3 章問題解答

3.1 (1) $x=1,\ y=2$ (2) $x=-1,\ y=0$ (3) $x=1+i,\ y=1-i$

3.2 (1) $\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

3.3 (1) $\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\end{bmatrix}$ 答．1 個

(2) $\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&0&-3\end{bmatrix}$ 答．なし

(3) $\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$ 答．無限個

3.4 ③について：行基本変形 I ～ III はどれも変形前に戻ることのできる操作であり，変形前に戻るためには再び行基本変形を用いればよい．すなわち，③の形にたどり着く行列は，③に対して適当な行基本変形を何回か施すことによって得られなければならない．③の形の行列を一般に $\begin{bmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\0&0&0\end{bmatrix}$ $(\alpha\neq 0)$ とすると，行基本変形を何回か施した後は一般に $\begin{bmatrix}a\alpha&a\beta&a\gamma\\b\alpha&b\beta&b\gamma\end{bmatrix}$ となる．ただし a, b の少なくとも一方は 0 でない．以上より③の形にたどり着く行列の一般形は，$p\neq 0$ として $\begin{bmatrix}p&q&r\\cp&cq&cr\end{bmatrix}$ か $\begin{bmatrix}cp&cq&cr\\p&q&r\end{bmatrix}$ のどちらかである．

④について：同様の考察により④の形にたどり着く行列の一般形は $p\neq 0,\ r\neq 0$ として $\begin{bmatrix}0&p&q\\0&cp&cq+r\end{bmatrix}$ か $\begin{bmatrix}0&cp&cq+r\\0&p&q\end{bmatrix}$ のどちらかである．

3.5 (1) $\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-1&3\end{bmatrix}$ 答．2 (2) $\begin{bmatrix}i&2&1\\2&-4i&-2i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}i&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 答．1

(3) $\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&2\\0&0\end{bmatrix}$ 答．1 (4) $\begin{bmatrix}1+i&1\\2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+i&1\\0&-1+i\end{bmatrix}$ 答．2

3.6 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ とする．

行基本変形 I によって第 1 行を c 倍 $(c\neq 0)$ した行列の行列式は $\begin{vmatrix}ca_{11}&ca_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=c|A|$.

行基本変形 II によって第 1 行の c 倍を第 2 行に加えると $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}+ca_{11}&a_{22}+ca_{12}\end{vmatrix}$
$=a_{11}(a_{22}+ca_{12})-a_{12}(a_{21}+ca_{11})=|A|$.

行基本変形 III によって第 1 行と第 2 行を入れ替えると $\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{11}&a_{12}\end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}=-|A|$.

どの場合も行列式が 0 であるか否かは，行基本変形によって変わらない．

3.7 (1) $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ とすると，仮定より $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$．この等式について，$a_{12}=a_{22}=0$, $a_{12}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$ の 3 通りに場合分けして考える．$a_{12}=a_{22}=0$ の

ときはただちに $|A|=0$ でり，$\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$ となる．$a_{12}\neq 0$ のときは $c=a_{11}/a_{12}$ とおくと $a_{11}=ca_{12}$, $|A|=0$ より $a_{21}=ca_{22}$ なので $\boldsymbol{\alpha}_1=c\boldsymbol{\alpha}_2$ となる．$a_{22}\neq 0$ のときは $c=a_{21}/a_{22}$ とおくと $a_{21}=ca_{22}$, $|A|=0$ より $a_{11}=ca_{12}$ なので $\boldsymbol{\alpha}_1=c\boldsymbol{\alpha}_2$ となる．また特に $c=0$ のとき $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$ となる．

(2) $A\neq O$ なので (1) より ① $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$，② $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，③ $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}_1=c\boldsymbol{\alpha}_2$ $(c\neq 0)$ のどれかになる．①のときは $p=0$, $q=1$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_2$，②のときは $p=1$, $q=0$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1$，③のときは $p=c$, $q=1$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_2$ とすればよい．また逆に $A=\begin{bmatrix}p\boldsymbol{\alpha} & q\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}$ ならば $A\neq O$, $|A|=0$ は明らか.

3.8 定理 3.4 の条件でない場合であるから

- A の階数が 2 未満である
- $|A|=0$ である
- A が正則でない，すなわち A に逆行列が存在しない
- 列ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ が $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$ か $\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$ か $\boldsymbol{\alpha}_1=c\boldsymbol{\alpha}_2$ である

のいずれかが成立すればよい．なお，定理 3.4 の 4 つの条件が等価なので，上の条件もお互い等価である.

3.9 $|{}^tA|=|A|$ より A の第 1, 2 行ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ とすると $\boldsymbol{\beta}_1\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\beta}_2\neq\mathbf{0}$ かつ $\boldsymbol{\beta}_1\neq c\boldsymbol{\beta}_2$.

3.10 (1) $A^n=\begin{bmatrix}1/2^n & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ なので $x_n=x_0/2^n$, $y_n=y_0$.

(2) A による線形変換は角 θ の回転とみなせるので $A^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$. したがって $x_n=x_0\cos n\theta-y_0\sin n\theta$, $y_n=x_0\sin n\theta+y_0\cos n\theta$.

3.11 (1) $\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-2=0$ より $\lambda=-2,\ 1$.

(2) $\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=0$ より $\lambda=1\pm i$.

(3) $\begin{vmatrix}1-\lambda & -i\\ i & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda=0$ より $\lambda=0,\ 2$.

3.12 (1) $\lambda=-2$ の場合: $\begin{bmatrix}4 & -1\\ 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x-y\\ 4x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$

$\lambda=1$ の場合: $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-y\\ 4(x-y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

(2) $\lambda=1\pm i$ に対して $\begin{bmatrix}\mp i & -1\\ 1 & \mp i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mp i(x\mp iy)\\ x\mp iy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}\pm i\\ 1\end{bmatrix}$ (複号同順)

(3) $\lambda=0$ の場合: $\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-iy\\ i(x-iy)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda=2$ の場合: $\begin{bmatrix}-1 & -i\\ i & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(x+iy)\\ i(x+iy)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}$

注：固有ベクトルには定数倍の不定性があり，どれでも正解．他の問題も同様.

3.13 (3.8) より $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$. したがって $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_0 + 2y_0 \\ -x_0 - y_0 \end{bmatrix}$.
ゆえに

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= (3x_0 + 2y_0)\left(\frac{3}{5}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - (x_0 + y_0)\left(\frac{4}{5}\right)^n \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \{(3x_0 + 2y_0)3^n - 2(x_0 + y_0)4^n\}/5^n \\ -(3x_0 + 2y_0)3^n + 3(x_0 + y_0)4^n\}/5^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

答. $x_n = \dfrac{1}{5^n}\{(3x_0 + 2y_0)3^n - 2(x_0 + y_0)4^n\}, \quad y_n = \dfrac{1}{5^n}\{-(3x_0 + 2y_0)3^n + 3(x_0 + y_0)4^n\}$

3.14 (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ とする．$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ より $\lambda = 2,\ 3$.

$\lambda = 2$ のとき $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x-y) \\ -2(x-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 3$ のとき $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+y \\ -2x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ なので $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ とすると $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ より
$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. したがって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= A^n(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2) = \alpha 2^n \boldsymbol{x}_1 + \beta 3^n \boldsymbol{x}_2 \\ &= 3 \cdot 2^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n - 3^n \\ 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

答. $x_n = 3 \cdot 2^n - 3^n, \quad y_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$

(2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ とする．$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$ より $\lambda = \pm i$.

$\lambda = i$ のとき $\begin{bmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1+i)(x-(1-i)y) \\ -(x-(1-i)y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$.

同様に $\lambda = -i$ のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix}$.

ゆえに

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= \frac{1+i}{2} i^n \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1-i}{2}(-i)^n \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^n + (-i)^n \\ \dfrac{1+i}{2} i^n + \dfrac{1-i}{2}(-i)^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{in\pi/2} + e^{-in\pi/2} \\ \dfrac{1+i}{2} e^{in\pi/2} + \dfrac{1-i}{2} e^{-in\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\dfrac{n}{2}\pi \\ \cos\dfrac{n}{2}\pi - \sin\dfrac{n}{2}\pi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

答. $x_n = 2\cos\dfrac{n}{2}\pi, \quad y_n = \cos\dfrac{n}{2}\pi - \sin\dfrac{n}{2}\pi$

3.15 問題 3.14 解答の固有値と固有ベクトルを利用する．

(1) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n - 3^n \\ 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{bmatrix}$$

(2) $P = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1-i \\ -i & 1+i \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^n & 0 \\ 0 & (-i)^n \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1-i \\ -i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i^n + (-i)^n \\ \dfrac{1+i}{2} i^n + \dfrac{1-i}{2}(-i)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\dfrac{n}{2}\pi \\ \cos\dfrac{n}{2}\pi - \sin\dfrac{n}{2}\pi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.16 (1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ より $\lambda = \pm\sqrt{2} - 1$.

$\lambda = \sqrt{2} - 1$ のとき $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}(x - \sqrt{2}y) \\ x - \sqrt{2}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

同様に $\lambda = -\sqrt{2} - 1$ のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$.

したがって $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. また $P^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$ であり，

$$\begin{aligned} A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}-1 \end{bmatrix}^n \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2}(\alpha^n + \beta^n) & 2(\alpha^n - \beta^n) \\ \alpha^n - \beta^n & \sqrt{2}(\alpha^n + \beta^n) \end{bmatrix} \quad (\alpha = \sqrt{2} - 1,\ \beta = -\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

(2) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ より $\lambda = 1, 5$.

$\lambda = 1$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

同様に $\lambda = 5$ のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

したがって $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. また $P^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ であり，

$$A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^n \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5^n + 3 & 3(5^n - 1) \\ 5^n - 1 & 3 \cdot 5^n + 1 \end{bmatrix}.$$

注：固有ベクトルに定数倍の不定性があり，さらにその固有ベクトルをどの順で列ベクトルとして並べるかによって P が変わるが，どれでも正解．他の問題も同様．

3.17 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ を数学的帰納法により示す．まず，$n=1$ のとき与式は成り立つ．さらに $n=k$ のとき与式が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のとき

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{bmatrix}$$

となる．

3.18 (1) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ より $\lambda = 3$ (重根).

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 種類.

$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ とすると $\begin{bmatrix} x-y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. これより

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -i-\lambda & 2 \\ 1 & i-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$ より $\lambda = \pm 1$.

$\lambda = -1$ のとき $\begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i)(x+(1+i)y) \\ x+(1+i)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}$. 同様にして $\lambda = 1$ のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$. これより

$$P = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & i \\ 4i & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$ より $\lambda = 5$ (重根).

$\begin{bmatrix} 2 & i \\ 4i & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+iy \\ 2i(2x+iy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ の 1 種類.

$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ とすると $\begin{bmatrix} 2x+iy \\ 2i(2x+iy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$. これより

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -i/2 \\ 2 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & i \\ 4i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

注：問題 3.16 の注にあるように P には一定の自由度があり，上の (2) でも P によって対角に並ぶ固有値の順序が変わり得るが，どれでも正解．他の問題も同様.

3.19 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ より $\lambda = 4$ (重根).

固有ベクトルは $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x-2y) \\ -(x-2y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 種類.

そこで $(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ すなわち $\begin{bmatrix} -2(x-2y) \\ -(x-2y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ となる.

ゆえに

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & n \cdot 4^{n-1} \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4^n + 6n \cdot 4^{n-1} \\ 2 \cdot 4^n + 3n \cdot 4^{n-1} \end{bmatrix}.$$

3.20 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. ゆえに $A = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} P^{-1} = P(\lambda E)P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda E$.

3.21 (1) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0$ より $\lambda = 0,\ 2$.

$\lambda = 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 2$ のとき同様に $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

確かに $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となり $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交する.

(2) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0$ より $\lambda = 0,\ 5$.

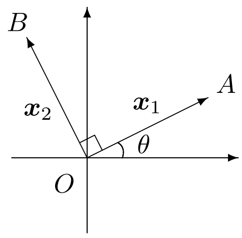
$\lambda = 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ -2(x-2y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 5$ のとき同様に $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

確かに $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となり $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交する.

3.22 P の列ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を図のように平面上の点 A, B の位置ベクトルと考える. まず $|\boldsymbol{x}_1| = 1$ なので OA が x 軸となす角を θ とすると $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ となる. 一方 $|\boldsymbol{x}_2| = 1$, $\boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{x}_2$ なので点 B は点 A を $\pm\pi/2$ だけ回転して得られる. ゆえに

$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/2) & -\sin(\pm\pi/2) \\ \sin(\pm\pi/2) & \cos(\pm\pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mp\sin\theta \\ \pm\cos\theta \end{bmatrix}$.



3.23 ${}^t(PQ)PQ = {}^tQ({}^tPP)Q = {}^tQQ = E$ より明らか.

3.24 問題 3.21 の固有値・固有ベクトルを利用する.

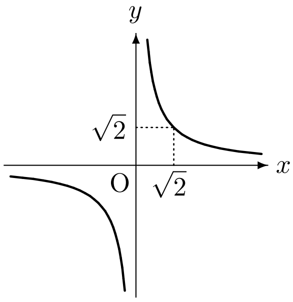
(1) $\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{\boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. ゆえに $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ となり

$$ {}^tPAP = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. $$

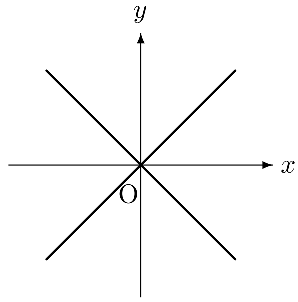
(2) $\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. ゆえに $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ となり

$$ {}^tPAP = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}. $$

3.25 (1) $2xy = 4$ すなわち $xy = 2$.　答. 双曲線
(2) $x^2 - y^2 = 0$. ゆえに $x = \pm y$.　答. 2 直線



(1)



(2)

3.26 たとえば $x^2 = 1$ とすると $x = \pm 1$ となって平行 2 直線が得られる．このとき $a = 1,\ f = -1$, それ以外 0．その他に $(2x - y)^2 = 4$ ならば $y = 2x \pm 2$ となってやはり得られる．このとき $4x^2 - 4xy + y^2 - 4 = 0$ なので $a = 4,\ b = -2,\ c = 1,\ f = -4$, それ以外 0.

3.27 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ とすると P.67 の対角化より ${}^tPAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ となる．もし $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ならば ${}^tPAP = O$ より $A = PO{}^tP = O$ となる．これは $a \sim c$ のすべてが 0 になることはないという条件に反する．したがって $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ にはならない.

(1) (3.21) は $\lambda_1\Bigl(s + \dfrac{d'}{\lambda_1}\Bigr)^2 + \lambda_2\Bigl(t + \dfrac{e'}{\lambda_2}\Bigr)^2 = \underbrace{\dfrac{d'^2}{\lambda_1} + \dfrac{e'^2}{\lambda_2} - f}_{r}$ と書き換えられる.

- $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ r > 0$ か $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ r < 0$ のとき楕円.
- $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ r = 0$ か $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ r = 0$ のとき一点 $\Bigl(-\dfrac{d'}{\lambda_1}, -\dfrac{e'}{\lambda_2}\Bigr)$.
- $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ r < 0$ か $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ r > 0$ のとき 点なし.
- $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ r \neq 0$ か $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ r \neq 0$ のとき双曲線.

・$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ r = 0$ か $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ r = 0$ のとき交わる2直線.

(2) ・$d' \neq 0$ のとき (3.21) は $s = -\dfrac{\lambda_2}{2d'}\Big(t + \dfrac{e'}{\lambda_2}\Big)^2 + \dfrac{1}{2d'}\Big(\dfrac{e'^2}{\lambda_2} - f\Big)$ と書き換えられる．したがって放物線.

・$d' = 0$ のとき (3.21) は $\lambda_2\Big(t + \dfrac{e'}{\lambda_2}\Big)^2 = \underbrace{\dfrac{e'^2}{\lambda_2} - f}_{r}$ と書き換えられる.

$\lambda_2 > 0,\ r > 0$ あるいは $\lambda_2 < 0,\ r < 0$ のとき平行2直線.
$\lambda_2 > 0,\ r < 0$ あるいは $\lambda_2 < 0,\ r > 0$ のとき点なし.
$r = 0$ のとき1直線.

(3) (2) と同様にして $r = \dfrac{d'^2}{\lambda_1} - f$ とすると

・$e' \neq 0$ のとき放物線.

・$e' = 0$ のとき
$\lambda_1 > 0,\ r > 0$ か $\lambda_1 < 0,\ r < 0$ のとき平行2直線.
$\lambda_1 > 0,\ r < 0$ か $\lambda_1 < 0,\ r > 0$ のとき点なし.
$r = 0$ のとき1直線.

3.28 (1) $[x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0$ より $\lambda = 0,\ 2$.

単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. そこで

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{bmatrix}$$

とし，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ とすると，

$$[s\ t]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} + \sqrt{2}\,[2\ 0]\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = 2t^2 + 2\sqrt{2}s = 0$$

が得られる．したがって元の方程式が表す図形は，原点を中心に放物線 $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}y^2$ を $\dfrac{\pi}{4}$ だけ右回りに回転したものとなる.

(2) $[x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8\,[\sqrt{3}\ 1]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 64 = 0$ より $\lambda = 4,\ 16$.

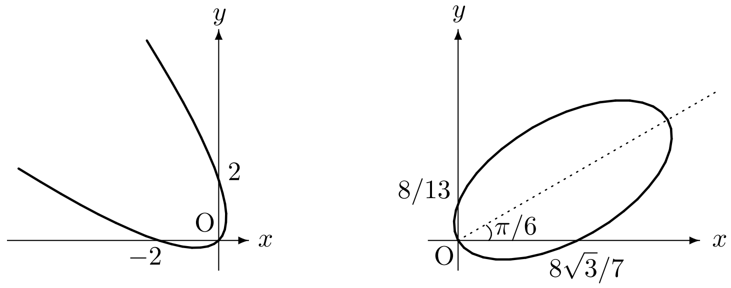
単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$. そこで

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6)\\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6)\end{bmatrix}$$

とし，$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}$ とすると，

$$\begin{bmatrix}s & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix}4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix} = 4s^2 + 16t^2 - 16s = 0$$

が得られる．したがって元の方程式が表す図形は，原点を中心に楕円 $\dfrac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ を $\pi/6$ だけ左回りに回転したものとなる．



(1) (2)

3章演習問題解答

3.1 (1) $\begin{cases} 2x-3y=-2 \\ \quad 7y=7 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x=1/2 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=0 \\ \quad 0=0 \end{cases} \quad \to \quad t$ を任意の数として $\begin{cases} x=t \\ y=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,t \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (1+i)x-(1-i)y=1 \\ \quad 0=2i \end{cases} \quad \to$ 解なし

3.2 (1) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix}$ 階数 2

(2) 以下では m, n を任意の整数とする．

・$\theta=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ のとき $\begin{bmatrix} 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{bmatrix}$ 階数 2

・$\theta\neq\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ のとき $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \cos2\theta/\cos\theta \end{bmatrix}$

ゆえに $\theta=\dfrac{1}{2}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ のとき階数 1, それ以外のとき 2.

以上をまとめて $\theta=\dfrac{2n+1}{4}$ のとき階数 1, それ以外のとき 2.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^3 & a^5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & a^2(a-1) & a^3(a^2-1) \end{bmatrix}$

ゆえに $a=0,\,1$ のとき階数 1, それ以外のとき 2.

3.3 (1) 行列式 -2, 逆行列 $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

(2) 行列式 a^3-1, $\quad a^3-1=0$ すなわち $a=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ のとき逆行列なし, それ以外の場合 $\dfrac{1}{a^3-1}\begin{bmatrix} a^2 & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$.

(3) 行列式 1, 逆行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta+i\cos\theta & \cos\theta+i\sin\theta \end{bmatrix}$.

3.4 (1) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2=0$ より $\lambda=\pm\sqrt{2}$.

$\lambda=\sqrt{2}$ のとき

$$\begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -2-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (2-\sqrt{2})(x-(1+\sqrt{2}/2)y) \\ 2(x-(1+\sqrt{2}/2)y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$. 同様に $\lambda=-\sqrt{2}$ のとき $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$.

したがって $P=\begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (対角化).

(2) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ より $\lambda = 1$ (重根).

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+y) \\ -2(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ の 1 種類. そこで $(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ すなわち

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+y) \\ -2(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$. したがって $P = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (三角化).

(3) $\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1 = 0$ より $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$.
$\lambda = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき

$$\begin{bmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sin\theta(x-iy) \\ \sin\theta(x-iy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$. 同様に $\lambda = \cos\theta - i\sin\theta$ のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

したがって $P = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (対角化).

3.5 (1) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ より $\lambda = 1, 5$.

対応する固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. したがって

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \cdot 5^n - 1)/2 \\ (3 \cdot 5^n + 1)/4 \end{bmatrix}.$$

(2) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$ より $\lambda = \pm 2i$.

対応する固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2(1+i) \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2(1-i) \\ -1 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 2(1+i) & 2(1-i) \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -i & -2(1+i) \\ i & -2(1-i) \end{bmatrix}$. したがって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(1+i) & 2(1-i) \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2i)^n & 0 \\ 0 & (-2i)^n \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -i & -2(1+i) \\ i & -2(1-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(1-5i)(2i)^n + 2(1+5i)(-2i)^n \\ (2+3i)(2i)^n + (2-3i)(-2i)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n(\cos\frac{n}{2}\pi + 5\sin\frac{n}{2}\pi) \\ 2^n(\cos\frac{n}{2}\pi - \frac{3}{2}\sin\frac{n}{2}\pi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(3) $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ より $\lambda = 3$ (重根).

対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ の 1 種類だけ.

$(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ であり $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. したがって

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n + 2n \cdot 3^{n-1} \\ 3^n - 2n \cdot 3^{n-1} \end{bmatrix}.$$

3.6 (1) 第 1 式より $y_n = -\dfrac{5}{2}x_{n+1} + \dfrac{1}{2}x_n$ となり，これを第 2 式に代入して

$$-\frac{5}{2}x_{n+2} + \frac{1}{2}x_{n+1} = \frac{3}{5}x_n + \frac{6}{5}\Big(-\frac{5}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n\Big).$$

ゆえに $x_{n+2} - \dfrac{7}{5}x_{n+1} + \dfrac{12}{25}x_n = 0$.　ア $-\dfrac{7}{5}$, イ $\dfrac{12}{25}$

(2) $x_{n+2} - \alpha x_{n+1} = \beta(x_{n+1} - \alpha x_n)$ とすると

$$x_{n+2} - (\alpha + \beta)x_{n+1} + \alpha\beta x_n = 0.$$

(1) より $\alpha + \beta = \dfrac{7}{5}$, $\alpha\beta = \dfrac{12}{25}$ となり $\alpha, \beta = \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}$.

$$x_{n+2} - \frac{3}{5}x_{n+1} = \frac{4}{5}\Big(x_{n+1} - \frac{3}{5}x_n\Big)$$

より $x_{n+1} - \dfrac{3}{5}x_n = \Big(\dfrac{4}{5}\Big)^n\Big(x_1 - \dfrac{3}{5}x_0\Big)$.

$$x_{n+1} - \gamma\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} = \frac{3}{5}\Big(x_n - \gamma\Big(\frac{4}{5}\Big)^n\Big)$$

とおくと $\gamma = 5x_1 - 3x_0$. したがって

$$\begin{aligned} x_n &= \Big(\frac{3}{5}\Big)^n(x_0 - (5x_1 - 3x_0)) + (5x_1 - 3x_0)\Big(\frac{4}{5}\Big)^n \\ &= (4x_0 - 5x_1)\Big(\frac{3}{5}\Big)^n + (5x_1 - 3x_0)\Big(\frac{4}{5}\Big)^n. \end{aligned}$$

$x_1 = \dfrac{1}{5}(x_0 - 2y_0)$ より $x_n = (3x_0 + 2y_0)\Big(\dfrac{3}{5}\Big)^n - 2(x_0 + y_0)\Big(\dfrac{4}{5}\Big)^n$.

(3) $y_n = -\dfrac{5}{2}x_{n+1} + \dfrac{1}{2}x_n = -(3x_0 + 2y_0)\Big(\dfrac{3}{5}\Big)^n + 3(x_0 + y_0)\Big(\dfrac{4}{5}\Big)^n$

3.7 (1) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ より $\lambda = -1, -2$. 対応する固有ベクトルはそれぞれ

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. したがって $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ より $x = X + 2Y$, $y = X + 3Y$. ゆえに $\dot{x} = \dot{X} + 2\dot{Y}$, $\dot{y} = \dot{X} + 3\dot{Y}$.

したがって $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix}$. ゆえに (1) より $P \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = AP \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$.

両辺に P^{-1} を左からかけて $\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = P^{-1}AP \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$.

(3) ②より $\dot{X} = -X$, $\dot{Y} = -2Y$. したがって $X(t) = Ae^{-t}$, $Y(t) = Be^{-2t}$（A, B は任意定数）. $x = X + 2Y = Ae^{-t} + 2Be^{-2t}$, $y = X + 3Y = Ae^{-t} + 3Be^{-2t}$.

(4) $x(0) = A + 2B = 1$, $y(0) = A + 3B = 2$. これを A, B について解いて $A = -1$, $B = 1$.
ゆえに $x = -e^{-t} + 2e^{-2t}$, $y = -e^{-t} + 3e^{-2t}$.

3.8 $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. $\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ より $\lambda = -4$ (重根).

対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 種類. $(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = P^{-1}AP \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4X + Y \\ -4Y \end{bmatrix}.$$

$\dot{Y} = -4Y$ より $Y = Be^{-4t}$. $\dot{X} = -4X + Be^{-4t}$ より $X = (A + Bt)e^{-4t}$. ゆえに

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A + Bt)e^{-4t} \\ Be^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B + Bt)e^{-4t} \\ (A + Bt)e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

$x(0) = A + B = 2$, $y(0) = A = -1$ より $B = 3$.
答. $x = (2 + 3t)e^{-4t}$, $y = (-1 + 3t)e^{-4t}$

3.9 (1) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ より $\lambda = -1, 3$. 対応する単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 答. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ より $\lambda = -1, 4$. 対応する単位固有ベクトルはそれぞれ
$\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. 答. $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5 = 0$ より $\lambda = \pm\sqrt{5}$. 対応する単位固有ベクトルはそれぞれ
$\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} + 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} - 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

答. $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \dfrac{-2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \sqrt{5+\sqrt{5}} & \sqrt{5-\sqrt{5}} \\ \sqrt{5-\sqrt{5}} & -\sqrt{5+\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

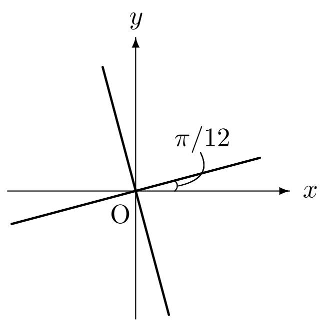
3.10 (1) $[x\ y] \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$ $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$ より $\lambda = \pm 2.$

対応する単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ とすると $[s\ t] \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = 0$ となり，$-2s^2 + 2t^2 = 0.$

したがって元の方程式が表す図形は，原点を中心に，交わる 2 直線 $y = \pm x$ を $\pi/3$ だけ左に回転したものとなる．



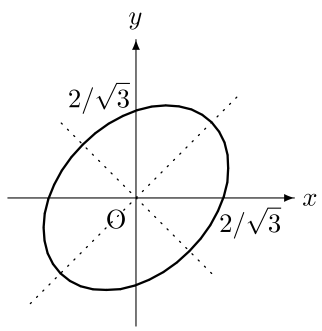
(2) $[x\ y] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 4 = 0.$ $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ より $\lambda = 2,\ 4.$

対応する単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ とすると $[s\ t] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} - 4 = 0$ となり，$2s^2 + 4t^2 = 4.$

したがって元の方程式が表す図形は，原点を中心に楕円 $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ を $\pi/4$ だけ左に回転したものとなる．



(3) $[x\ y]\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+[3\ 3]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+4=0.$ $\quad\begin{vmatrix}1-\lambda & 1/2\\ 1/2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+\dfrac{3}{4}=0$ より

$\lambda=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$. 対応する単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$.

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4)\\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4)\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}$ とすると

$$[s\ t]\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 3/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}[0\ 6]\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}+4=0$$

となり，$\dfrac{s^2}{2}+\dfrac{3}{2}t^2+3\sqrt{2}t+4=0$. ゆえに $s^2+3(t+\sqrt{2})^2=-2$ となり，点なし.

(4) $[x\ \ y]\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}-2\sqrt{5}\,[2\ \ 1]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0.$ $\quad\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-25=0$ より

$\lambda=\pm 5$. 対応する単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$.

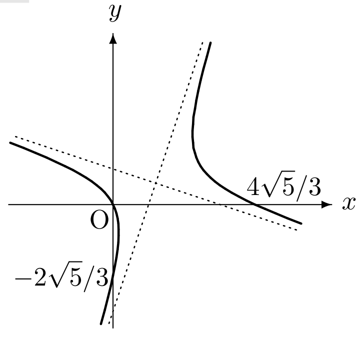
$$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\qquad(\theta=-\arctan 2)$$

$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}$ とすると

$$[s\ t]\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}-2[0\ 5]\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}=0$$

となり，$-5s^2+5t^2-10t=0$.

したがって元の方程式が表す図形は，原点を中心に双曲線 $x^2-(y-1)^2=-1$ を $\arctan 2$ だけ右に回転したものとなる.



3.11 (1) $\begin{bmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & d^2+bc\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a^2+ad & ab+bd\\ ac+cd & d^2+ad\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & r\end{bmatrix}=O$ より $r=ad-bc=|A|$.

(2) $|A^n|=|A|^n=0$ より $|A|=0$. したがって (1) より $A^2=(a+d)A$ ①.
ゆえに $A^n=(a+d)A^{n-1}=(a+d)^2A^{n-2}=\cdots=(a+d)^{n-1}A=O$.
最後の等式より $a+d=0$ か $A=O$. ゆえに①より $A^2=O$.

3.12 A が正則なので

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ -b_1 a_{21} + b_2 a_{11} \end{bmatrix}.$$

したがって公式が成立する．