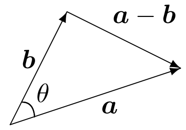
2 章問題解答

2.1 速度，加速度，力，電場，磁場など.

2.2 余弦定理より $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$. ゆえに $(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2 = a_x^2+a_y^2+b_x^2+b_y^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.
したがって $a_xb_x+a_yb_y = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.



2.3 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c-t\\ c+t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$. ゆえに $y=-x+2c$.

$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t-c\\ t+c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$. ゆえに $y=x+2c$.

$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c+2t\\ -c+t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$. ゆえに $y=(x-3c)/2$.

$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t+2c\\ -t+c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$. ゆえに $y=-x+3c$.

答. A によって直線 $x=c$, $y=c$ はそれぞれ直線 $y=-x+2c$, $y=x+2c$ に，B によって直線 $y=(x-3c)/2$, $y=-x+3c$ に写像される.

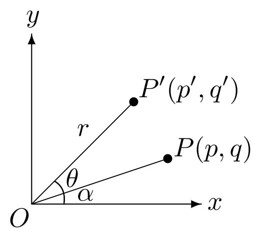
2.4 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ t^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t\\ 2t+t^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$. ゆえに $y=x^2+2x=(x+1)^2-1$.

答. 放物線 $y=(x+1)^2-1$

2.5 たとえば $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ とすると，$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ より直線 $y=x$ 上の点はすべて原点に写像されることになり，1 対 1 写像にならない.

2.6 図より $p=r\cos\alpha$, $q=r\sin\alpha$ であり
$p'=r\cos(\theta+\alpha)=r(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)=p\cos\theta-q\sin\theta$,
$q'=r\sin(\theta+\alpha)=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=p\sin\theta+q\cos\theta$.
したがって $\begin{bmatrix}p'\\ q'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}$.
A^n は $n\theta$ だけの回転移動を表すので

$$A^n = \begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}.$$



2.7 (1) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi & -\cos\frac{2}{3}\pi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}$

2.8 $[x\ y] \to \begin{bmatrix}-x\\ -y\end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

2.9 $\begin{bmatrix}p'\\ q'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}p+2q\\ p+q\end{bmatrix}$. これを p, q について解いて，$\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-p'+2q'\\ p'-q'\end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix}$．よって $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列は $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$．

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ の逆行列も同様にして $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ と求められる．

2.10 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ とする．$BA = \begin{bmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$．ゆえに

$$pa+qc=1 \quad ①, \quad pb+qd=0 \quad ②, \quad ra+sc=0 \quad ③, \quad rb+sd=1 \quad ④.$$

①, ②より

$$p(ad-bc)=d, \qquad q(ad-bc)=-b.$$

③, ④より

$$r(ad-bc)=-c, \qquad s(ad-bc)=a.$$

もし $ad-bc=0$ ならば $a=b=c=d=0$ すなわち $A=O$ となり，そもそも $BA=E$ が成り立たない．よって $ad-bc \neq 0$ であり，これを

$$AB = \begin{bmatrix} pa+rb & qa+sb \\ pc+rd & qc+sd \end{bmatrix}$$

に代入すると確かに $AB=E$ となる．

2.11 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とする．どの成分も 0 でなく，列ベクトルが平行なら $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ $(c \neq 0)$ と表すことができる．したがって A の第 1, 2 行ベクトルはそれぞれ $a_{12}\begin{bmatrix} c & 1 \end{bmatrix}$, $a_{22}\begin{bmatrix} c & 1 \end{bmatrix}$ となる．ゆえに両者は平行．同様にして行ベクトルが平行ならば列ベクトルも平行であることを示せる．この法則の対偶をとると，列ベクトルが平行でないなら行ベクトルも平行でない．

2.12 (1) 行列式 2, 逆行列 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ (2) 行列式 4, 逆行列 $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$

(3) 行列式 0

2.13 $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{bmatrix} x_3-x_1 \\ y_3-y_1 \end{bmatrix}$．これを列ベクトルとする行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{bmatrix}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} \text{三角形 } P_1P_2P_3 \text{の面積} &= \frac{1}{2}|A| \text{ の絶対値} \\ &= \frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)| \\ &= \frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|. \end{aligned}$$

2.14 (1) $|E| = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$ (2) $|{}^tA| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} = |A|$

(3) $|A^{-1}| = \begin{vmatrix} a_{22}/|A| & -a_{12}/|A| \\ -a_{21}/|A| & a_{11}/|A| \end{vmatrix} = \dfrac{1}{|A|^2}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) = \dfrac{1}{|A|}$

2.15 問題 2.14 (2) の $|{}^tA| = |A|$ より明らか.

2.16 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ とする. $AB = \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$ なので
$|AB| = (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) = (ad-bc)(ps-qr) = |A||B|$.

2.17 (1) $AB = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $|AB| = -14$. $|A| = -7$, $|B| = 2$ なので成立.

(2) $AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$, $|AB| = 0$. $|A| = 0$, $|B| = 6$ なので成立.

2.18 $|A| = -2$ なので $|A^n| = |A|^n = (-2)^n$.

2章演習問題解答

2.1 (1) $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$．ゆえに $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\cos\theta = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．ゆえに $\theta = \dfrac{5}{6}\pi$.

(2) $\cos\theta = \dfrac{\sin 3}{1\cdot 1} = \sin 3 = \cos(\dfrac{\pi}{2}-3)$．ゆえに $\theta = 3-\dfrac{\pi}{2}$ (注：$0 < 3-\dfrac{\pi}{2} < \pi$).

2.2 (1) $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 原点を中心に縦横とも 2 倍に拡大する写像

(2) $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$ 直線 $y=x$ に関する対称移動

(3) $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\x\end{bmatrix}$ 各点を，その点を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点に移す写像

2.3 (1) 点 (p,q) を点 $(p,0)$ に写像するので $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$.

(2) 直線が x 軸となす角を θ とすると $a=\tan\theta$．問題の線形変換は，角 $-\theta$ だけ回転し，(1) の写像を行い，さらに角 θ だけ回転する一連の写像に等しい．したがって

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix} = \frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix}1 & a\\ a & a^2\end{bmatrix}.$$

2.4 (1) $\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\3t-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7t-2\\2t-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ より $y=\dfrac{2}{7}x-\dfrac{3}{7}$．答．直線 $y=\dfrac{2}{7}x-\dfrac{3}{7}$

(2) $\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6 & 6\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ 答．3 点 $(3,0)$, $(6,0)$, $(6,3)$ を頂点とする三角形

2.5 任意の直線は，その直線が通る点 (p,q) と方向ベクトル $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ を指定すればよい．このとき直線上の任意の点の位置ベクトルはパラメータ t を用いて $\begin{bmatrix}\alpha t+p\\ \beta t+q\end{bmatrix}$ と表すことができる．線形変換を表す行列を $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ とすれば，変換によって位置ベクトルが

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha t+p\\ \beta t+q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(a_{11}\alpha+a_{12}\beta)t+a_{11}p+a_{12}q\\ (a_{21}\alpha+a_{22}\beta)t+a_{21}p+a_{22}q\end{bmatrix}$$

である点に写像される．これは一般に点 $(a_{11}p+a_{12}q, a_{21}p+a_{22}q)$ を通り，方向ベクトル $\begin{bmatrix}a_{11}\alpha+a_{12}\beta\\ a_{21}\alpha+a_{22}\beta\end{bmatrix}$ の直線を表す．ただし，$a_{11}\alpha+a_{12}\beta = a_{21}\alpha+a_{22}\beta = 0$ のときは直線にならず，一点 $(a_{11}p+a_{12}q, a_{21}p+a_{22}q)$ に写像される．

2.6 (1) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+2a_{12} \\ a_{21}+2a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. ゆえに $a_{11} = -2a_{12} - 1$, $a_{21} = -2a_{22} + 4$.
答. s, t を任意の実数として $\begin{bmatrix} -2s-1 & s \\ -2t+4 & t \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} -2s-1 & s \\ -2t+4 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6s-3 \\ -6t+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. ゆえに $s = -\dfrac{5}{6}$, $t = \dfrac{5}{3}$. 答. $\begin{bmatrix} 2/3 & -5/6 \\ 2/3 & 5/3 \end{bmatrix}$

(3) $P(p_x, p_y)$, $Q(q_x, q_y)$, $P'(p'_x, p'_y)$, $Q'(q'_x, q'_y)$ とする．P を P', Q を Q' に写像するには

$$\underbrace{\begin{array}{cc} \boldsymbol{p}' & \boldsymbol{q}' \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} p'_x & q'_x \\ p'_y & q'_y \end{bmatrix}} \end{array}}_{T'} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{array}{cc} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} p_x & q_x \\ p_y & q_y \end{bmatrix}} \end{array}}_{T}$$

を満たす行列 A が存在すればよい．もし行列 T に逆行列が存在する，すなわち $|T| = p_xq_y - q_xp_y \neq 0$ ならば，両辺に右から T^{-1} をかけることができ，$A = T'T^{-1}$ となって必ず A が存在する．$|T| \neq 0$ は定理 2.2 より $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p} \not\parallel \boldsymbol{q}$ に等価なので点 P, Q, O が同一直線上にないことに等しい．

$|T| = 0$ のとき $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ か，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ か，$\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{q}$ のどれかになるが，今は $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{q}$. このとき適当に 0 でない定数 c を定めて $\boldsymbol{q} = c\boldsymbol{p}$ と表せる．すると $\begin{bmatrix} p'_x & q'_x \\ p'_y & q'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p_x + a_{12}p_y & c(a_{11}p_x + a_{12}p_y) \\ a_{21}p_x + a_{22}p_y & c(a_{21}p_x + a_{22}p_y) \end{bmatrix}$ なので $\boldsymbol{q}' = c\boldsymbol{p}'$ であれば A が存在する．
以上をまとめると (i) 点 P, Q と原点 O が同一直線上にない，(ii) $\overrightarrow{OQ} = c\,\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ'} = c\,\overrightarrow{OP'}$ となる，のどちらかの場合に線形変換が存在する．

2.7 楕円上の点はパラメータ θ を用いて $(2\cos\theta, \sin\theta)$ と表すことができる．線形変換によって $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\theta + a\sin\theta \\ 2b\cos\theta + c\sin\theta \end{bmatrix}$ となるので，半径 2 の円上に移されるためには，任意の θ に対して $(2\cos\theta + a\sin\theta)^2 + (2b\cos\theta + c\sin\theta)^2 = 4$ すなわち $4(1+b^2)\cos^2\theta + 4(a+bc)\cos\theta\sin\theta + (a^2+c^2)\sin^2\theta = 4$ でなければならない．したがって $1+b^2 = 1$, $a+bc = 0$, $a^2+c^2 = 4$ なので，$a = b = 0$, $c = \pm 2$.

2.8 (1) $x = 1$, $y = -1$ (2) $x = y = 0$ (3) t を任意の数として $x = t+1$, $y = t$

2.9 (1) 行列式 $= 3$, 逆行列 $= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ (2) 行列式 $= 0$, 逆行列なし
(3) 行列式 $= -4$, 逆行列 $= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ (4) 行列式 $= 2$, 逆行列 $= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

2.10 $A^{-1} = A$ より $A^2 = E$. 逆に $A^2 = E$ なら定理 2.3 より $|A| \neq 0$ なので逆行列が存在し $A^{-1} = A$ となる．したがって $A^2 = E$ となる行列を求めればよい．$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると $A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

・$a+d\neq 0$のとき: $b=c=0,\ a=\pm 1,\ d=\pm 1$. $a+d\neq 0$を考慮して$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$か$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$.

・$a+d=0$のとき: $a^2+bc=1$より$a=\pm\sqrt{1-bc}$（ただし$bc\leqq 1$）．したがって$\begin{bmatrix}\pm\sqrt{1-bc}&b\\c&\mp\sqrt{1-bc}\end{bmatrix}$.

答. $\begin{bmatrix}\pm 1&0\\0&\pm 1\end{bmatrix}$，あるいは$bc\leqq 1$を満たす実数$b,\ c$を用いて$\begin{bmatrix}\pm\sqrt{1-bc}&b\\c&\mp\sqrt{1-bc}\end{bmatrix}$（複号同順）

2.11 $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$より$\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}=-5$. したがって面積は$\dfrac{|-5|}{2}=\dfrac{5}{2}$.

2.12 三角形の頂点をそれぞれ$P,\ Q,\ R$とし，それぞれの位置ベクトルを$\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{r}$とする．2次正方行列$T=[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}]$を考えると$S=|T|$の絶対値/2となる．線形変換により写像された各点の位置ベクトルは$A\boldsymbol{p},\ A\boldsymbol{q},\ A\boldsymbol{r}$であり，そのときの三角形の面積は，$T'=[A\boldsymbol{q}-A\boldsymbol{p}\ A\boldsymbol{r}-A\boldsymbol{p}]=AT$とすると$|T'|$の絶対値/2となる．$|T'|=|AT|=|A||T|$なので，写像後の三角形の面積は$|A|$の絶対値$\times S$.