1 章問題解答

1.1 たとえば $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1.2 $(1,2)$ 成分は -1, 第 3 列ベクトルは $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, 第 1 行ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

1.3 3 次元. 第 2 成分は -2.

1.4 $6! = 720$ 通り.

1.5 成分ごとに考えればよい. たとえば (4) で両辺の (i,j) 成分を考えると, 左辺は $(\lambda+\mu)a_{ij}$ となり右辺は $\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}$ となるので等しい.

1.6 (1) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6i & -3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1-2i & 4 \\ -2i & 5 \end{bmatrix}$ (3) $C = B - A = \begin{bmatrix} -1-i & 2 \\ 2i & 1 \end{bmatrix}$

1.7 (1) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 4i & 6 \\ i & -2 & 3i \\ -1 & -2i & -3 \end{bmatrix}$

1.8 (2) $A(B+C) = AB + BC$ について. A を $m \times l$, B, C を $l \times n$ 行列とする.

$$\begin{aligned} A(B+C) \text{ の } (i,j) \text{ 成分} &= \sum_{k=1}^{l} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{l} a_{ik}c_{kj} = AB + AC \text{ の } (i,j) \text{ 成分} \end{aligned}$$

$(A+B)C = AC + BC$ について. A, B を $m \times l$, C を $l \times n$ 行列とする.

$$\begin{aligned} (A+B)C \text{ の } (i,j) \text{ 成分} &= \sum_{k=1}^{l} (a_{ik} + b_{ik})c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{l} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{l} b_{ik}c_{kj} = AC + BC \text{ の } (i,j) \text{ 成分} \end{aligned}$$

(3) A を $m \times l$, B を $l \times n$ 行列とする. $\lambda(AB)$, $(\lambda A)B$, $A(\lambda B)$ の (i,j) 成分はそれぞれ $\lambda \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$, $\sum_{k=1}^{l} (\lambda a_{ik})b_{kj}$, $\sum_{k=1}^{l} a_{ik}(\lambda b_{kj})$. 三者が等しいのは明らか.

1.9 (1) と (3). 一般に $AB \neq BA$ なので (2) と (4) は成立しない.

1.10 (1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 4 & 21 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

1.11 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3(a+2c) & 3(b+2d) \end{bmatrix} = O$. ゆえに $a = -2c$, $b = -2d$. 答. s, t を任意の数として $B = \begin{bmatrix} -2s & -2t \\ s & t \end{bmatrix}$

1.12 (1) $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 5i & 2+4i \end{bmatrix}$

1.13 AB の (i,j) の成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$．これは $A\boldsymbol{b}_j$ の第 i 成分，$\boldsymbol{a}_i B$ の第 j 成分に等しい．よって等式が成り立つ．

1.14 AE の (i,j) 成分 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$, EB の (i,j) 成分 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}b_{kj} = b_{ij}$.

1.15 $E\boldsymbol{x}$の第 i 成分 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}x_k = x_i$ より $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. $\boldsymbol{y}E$ の第 i 成分 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k\delta_{ki} = y_i$ より $\boldsymbol{y}E = \boldsymbol{y}$.

1.16 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする．$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -a-c & -b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $a = -1$, $b = -2$, $c = 1$, $d = 1$．よって $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $BA = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$.

1.17 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

1.18 ${}^t(ABC) = {}^t((AB)C) = {}^tC\,{}^t(AB) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA$.

1.19 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, ${}^t(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, ${}^tB\,{}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$,

${}^tA\,{}^tB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1.20 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. ${}^t\boldsymbol{x}\,A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$.

1.21 (1) $2\cdot(2-i) + (-i)\cdot 1 = 4-3i$ (2) $1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 = 0$
(3) $2\cdot(2i) + (-1-2i)\cdot 3 + 1\cdot(-1) = -4-2i$.

1.22 任意の複素数 a, b に対して $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$ が成立するので，$\overline{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n} = \overline{a_1}\,\overline{b_1} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{b_n}$ が成立する．

(1) $\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} = \overline{\overline{x_1}y_1 + \cdots + \overline{x_n}y_n} = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$

(2) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \overline{x_1}(y_1+z_1) + \cdots + \overline{x_n}(y_n+z_n) = (\overline{x_1}y_1 + \cdots + \overline{x_n}y_n) + (\overline{x_1}z_1 + \cdots + \overline{x_n}z_n) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$
$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\overline{x_1+y_1})z_1 + \cdots + (\overline{x_n+y_n})z_n = (\overline{x_1}z_1 + \cdots + \overline{x_n}z_n) + (\overline{y_1}z_1 + \cdots + \overline{y_n}z_n) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

(3) $(c\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \overline{cx_1}y_1 + \cdots + \overline{cx_n}y_n = \overline{c}(\overline{x_1}y_1 + \cdots + \overline{x_n}y_n) = \overline{c}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$
$(\boldsymbol{x},c\boldsymbol{y}) = \overline{x_1}(cy_1) + \cdots + \overline{x_n}(cy_n) = c(\overline{x_1}y_1 + \cdots + \overline{x_n}y_n) = c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

(4) 任意の複素数 z は a, b を実数として $z = a + ib$ と表すことができる．また $\overline{z}z = (a-ib)(a+ib) = a^2 + b^2 \geqq 0$ となる．等号が成立するのは $a = b = 0$ すなわち

$z=0$ のときのみ．$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\overline{x_1}x_1+\cdots+\overline{x_n}x_n$ であり，$\overline{x_i}x_i \geqq 0$ であるので $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqq 0$. また $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ となるのは，すべての i に対して $\overline{x_i}x_i=0$ となるとき，すなわち $x_i=0$ のときであり，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる．

1.23 (1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は実数であるので問題 1.22 (1) より $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.
(2) $\bar{c}=c$ と問題 1.22 より明らか.

1.24 (1) $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{1^2+(-i)i}=\sqrt{2}$
(3) $\sqrt{2^2+(1-i)(1+i)+0^2+(-2)^2}=\sqrt{10}$

1.25 $|\boldsymbol{x}|$ が実数なので問題 1.23 (2) より $(\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|,\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})/|\boldsymbol{x}|^2=1$. したがって $\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ の大きさは1.

1.26 ${}^tA=A$ は明らか．A^k について与式が成立しているとする．このとき

$$A^{k+1}=A\,A^k=\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1^k & & 0 \\ & a_2^k & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1^{k+1} & & 0 \\ & a_2^{k+1} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n^{k+1} \end{bmatrix}$$

が成立する．また $k=1$ のとき明らかに与式が成立する．したがって数学的帰納法より任意の k に対して与式が成立する．

1.27 $A=\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & b_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{bmatrix}$ とする．

$A+B=\begin{bmatrix} a_1+b_1 & & 0 \\ & a_2+b_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n+b_n \end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix} a_1b_1 & & 0 \\ & a_2b_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_nb_n \end{bmatrix}$ となり，ともに対角行列である．

1.28 上三角行列同士の和が上三角行列になることは明らか．積については

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \cdots\cdots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} & \cdots & a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2n}b_{nn} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & & & & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

となり，やはり上三角行列になる．

また，上三角行列と下三角行列の和が一般に三角行列でないのは明らか．積についても

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots & \\ \text{\Large 0} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & & \text{\Large 0} & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \cdots\cdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{12}b_{22} + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{1n}b_{nn} \\ a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{22}b_{22} + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{2n}b_{nn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

となるので一般に三角行列ではない．

1.29 上三角行列の場合についてのみ示す．A は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 0 \end{bmatrix}$$

の形をしている．このとき A^k $(1 \leqq k \leqq n)$ が

$$A^k = \begin{bmatrix} & \\ \text{\Large 0} & \end{bmatrix} \Big\}\, n-k \text{ 行}$$

の形になることは,

$$A^{k+1} = AA^k = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ \text{\Large 0} & \end{bmatrix} \Big\}\, n-k \text{ 行} = \begin{bmatrix} & \\ \text{\Large 0} & \end{bmatrix} \Big\}\, n-k-1 \text{ 行}$$

より数学的帰納法によって示される．したがって $A^n = O$.

1章演習問題解答

1.1 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 2i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4+2i \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3i \\ -3 \\ 2i \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 13 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 4-i \\ 3-2i \end{bmatrix}[i\ 1] = \begin{bmatrix} 1+4i & 4-i \\ 2+3i & 3-2i \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. ゆえに $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^5 = 3^4\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \end{bmatrix}$.

1.2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする．$A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix} = O$. $a+d=0$ のとき $d=-a$, $a^2+bc=0$. $b=0$ なら $a=0$, $b\neq 0$ なら $c=-a^2/b$. $a+d\neq 0$ のとき $b=c=0$. ゆえに $a=d=0$ となり $a+d\neq 0$ に矛盾する．

答. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ か $\begin{bmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{bmatrix}$ $(b\neq 0)$ のどちらか

1.3 $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 = A^2+B^2$,
$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)^2 = (A+B)(A^2+B^2) = A^3+BA^2+AB^2+B^3 = A^3+A^2B+AB^2+B^3$,
$(A+B)^4 = (A+B)^2(A+B)^2 = (A^2+B^2)^2 = A^4+A^2B^2+B^2A^2+B^4 = A^4+2A^2B^2+B^4$.
答. ア $=0$, イ $=1$, ウ $=1$, エ $=0$, オ $=2$, カ $=0$

1.4 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2+2i \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2i \\ 2+2i \\ -3 \end{bmatrix}$

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 1\cdot 2i + (1-i)\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = -1+2i$

$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) = (-2i)\cdot 1 + 0\cdot(1+i) + 1\cdot(-1) = -1-2i$

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2+(1-i)(1+i)+(-1)^2} = 2$ $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{(-2i)(2i)+0^2+1^2} = \sqrt{5}$

1.5 $|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2 = (3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) = 9(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+6(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+6(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+4(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) = 9+6+6i+6-6i+16 = 37$
答. $\sqrt{37}$

1.6 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$ とすると $AB = \begin{bmatrix} b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ となる．したがって

$$A^k = \begin{array}{c} \scriptstyle k+1\ 列 \\ \begin{bmatrix} & 1 & & \text{\Large 0} \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ \text{\Large 0} & & & & \end{bmatrix} \end{array} \quad (1 \leqq k \leqq n-1), \qquad O \quad (n \leqq k)$$

1.7 ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$, ${}^t({}^tA) = A$ より ${}^t(A\,{}^tA) = {}^t({}^tA){}^tA = A\,{}^tA$,　${}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$.

1.8 $E^k = E$, $A^kE^l = A^k$ などにより $(A+E)^m$ は A を変数 x, E を 1 に置き換えた多項式 $(x+1)^m$ と同じ計算にしたがう．${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数とすると $(x+1)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k x^k$.

答. $c_k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$

1.9 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とする．$A\boldsymbol{x}$ の第 k 成分は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i$. これが $\boldsymbol{x}$ によらず常に $3x_k$ となる．したがって $a_{ki} = 3\delta_{ki}$. すべての k でこのことが成立しなければならないので $A = 3E$.

1.10 (1) 左辺の (i,j) 成分 $= \overline{\overline{a_{ij}}} = a_{ij} =$ 右辺の (i,j) 成分

(2) 左辺の (i,j) 成分 $= \overline{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}}\,\overline{b_{kj}} =$ 右辺の (i,j) 成分

(3) 左辺の第 i 成分 $= \overline{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}}\,\overline{x_k} =$ 右辺の第 i 成分

(4) $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(\overline{A\boldsymbol{x}})\boldsymbol{y} = {}^t(\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{y} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,{}^t\overline{A}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, {}^t\overline{A}\boldsymbol{y})$

1.11 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ とする．

$$
{}^tC = {}^t\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & b_{11} & b_{12} \\ \multicolumn{2}{c}{0} & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & & \\ a_{12} & a_{22} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & b_{11} & b_{21} \\ \multicolumn{2}{c}{0} & b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tA & O \\ O & {}^tB \end{bmatrix},
$$

$$
C^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} & & \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & b_{11}^2 + b_{12}b_{21} & b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} \\ \multicolumn{2}{c}{0} & b_{21}b_{11} + b_{22}b_{21} & b_{21}b_{12} + b_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & O \\ O & B^2 \end{bmatrix}.
$$

同様にして $CD = \begin{bmatrix} A^2 & AB \\ B^2 & BA \end{bmatrix}$, $D^2 = \begin{bmatrix} A^2 + B^2 & AB + BA \\ AB + BA & A^2 + B^2 \end{bmatrix}$.