$di_e\omega + i_e d\omega = \mathcal{L}_e \omega \tag{S.20}$$

を用いて (61) 式の右辺を式変形すると

$$\begin{aligned}
&\langle E, \boldsymbol{e} \rangle \rho + B(\boldsymbol{e}, \cdot) \wedge j \\
=& i_e E \wedge dD + i_e B \wedge \left(dH - \frac{\partial D}{\partial t} \right) \\
=& d(i_e E \wedge D) - (di_e E) \wedge D \\
&- d(i_e B \wedge H) + (di_e B) \wedge H - i_e B \wedge \frac{\partial D}{\partial t} \\
=& d(i_e E \wedge D) + (i_e dE) \wedge D - (\mathcal{L}_e E) \wedge D \\
&- d(i_e B \wedge H) - (i_e dB) \wedge H + (\mathcal{L}_e B) \wedge H - i_e B \wedge \frac{\partial D}{\partial t} \\
=& d(i_e E \wedge D) - \left(i_e \frac{\partial B}{\partial t} \right) \wedge D - (\mathcal{L}_e E) \wedge D \\
&- d(i_e B \wedge H) - 0 + (\mathcal{L}_e B) \wedge H - i_e B \wedge \frac{\partial D}{\partial t}
\end{aligned} \tag{S.21}$$

となり，(71) を得る．

1.8 (73) の計算

構成方程式 (65)

$$D = \varepsilon(E), \quad B = \mu(H) \tag{S.22}$$

を定める写像 ε, μ がベクトル場 e によるリー微分と可換であるという (72) 式

$$\mathcal{L}_e \varepsilon(E) = \varepsilon(\mathcal{L}_e E), \quad \mathcal{L}_e \mu(H) = \mu(\mathcal{L}_e H) \tag{S.23}$$

と対称性を表す (66), (67) 式

$$E \wedge \varepsilon(\dot{E}) = \dot{E} \wedge \varepsilon(E), \quad \mu(\dot{H}) \wedge H = \mu(H) \wedge \dot{H} \tag{S.24}$$

（ここで，E と $\dot{E}$ は任意の 1 形式，H と $\dot{H}$ は任意の捩 1 形式）を仮定すると，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_e(E \wedge D - B \wedge H) \\
&= \mathcal{L}_e(E) \wedge D + E \wedge \mathcal{L}_e(D) - \mathcal{L}_e(B) \wedge H - B \wedge \mathcal{L}_e(H) \\
&= \mathcal{L}_e(E) \wedge D + E \wedge \mathcal{L}_e(\varepsilon(E)) - \mathcal{L}_e(B) \wedge H - \mu(H) \wedge \mathcal{L}_e(H) \\
&= \mathcal{L}_e(E) \wedge D + E \wedge \varepsilon(\mathcal{L}_e(E)) - \mathcal{L}_e(B) \wedge H - \mu(\mathcal{L}_e(H)) \wedge H \\
&= \mathcal{L}_e(E) \wedge D + \mathcal{L}_e(E) \wedge \varepsilon(E) - \mathcal{L}_e(B) \wedge H - \mathcal{L}_e(\mu(H)) \wedge H \\
&= 2(\mathcal{L}_e E) \wedge D - 2(\mathcal{L}_e B) \wedge H
\end{aligned} \tag{S.25}$$

すなわち,

$$-(\mathcal{L}_e E) \wedge D + (\mathcal{L}_e B) \wedge H = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_e(E \wedge D - B \wedge H) \tag{S.26}$$

を得て，(71) は (73) に帰着する：

$$\begin{aligned}
&d(i_e E \wedge D) - d(i_e B \wedge H) - \left(i_e \frac{\partial B}{\partial t}\right) \wedge D - i_e B \wedge \frac{\partial D}{\partial t} \\
&- (\mathcal{L}_e E) \wedge D + (\mathcal{L}_e B) \wedge H \\
=& d(i_e E \wedge D - i_e B \wedge H) - \frac{\partial}{\partial t}(i_e B \wedge D) \\
&- \frac{1}{2}\mathcal{L}_e(E \wedge D - B \wedge H).
\end{aligned} \tag{S.27}$$

1.9 **(75) の計算**

B は 2 形式，H は捩 1 形式なので，$i_e B$ は 1 形式，$i_e H$ は捩 0 形式であり，

$$\begin{aligned}
&i_e B \wedge H - \frac{1}{2} i_e(B \wedge H) \\
=& i_e B \wedge H - \frac{1}{2}(i_e B \wedge H + B \wedge i_e H) \\
=& \frac{1}{2}(i_e B \wedge H - B \wedge i_e H) \\
=& \frac{1}{2}(-H \wedge i_e B - i_e H \wedge B) \\
=& -i_e H \wedge B + \frac{1}{2}(i_e H \wedge B - H \wedge i_e B) \\
=& -i_e H \wedge B + \frac{1}{2} i_e(H \wedge B)
\end{aligned} \tag{S.28}$$

が成り立つ.

2. 電磁気的諸量の幾何学的形式と物理次元

物理量の単位を書いておくと，電荷密度を表す捩 3 形式 ρ は $\mathrm{C\,m^{-3}}$, 電流密度を表す捩 2 形式 j は $\mathrm{C\,s^{-1}\,m^{-2}}$, 電場の 1 形式 E は $\mathrm{V\,m^{-1}} = \mathrm{N\,C^{-1}}$, 電束密度の捩 2 形式 D は $\mathrm{C\,m^{-2}}$, 磁場 (磁渦) の捩 1 形式 H は $\mathrm{A\,m^{-1}} = \mathrm{N\,Wb^{-1}}$, 磁束密度の 2 形式 B は $\mathrm{Wb\,m^{-2}}$ である．エネルギー密度に現れる捩 3 形式 $E \wedge D$ と $H \wedge B$ は $\mathrm{J\,m^{-3}}$, エネルギー流密度を表す捩 2 形式 $E \wedge H$ は $\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-2}}$, 運

動量密度を表す捩 3 形式 $i_e B \wedge D$ は $\mathrm{N\,s\,m^{-3}}$, 運動量の流れの密度（応力）を表す捩 2 形式 T_e は $\mathrm{N\,m^{-2}}$ である．

以上のように，単位長さあたりの物理量は m^{-1} を単位とし，1 形式で表される．単位面積あたりの物理量は m^{-2} を単位とし，2 形式で表される．単位体積あたりの物理量は m^{-3} を単位とし，3 形式で表される．このように，物理的次元と幾何学的意味（長さに対する関数や面積に対する関数）とが整合している．

3. エネルギー密度量の直交座標表示

本記事の (68) 式

$$\frac{dE_\mathrm{m}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\underline{V}} \frac{1}{2}(B \wedge H + E \wedge D) = -\int_{\partial \underline{V}} E \wedge H \tag{S.29}$$

の E_m は領域 $\underline{V}$ 内にある電磁場以外の物質が持っているエネルギーであり，$\int_{\underline{V}} \frac{1}{2}(B \wedge H + E \wedge D)$ は領域 $\underline{V}$ 内の電磁場が持っているエネルギー，$\int_{\partial \underline{V}} E \wedge H$ は領域 $\underline{V}$ の境界面の外に単位時間あたりに電磁場が運び出すエネルギーと解釈される．この式に現れた微分形式を 3 次元の直交座標で書いてみよう．

電場 E，電束密度 D，磁場 H，磁束密度 B はそれぞれ

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz, \tag{S.30}$$

$$D = (D_x dy \wedge dz + D_y dz \wedge dx + D_z dx \wedge dy) \otimes \mathbf{o}, \tag{S.31}$$

$$H = (H_x dx + H_y dy + H_z dz) \otimes \mathbf{o}, \tag{S.32}$$

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \tag{S.33}$$

と書かれる．ここで $\mathbf{o} = [\![dx \wedge dy \wedge dz]\!]$ は向き付けを表す形式である．これらを用いると (S.29) の各項は

$$E \wedge D = (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z) dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o}, \tag{S.34}$$

$$B \wedge H = (H_x B_x + H_y B_y + H_z B_z) dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o}, \tag{S.35}$$

$$\begin{aligned} E \wedge H = \big\{ &(E_x H_y - E_y H_x) dx \wedge dy + (E_y H_z - E_z H_y) dy \wedge dz \\ &+ (E_z H_x - E_x H_z) dz \wedge dx \big\} \otimes \mathbf{o} \end{aligned} \tag{S.36}$$

となる．例えば $(E_x H_y - E_y H_x) dx \wedge dy \otimes \mathbf{o}$（ただし $\mathbf{o} = [\![dx \wedge dy \wedge dz]\!]$）の項は，$xy$ 平面を $+z$ の方向に貫くエネルギーの流れを表している．3 次元ベクトルの内積・外積を使うと，これらの式はそれぞれ $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ と書かれる．ベクトル解析の表記方法ではスカラー場とベクトル場の区別しかないが，微分形式で書くと $E \wedge D$ と $B \wedge H$ は体積積分されるべき量であり，$E \wedge H$ は面積分されるべき量であることがわかる．

4. 運動量密度量の直交座標表示

本記事の (76) 式で見た

$$\frac{d}{dt}\langle p_{\mathrm{m}}, \boldsymbol{e}\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\underline{V}}(i_e B \wedge D)$$
$$= \int_{\partial \underline{V}} \left\{ i_e E \wedge D + i_e H \wedge B - \frac{1}{2} i_e (E \wedge D + H \wedge B) \right\} \tag{S.37}$$

の $\langle p_{\mathrm{m}}, \boldsymbol{e}\rangle$ は領域 $\underline{V}$ 内にある電磁場以外の物質が持っている運動量の e 成分であり，$\int_{\underline{V}}(i_e B \wedge D)$ は領域 $\underline{V}$ 内の電磁場が持っている運動量の e 成分，2 行目の式は領域 $\underline{V}$ の境界面の外から内に単位時間あたりに電磁場が運び込む運動量の e 成分と解釈される．

今井功[1)]は，$i_e E \wedge D$ は電場の向きに沿って電気力線が縮もうとする張力を表しており，$i_e H \wedge B$ は磁場の向きに沿って磁力線が縮もうとする張力を表しており，$-\frac{1}{2} i_e (E \wedge D + H \wedge B)$ は等方的に膨らもうとする圧力を表すという解釈を述べている．

この式に現れている微分形式を 3 次元の直交座標で書いてみよう．ベクトル場 $\boldsymbol{e}$ の直交座標表示

$$\boldsymbol{e} = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{S.38}$$

を用いる．運動量密度 $i_e B \wedge D$ は，(S.14) の $i_e B \wedge j$ とまったく同様に計算できて，

$$i_e B \wedge D$$
$$= \left\{ e_x (D_y B_z - D_z B_y) + e_y (D_z B_x - D_x B_z) + e_z (D_x B_y - D_y B_x) \right\}$$
$$dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \tag{S.39}$$

となる．これは 3 次元ベクトルの外積 $\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}$ に相当する．応力の第 1 項 $i_e E \wedge D$ は

$$i_e E \wedge D$$
$$= (E_x e_x + E_y e_y + E_z e_z)(D_x dy \wedge dz + D_y dz \wedge dx + D_z dx \wedge dy) \otimes \mathbf{o}, \tag{S.40}$$

第 2 項 $i_e H \wedge B$ は

$$i_e H \wedge B$$
$$= (H_x e_x + H_y e_y + H_z e_z)(B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy) \otimes \mathbf{o}, \tag{S.41}$$

第 3, 4 項は合わせて

$$-\frac{1}{2} i_e (E \wedge D + H \wedge B)$$
$$= -\frac{1}{2}(E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z + H_x B_x + H_y B_y + H_z B_z)$$
$$(e_x\, dy \wedge dz + e_y\, dz \wedge dx + e_z\, dx \wedge dy) \otimes \mathbf{o} \tag{S.42}$$

となる．$dy \wedge dz$ に対しては x 方向の力のみが働き，$dz \wedge dx$ に対しては y 方向の力のみが働き，$dx \wedge dy$ に対しては z 方向の力のみが働いていて，しかも，どの方向に関しても一定の係数 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}$ が掛かっている．これは，あらゆる面に垂直に作用する等方的な圧力を表している．

5. 誘電率テンソルと透磁率テンソルの対称性

任意の 1 形式 $E, \dot{E}$ と，任意の捩 1 形式 $H, \dot{H}$ について成り立つべき対称性の要請 (66), (67) 式

$$E \wedge \varepsilon(\dot{E}) = \dot{E} \wedge \varepsilon(E), \quad \mu(\dot{H}) \wedge H = \mu(H) \wedge \dot{H} \tag{S.43}$$

の意味を説明しておいた方がよいだろう．E, D の成分表示を

$$E = E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz, \tag{S.44}$$

$$D = \varepsilon(E) = (D_x\, dy \wedge dz + D_y\, dz \wedge dx + D_z\, dx \wedge dy) \otimes \mathbf{o} \tag{S.45}$$

で定めると，ε は線形写像なので，

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{S.46}$$

という行列 (ε_{ij}) が定められる．そうすると，

$$E \wedge \varepsilon(\dot{E}) = \Bigl(\sum_{i,j} E_i\, \varepsilon_{ij}\, \dot{E}_j\Bigr) dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o}, \tag{S.47}$$

$$\begin{aligned} \dot{E} \wedge \varepsilon(E) &= \Bigl(\sum_{i,j} \dot{E}_i\, \varepsilon_{ij}\, E_j\Bigr) dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \\ &= \Bigl(\sum_{i,j} E_i\, \varepsilon_{ji}\, \dot{E}_j\Bigr) dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \end{aligned} \tag{S.48}$$

なので，$E \wedge \varepsilon(\dot{E}) = \dot{E} \wedge \varepsilon(E)$ という条件は $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ に他ならない．つまり，誘電率テンソルが対称であることを要請している．

同様に，$B = \mu(H)$ の成分表示を

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \tag{S.49}$$

で定めれば，条件式 $\mu(\dot{H}) \wedge H = \mu(H) \wedge \dot{H}$ は $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ に他ならない．つまり，透磁率テンソルが対称であることを要請している．

6. 相対論的定式化

6.1 マクスウェル方程式

電磁気学は相対性理論と相性がよい．と言うよりも，電磁気学から導かれる光

速の不変性をどう理解すべきかという問題から相対性理論が生まれたと言うべきかもしれない．本誌記事では電磁場を 3 次元空間上の微分形式で書いたが，電磁場は 4 次元時空上の微分形式で書くこともできて，その方が見通しがよい[2)]．ここでは，4 次元時空上の電磁場の微分形式表示を用いてエネルギー・運動量の保存則を書いてみよう．微分形式は曲がった時空の上でも書けるのだが，ここでは平坦な時空，すなわち特殊相対性理論の範疇で議論しよう．

空間 $\mathbb{R}^4$ の座標を (t, x, y, z) とし，光速を c とする．あるいは $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ を座標とする．1 形式

$$\theta^0 = dx^0 = cdt,\ \theta^1 = dx^1 = dx,\ \theta^2 = dx^2 = dy,\ \theta^3 = dx^3 = dz \quad \text{(S.50)}$$

を導入し，4 次元時空上のミンコフスキー計量を

$$\begin{aligned} \eta &= \theta^0 \otimes \theta^0 - \theta^1 \otimes \theta^1 - \theta^2 \otimes \theta^2 - \theta^3 \otimes \theta^3 \\ &= c^2 dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz \end{aligned} \quad \text{(S.51)}$$

とおく．電場と磁束密度を一つの 2 形式

$$\begin{aligned} F &= F_{01}\, \theta^0 \wedge \theta^1 + F_{02}\, \theta^0 \wedge \theta^2 + F_{03}\, \theta^0 \wedge \theta^3 \\ &\quad + F_{12}\, \theta^1 \wedge \theta^2 + F_{23}\, \theta^2 \wedge \theta^3 + F_{31}\, \theta^3 \wedge \theta^1 \\ &= E_x\, dx \wedge dt + E_y\, dy \wedge dt + E_z\, dz \wedge dt \\ &\quad + B_x\, dy \wedge dz + B_y\, dz \wedge dx + B_z\, dx \wedge dy \end{aligned} \quad \text{(S.52)}$$

にまとめる．この F を電磁場テンソルあるいはファラデイテンソルともいう．ミンコフスキー計量による F のホッジ変換は捩 2 形式

$$\begin{aligned} *F &= \Big(F_{01}\, \theta^2 \wedge \theta^3 + F_{02}\, \theta^3 \wedge \theta^1 + F_{03}\, \theta^1 \wedge \theta^2 \\ &\qquad - F_{12}\, \theta^0 \wedge \theta^3 - F_{23}\, \theta^0 \wedge \theta^1 - F_{31}\, \theta^0 \wedge \theta^2 \Big) \otimes \mathbf{o} \\ &= \Big\{ \frac{-1}{c} (E_x\, dy \wedge dz + E_y\, dz \wedge dx + E_z\, dx \wedge dy) \\ &\qquad + c\,(B_x\, dx \wedge dt + B_y\, dy \wedge dt + B_z\, dz \wedge dt) \Big\} \otimes \mathbf{o} \end{aligned} \quad \text{(S.53)}$$

になる．ここでは

$$\mathbf{o} = [\![cdt \wedge dx \wedge dy \wedge dz]\!] \quad \text{(S.54)}$$

とおいた．電荷と電流密度を一つの捩 3 形式

$$\begin{aligned} J &= \big(-\rho\, dx \wedge dy \wedge dz \\ &\qquad + j_x\, dy \wedge dz \wedge dt + j_y\, dz \wedge dx \wedge dt + j_z\, dx \wedge dy \wedge dt \big) \otimes \mathbf{o} \end{aligned} \quad \text{(S.55)}$$

にまとめる．また，電束密度と磁場をまとめて捩 2 形式

$$\begin{aligned} G &= \big(- D_x\, dy \wedge dz - D_y\, dz \wedge dx - D_z\, dx \wedge dy \\ &\qquad + H_x\, dx \wedge dt + H_y\, dy \wedge dt + H_z\, dz \wedge dt \big) \otimes \mathbf{o} \end{aligned} \quad \text{(S.56)}$$

を定める．スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルはゲージ場と呼ばれる 1 形式

$$A = -\phi\,dt + A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz \tag{S.57}$$

にまとめられる．以上の記法を用いるとマクスウェル方程式は

$$dF = 0, \qquad dG = J \tag{S.58}$$

と書かれる．$dF = 0$ にポアンカレの補題を適用すると

$$F = dA \tag{S.59}$$

を満たす 1 形式 A の存在が言える．$0 = ddG = dJ$ から電荷保存則

$$dJ = 0 \tag{S.60}$$

が従う．真空中の電磁場の構成方程式は

$$G = \frac{1}{c\mu_0} * F = \frac{1}{Z_0} * F \tag{S.61}$$

となる．ここで $Z_0 := c\mu_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ は真空のインピーダンスと呼ばれる物理定数である．

6.2 バランス方程式

一般の保存則を相対論的な形で定式化しておこう．ある量の空間的な密度を ρ，流量の単位時間あたり単位面積あたりの密度を $\boldsymbol{q} = (q_x, q_y, q_z)$ とし，その量が単位時間あたり単位体積あたりに失われる量を v とする．流出した分と消失した分だけ量は減るのだから，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\Big(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\Big) - v \tag{S.62}$$

という関係式が成り立つ．この式を**バランス方程式** (balance equation) といい，v を**消滅項** (vanishing term) という．$q^0 = c\rho$, $(q^1, q^2, q^3) = (q_x, q_y, q_z)$ とおいて，**流量** (current) を表す捩 3 形式

$$\begin{aligned} Q &= \big(q^0\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - q^1\,dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + q^2\,dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &\qquad - q^3\,dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2\big) \otimes \mathbf{o} \\ &= \big\{q^0\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\qquad - (q^1\,dx^2 \wedge dx^3 + q^2\,dx^3 \wedge dx^1 + q^3\,dx^1 \wedge dx^2) \wedge dx^0\big\} \otimes \mathbf{o} \end{aligned} \tag{S.63}$$

を定め，さらに捩 4 形式

$$V = v\,dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \otimes \mathbf{o} \tag{S.64}$$

を定めれば，バランス方程式 (S.62) は

$$V = -dQ \tag{S.65}$$

と書かれる．

6.3 ローレンツ力の相対論的表式

エネルギーと運動量は一つの 1 形式

$$P = E dt - p_x dx - p_y dy - p_z dz \tag{S.66}$$

で表される．空間的に広がった物質場のエネルギー・運動量の変化は，1 形式に値を持つ捩 4 形式

$$T = P \otimes dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \tag{S.67}$$

で記述され，ベクトル場 $\boldsymbol{e}$ を与えると $T(\boldsymbol{e}) = P(\boldsymbol{e})\, dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o}$ は捩 4 形式になり，時空の捩 4 鎖 D にわたる積分

$$\Delta P_e(D) = \int_D T(\boldsymbol{e}) = \int_D P(\boldsymbol{e})\, dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \tag{S.68}$$

は，領域 D の物質場のエネルギー・運動量の $\boldsymbol{e}$ 成分の変化分を表す（$P(\boldsymbol{e})$ 自体が (t, x, y, z) の関数であることに注意）．4 次元ベクトル場

$$\boldsymbol{e} = e_0 \frac{\partial}{\partial x^0} + e_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \tag{S.69}$$

としては，例えば

$$\boldsymbol{e} = \frac{\partial}{\partial x} \tag{S.70}$$

のような x 方向の平行移動の生成子を選んでもよいし，

$$\boldsymbol{e} = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \tag{S.71}$$

のような yz 平面上の回転の生成子を選ぶこともできる．また，

$$\boldsymbol{e} = \frac{x}{c} \frac{\partial}{\partial t} + ct \frac{\partial}{\partial x} \tag{S.72}$$

は x 方向のブースト（ローレンツ変換）の生成子である．

以上の記法を用いると，電磁場が物質場に及ぼすローレンツ力の法則は

$$T(\boldsymbol{e}) = i_e F \wedge J \tag{S.73}$$

と表される．例えば

$$\boldsymbol{e} = \frac{\partial}{\partial x} \tag{S.74}$$

を選ぶと，

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{e}) &= P(\boldsymbol{e})\, dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \\ &= (-p_x) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \end{aligned} \tag{S.75}$$

は運動量の x 成分の符号を反転させたもの（の変化分）となり，

$$i_e F = E_x\,dt - B_y\,dz + B_z\,dy \tag{S.76}$$

から,

$$\begin{aligned} i_e F \wedge J =& (E_x\,dt - B_y\,dz + B_z\,dy) \wedge \big(- \rho\,dx \wedge dy \wedge dz \\ &+ j_x\,dy \wedge dz \wedge dt + j_y\,dz \wedge dx \wedge dt + j_z\,dx \wedge dy \wedge dt \big) \otimes \mathbf{o} \\ =& -(\rho E_x - j_z B_y + j_y B_z)\,dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \end{aligned} \tag{S.77}$$

となって, $T(\boldsymbol{e}) = i_e F \wedge J$ は荷電粒子に対するローレンツ力

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{S.78}$$

を物質場に対するローレンツ力に書き換えたものになっている.

また,

$$\boldsymbol{e} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{S.79}$$

を選ぶと,

$$T(\boldsymbol{e}) = E\,dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \tag{S.80}$$

はエネルギーの変化分を与える捩 4 形式になり,

$$i_e F = -E_x\,dx - E_y\,dy - E_z\,dz \tag{S.81}$$

から,

$$\begin{aligned} i_e F \wedge J =& -(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz) \wedge \big(- \rho\,dx \wedge dy \wedge dz \\ &+ j_x\,dy \wedge dz \wedge dt + j_y\,dz \wedge dx \wedge dt + j_z\,dx \wedge dy \wedge dt \big) \otimes \mathbf{o} \\ =& (E_x j_x + E_y j_y + E_z j_z)\,dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \end{aligned} \tag{S.82}$$

となって, $T(\boldsymbol{e}) = i_e F \wedge J$ は荷電粒子に対する仕事率

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \cdot \boldsymbol{v} = q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} \tag{S.83}$$

を物質場に対する仕事率に書き換えたものになっている.

6.4 電磁場のエネルギー・運動量の相対論的表式

ここまで来れば, マクスウェル方程式 (S.58) と一般的な構成方程式

$$G = \Phi(F) \tag{S.84}$$

を使ってローレンツ力の法則 (S.73) を書き換えるだけである. 構成方程式 (S.84) は真空中のものとは限らず, できるだけ一般的なものを考える. ここでは, $G = \Phi(F)$ は局所的で線形でベクトル場 $\boldsymbol{e}$ によるリー微分と可換

$$\mathcal{L}_e \Phi(F) = \Phi(\mathcal{L}_e F) \tag{S.85}$$

かつ任意の 2 形式 F, $\dot{F}$ に対する対称性

$$\dot{F} \wedge \Phi(F) = F \wedge \Phi(\dot{F}) \tag{S.86}$$

を満たすと仮定する．以上の仮定のもとで (S.73) は

$$\begin{aligned}
T(\boldsymbol{e}) =& i_e F \wedge J \\
=& i_e F \wedge dG \\
=& -d(i_e F \wedge G) + (d i_e F) \wedge G \\
=& -d(i_e F \wedge G) + (-i_e dF + \mathcal{L}_e F) \wedge G \\
=& -d(i_e F \wedge G) + (0 + \mathcal{L}_e F) \wedge \Phi(F) \\
=& -d(i_e F \wedge G) + \frac{1}{2}\{(\mathcal{L}_e F) \wedge \Phi(F) + F \wedge \Phi(\mathcal{L}_e F)\} \\
=& -d(i_e F \wedge G) + \frac{1}{2}\{(\mathcal{L}_e F) \wedge \Phi(F) + F \wedge \mathcal{L}_e \Phi(F)\} \\
=& -d(i_e F \wedge G) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_e(F \wedge \Phi(F)) \\
=& -d(i_e F \wedge G) + \frac{1}{2}(d i_e + i_e d)(F \wedge G) \\
=& -d(i_e F \wedge G) + \frac{1}{2}(d i_e + 0)(F \wedge G) \\
=& -d\bigl\{(i_e F) \wedge G - \frac{1}{2} i_e (F \wedge G)\bigr\} \\
=& -dQ_e
\end{aligned} \tag{S.87}$$

となる．これは微分形式で書かれたバランス方程式 (S.65) の形になっている．なお，計算の途中で，$F \wedge G$ は 4 次元時空上の捩 4 形式だから $d(F \wedge G) = 0$ となることを使った．最後の行で捩 3 形式

$$\begin{aligned}
Q_e =& (i_e F) \wedge G - \frac{1}{2} i_e (F \wedge G) \\
=& \bigl(Q^0\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - Q^1\, dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + Q^2\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
& - Q^3\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2\bigr) \otimes \mathbf{o} \\
=& \bigl\{Q^0\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& - (Q^1\, dx^2 \wedge dx^3 + Q^2\, dx^3 \wedge dx^1 + Q^3\, dx^1 \wedge dx^2) \wedge dx^0\bigr\} \otimes \mathbf{o}
\end{aligned} \tag{S.88}$$

を導入した．そうすると，時空の領域 D の物質場のエネルギー・運動量の変化分を表す式 (S.68)

$$\varDelta P_e(D) = \int_D T(\boldsymbol{e}) = -\int_D dQ_e = -\int_{\partial D} Q_e \tag{S.89}$$

は，Q_e は電磁場が持ち去るエネルギー・運動量を表していることを意味している．

Q_e を具体的に求めてみよう．まず，

$$F \wedge G = (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z - B_x H_x - B_y H_y - B_z H_z)$$

$$dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \otimes \mathbf{o} \tag{S.90}$$

は簡単にわかる．x 方向の並進ベクトル場

$$\boldsymbol{e} = \frac{\partial}{\partial x} \tag{S.91}$$

を選ぶと，(S.76) で求めたように

$$i_e F = E_x\, dt - B_y\, dz + B_z\, dy \tag{S.92}$$

であり，

$$\begin{aligned}
&i_e F \wedge G \\
&= (E_x\, dt - B_y\, dz + B_z\, dy) \\
&\quad \wedge \big(- D_x\, dy \wedge dz - D_y\, dz \wedge dx - D_z\, dx \wedge dy \\
&\qquad + H_x\, dx \wedge dt + H_y\, dy \wedge dt + H_z\, dz \wedge dt \big) \otimes \mathbf{o} \\
&= \big(- E_x D_x\, dt \wedge dy \wedge dz - E_x D_y\, dt \wedge dz \wedge dx - E_x D_z\, dt \wedge dx \wedge dy \\
&\quad + B_y D_z\, dz \wedge dx \wedge dy - B_y H_x\, dz \wedge dx \wedge dt - B_y H_y\, dz \wedge dy \wedge dt \\
&\quad - B_z D_y\, dy \wedge dz \wedge dx + B_z H_x\, dy \wedge dx \wedge dt + B_z H_z\, dy \wedge dz \wedge dt \big) \otimes \mathbf{o}
\end{aligned} \tag{S.93}$$

なので，

$$\begin{aligned}
Q_e &= (i_e F) \wedge G - \frac{1}{2} i_e (F \wedge G) \\
&= \Big\{ - E_x D_x\, dt \wedge dy \wedge dz - E_x D_y\, dt \wedge dz \wedge dx - E_x D_z\, dt \wedge dx \wedge dy \\
&\quad + B_y D_z\, dz \wedge dx \wedge dy - B_y H_x\, dz \wedge dx \wedge dt - B_y H_y\, dz \wedge dy \wedge dt \\
&\quad - B_z D_y\, dy \wedge dz \wedge dx + B_z H_x\, dy \wedge dx \wedge dt + B_z H_z\, dy \wedge dz \wedge dt \\
&\quad + \frac{1}{2} (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z - B_x H_x - B_y H_y - B_z H_z)\, dt \wedge dy \wedge dz \Big\} \otimes \mathbf{o} \\
&= \Big\{ (B_y D_z - B_z D_y) dx \wedge dy \wedge dz \\
&\quad - E_x\, dt \wedge (D_x\, dy \wedge dz + D_y\, dz \wedge dx + D_z\, dx \wedge dy) \\
&\quad - H_x\, dt \wedge (B_x\, dy \wedge dz + B_y\, dz \wedge dx - B_z\, dy \wedge dx) \\
&\quad + H_x B_x\, dt \wedge dy \wedge dz - H_y B_y\, dz \wedge dy \wedge dt + H_z B_z\, dy \wedge dz \wedge dt \\
&\quad + \frac{1}{2} (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z - H_x B_x - H_y B_y - H_z B_z)\, dt \wedge dy \wedge dz \Big\} \otimes \mathbf{o} \\
&= \Big\{ (B_y D_z - B_z D_y) dx \wedge dy \wedge dz \\
&\quad - E_x\, dt \wedge (D_x\, dy \wedge dz + D_y\, dz \wedge dx + D_z\, dx \wedge dy) \\
&\quad - H_x\, dt \wedge (B_x\, dy \wedge dz + B_y\, dz \wedge dx + B_z\, dx \wedge dy) \\
&\quad + \frac{1}{2} (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z + H_x B_x + H_y B_y + H_z B_z)\, dt \wedge dy \wedge dz \Big\} \otimes \mathbf{o}
\end{aligned} \tag{S.94}$$

となる．これは (S.39)-(S.42) で求めた電磁場の運動量密度と応力の符号を逆

にしたものになっている．符号が逆になるのは (S.75) に負号が付いているせいである．

また，t 方向の並進ベクトル場

$$\boldsymbol{e} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{S.95}$$

を選ぶと，(S.81) で求めたように

$$i_e F = -E_x\,dx - E_y\,dy - E_z\,dz \tag{S.96}$$

であり，

$$\begin{aligned} i_e F \wedge G = &-(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz) \\ &\qquad \wedge \Big(-D_x\,dy \wedge dz - D_y\,dz \wedge dx - D_z\,dx \wedge dy \\ &\qquad\quad + H_x\,dx \wedge dt + H_y\,dy \wedge dt + H_z\,dz \wedge dt \Big) \otimes \mathbf{o} \\ = &\Big[(E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z) dx \wedge dy \wedge dz \\ &\quad - \{ (E_x H_y - E_y H_x) dx \wedge dy + (E_y H_z - E_z H_y) dy \wedge dz \\ &\quad + (E_z H_x - E_x H_z) dz \wedge dx \} \wedge dt \Big] \otimes \mathbf{o} \end{aligned} \tag{S.97}$$

なので，

$$\begin{aligned} Q_e &= (i_e F) \wedge G - \frac{1}{2} i_e (F \wedge G) \\ &= \Big[(E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z) dx \wedge dy \wedge dz \\ &\quad - \{ (E_x H_y - E_y H_x) dx \wedge dy + (E_y H_z - E_z H_y) dy \wedge dz \\ &\quad + (E_z H_x - E_x H_z) dz \wedge dx \} \wedge dt \\ &\quad - \frac{1}{2} (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z - B_x H_x - B_y H_y - B_z H_z)\,dx \wedge dy \wedge dz \Big] \otimes \mathbf{o} \\ &= \Big[\frac{1}{2} (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z + H_x B_x + H_y B_y + H_z B_z) dx \wedge dy \wedge dz \\ &\quad - \{ (E_x H_y - E_y H_x) dx \wedge dy + (E_y H_z - E_z H_y) dy \wedge dz \\ &\quad + (E_z H_x - E_x H_z) dz \wedge dx \} \wedge dt \Big] \otimes \mathbf{o} \end{aligned} \tag{S.98}$$

となる．これは (S.29)-(S.36) で求めた電磁場のエネルギー密度とエネルギーの流れの密度に他ならない．ということで，Q_e は電磁場が運ぶエネルギー・運動量を表し，相対論的ローレンツ力の式 (S.73), (S.87)

$$T(\boldsymbol{e}) = i_e F \wedge J = -dQ_e = -d\Big\{ (i_e F) \wedge G - \frac{1}{2} i_e (F \wedge G) \Big\} \tag{S.99}$$

は電磁場と物質場との間のエネルギー・運動量の受け渡しの関係を表し，エネルギー・運動量の保存則を表していることがわかった．

7. 課題

ローレンツ力の法則は電磁場が物質に与える運動量を表しているわけだが，

これを手掛かりにして電磁場と物質のトータルの運動量が保存するように電磁場の運動量の表式を定めた．ただ，保存則は「電磁場の運動量が減った分だけ物質の運動量が増える」と言っているだけなので，保存則だけでは電磁場の運動量の絶対量は決められない．

また，構成方程式を通して物質の分極や磁化を見かけ上，電束や磁場の中に「くりこむ」ことができてしまうので，どこまでが電磁場の運動量で，どれだけが物質場の運動量なのかという境目を恣意的に動かせてしまう．このことがアブラハム–ミンコフスキー論争の原因でもある．

純粋に「電磁場が運ぶ運動量」だけを定義したいのであれば，物質のない真空中の電磁場の運動量の定義式を使うのが妥当であろう．電磁場が担う運動量の絶対値を直接的に測るのではなく，電磁場と検出器との相互作用を通して検出器が受ける力を問題にするのであれば，運動量の授受の量を問題にすればよいし，それは相互作用の形態しだいである．電磁場の運動量の定義式の検証実験をやるなら，この意味での検証ということになる．

ここまでの議論を振り返ると，電磁場の運動量保存則を導く仮定としては，E と D，B と H の関係を与える構成方程式 $D = \varepsilon(E)$, $H = \mu^{-1}(B)$ の対称性が一番肝心であったことがわかる．媒質が非等方的な場合や，非一様な場合，あるいは，パリティ対称性が破れているキラルな媒質の場合，さらには，媒質が運動している場合の扱いも考えると面白い．とくに誘電率の異なる媒質が接触する界面の問題は意味があるだろう．これらの問題に関しても先行研究はあるが（例えば太田浩一氏の本[3)]で解説されている），ここで私が言いたいのは，対称性の破れている状況をも幾何学的・物理学的見通しのよいやり方で扱いたいという提案である．

なお，本記事と補足の議論では一貫して構成方程式は線形であると仮定していたが，運動量の微分形式の形を保ったまま構成方程式が非線形の場合にも成り立つように拡張することは難しいように思われる．

場のラグランジアンから出発する正準形式の解析力学でもエネルギー・運動量の定義式を導くことができるが，ここではその議論は扱わなかった．

電磁場の量子論に移行すると，光子がエネルギーと運動量と角運動量の運び手になるが，媒質中の光子のエネルギー・運動量・角運動量の定義はいかにすべきかという問題はかなり非自明だと思われる．ただ，その場合も，運動量の適切な定義式は光子の検出方法に依ることになるだろう．

一般相対性理論では，重力場の源は重力以外の場のエネルギー・運動量なので，この場合は，電磁場のエネルギー・運動量の絶対量が直接的な問題になるが，それでも，電磁場のエネルギー・運動量と，物質場のエネルギー・運動量とを分けて扱うなら（扱うことができるだろうし），電磁場については真空中の定義式を使うべきであろう．

参考文献

1) 今井功,『電磁気学を考える』, サイエンス社, 1990.
2) 谷村省吾,『幾何学から物理学へ』(SGC ライブラリ 150), サイエンス社, 2019 (電子版：2020), 第 15 章.
3) 太田浩一,『電磁気学の基礎 II』, 東京大学出版会, 2012.

(たにむら・しょうご, 名古屋大学大学院情報学研究科)