4 章問題解答

4.1 (1) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

答. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

(2) 与式 $\to \begin{bmatrix} 2 & i & -1 & 5 \\ 1+i & 1 & 1 & 1+2i \\ 0 & -2 & 2i & -2i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & i & -1 & 5 \\ 1+i & 1 & 1 & 1+2i \\ 0 & 1 & -i & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & i & -1 & 5 \\ 1+i & 0 & 1+i & 1+i \\ 0 & 1 & -i & i \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 2 & i & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & i & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i & i \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

答. $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$

(3) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ゆえに $\begin{cases} x_1 - 3x_3 - 7x_4 = -2 \\ x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$

答. s, t を任意の数として $x_1 = 3s + 7t - 2,\ x_2 = -s - 5t + 1,\ x_3 = s,\ x_4 = t$

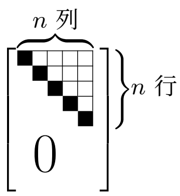
(4) 与式 $\to \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 答. 解なし

4.2 (1) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 階数 3

(2) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 階数 3

(3) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & -2n+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 階数 2（ただし $n \geqq 2$）

4.3
行数が m なので $r \leqq m$ は明らか．したがって $m \leqq n$ ならば $r \leqq n$．一方，$n < m$ のとき，階段行列に変形して最も階数が大きい場合は図のように $r = n$ となる場合．よってやはり $r \leqq n$．



4.4 (1) 与式 $\to \begin{cases} 5y + 5z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = y + 2z \\ y = -z \end{cases}$

答. t を任意の数として $x = t,\ y = -t,\ z = t$

(2) 与式 $\to \begin{cases} x - y - 4z + u = 0 \\ 3y + 13z - 5u = 0 \\ 3y + 5z - 4u = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x - y - 4z + u = 0 \\ 3y + 13z - 5u = 0 \\ -8z + u = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = y + 4z - u \\ y = (-13z + 5u)/3 \\ z = u/8 \end{cases}$

答. t を任意の数として $x = 5t,\ y = 9t,\ z = t,\ u = 8t$

4.5 たとえば $\boldsymbol{a}_1=\mathbf{0}$ の場合，$c_1\neq 0, c_2=c_3=\cdots=c_r=0$ とすれば $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\mathbf{0}$ が成立するので線形従属になる．また $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2$ の場合，$c_1=-c_2\neq 0, c_3=c_4=\cdots=c_r=0$ とすると同様に線形従属であることがわかる．

4.6 (1) $c_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ より，$\begin{cases}c_1+2c_2-c_3=0\\ \quad c_2-2c_3=0\\ -c_1+c_2=0\end{cases}\to\begin{cases}c_1+3c_3=0\\ c_2-2c_3=0\\ 3c_2-c_3=0\end{cases}$

$\to\begin{cases}c_1+3c_3=0\\ c_2-2c_3=0\\ 5c_3=0\end{cases}\to c_1=c_2=c_3=0$ 答．線形独立

(2) $c_1\begin{bmatrix}1 & i & -i\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2i & 1 & 1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1+i\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ より

$$\begin{cases}c_1+2ic_2-c_3-2c_4=0\\ ic_1+c_2+2c_3+c_4=0\\ -ic_1+c_2+(1+i)c_3+3c_4=0\end{cases}$$

となる．すると定理 4.3 より $c_1\sim c_4$ に非自明解が存在する．答．線形従属

(3) $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\mathbf{0}$ とすると

$$c_1=0,\quad c_1+c_2=0,\quad c_1+c_2+c_3=0,\quad\cdots,\quad c_1+c_2+\cdots+c_n=0$$

となり，$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ が導かれる．答．線形独立

4.7 (a) 最初の 1 個だけ:
$x+2y-3z=-3$ より，s,t を任意の数として $x=-2s+3t, y=s, z=t$ と表される無限個の解が存在する．$A'=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -3\end{bmatrix}$ より $\operatorname{rank}A'=1, \operatorname{rank}A=1, n=3$ であり定理 4.4 の (ii) の場合にあてはまる．

(b) 最初から 2 個の連立:
$A'=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -3\\ -1 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ より t を任意の数として $x=t-3, y=t, z=t$ と表される無限個の解が存在する．$\operatorname{rank}A'=\operatorname{rank}A=2, n=3$ であり (ii) の場合にあてはまる．

(c) 最初から 3 個の連立:
$A'=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -3\\ -1 & -1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 1 & -6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -7 & 10 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to$
$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ より $x=-2, y=z=1$ の一意解が存在する．
$\operatorname{rank}A'=\operatorname{rank}A=3, n=3$ であり (iii) の場合にあてはまる．

(d) 最初から 4 個の連立:
$$A'=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -3\\ -1 & -1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 1 & -6\\ 2 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -7 & 10 & 3\\ 0 & -1 & 8 & 7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 7 & 7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ より $x=-2$, $y=z=1$ の一意解が存在する．

$\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A = 3$, $n=3$ であり (iii) の場合にあてはまる．

(e) 最初から 5 個の連立:

$$A' = \begin{bmatrix}1&2&-3&-3\\-1&-1&2&3\\3&-1&1&-6\\2&3&2&1\\2&1&-5&3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&-3&-3\\0&1&-1&0\\0&-7&10&3\\0&-1&8&7\\0&-3&1&9\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&-3&-3\\0&1&-1&0\\0&0&3&3\\0&0&7&7\\0&0&-2&9\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&-3&-3\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&-2&9\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&11\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ より解なし．$\operatorname{rank} A' = 4$, $\operatorname{rank} A = 3$ であり (i) の場合にあてはまる．

4.8 (1) $$\begin{bmatrix}1&2&1&0\\-1&1&-2&0\\2&1&1&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&3&-1&0\\0&-3&-1&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&3&-1&0\\0&0&-2&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&3&-1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$ より $x=y=z=0$ の一意解．$\operatorname{rank} A = 3$, $n=3$ で定理 4.5 の (i) の場合にあてはまる．

(2) $$\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\2&0&1&0\\-1&1&-2&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&0\\0&-2&3&0\\0&2&-3&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&0\\0&-2&3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&0\\0&1&-3/2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1&0&1/2&0\\0&1&-3/2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ より t を任意の数として $x=-\dfrac{t}{2}$, $y=\dfrac{3}{2}t$, $z=t$ と表される無限個の解が存在する．$\operatorname{rank} A = 2$, $n=3$ で定理 4.5 の (ii) の場合にあてはまる．

4.9 (1) $$PA = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&b&c\\2d&2e&2f\\g&h&i\end{bmatrix},$$

$$QA = \begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a-2g&b-2h&c-2i\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix},$$

$$RA = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d&e&f\\a&b&c\\g&h&i\end{bmatrix}.$$

(2) $$RQP = \begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&-2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$RQPA$ によって得られる行列の第 1 行は A の第 2 行の 2 倍であり，第 2 行は A の (第 1 行 − 第 3 行 × 2) であり，第 3 行は A の第 3 行と同じである．

(3) $P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad Q^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$R^n =$ R (n が奇数), E (n が偶数).

4.10 省略.

4.11 (1) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

答. 逆行列なし

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 6 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -6 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -5 \\ 6 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

答. 逆行列なし

4.12 逆行列を作る課程を並べる．ただしそのための行基本変形はひと通りではない．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{を第 2 行に}]{\substack{\text{第 2 行} \\ -\text{第 1 行}\times 2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行}\times 1/3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を第 1 行に}]{\text{第 1 行+第 2 行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{したがって} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A = E.$$

答. たとえば $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \left(= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right)$

4.13 (1) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

(2) A^{-1}: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ゆえに $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

同様に $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

(3) $(AB)^{-1}$: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. よって $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

一方，$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = (AB)^{-1}$.

4章演習問題解答

4.1 (1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 3 & -4 \\ 5 & -5 & -4 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

答. $x = 2, y = -1, z = 2$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i & 2 & 1+2i \\ 2 & 1 & -i & 2+i & 2-i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i & 2 & 1+2i \\ 0 & 1+2i & -2+i & -2+i & -5i \end{bmatrix}$
$\to \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i & 2 & 1+2i \\ 0 & 1 & i & i & -2-i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i & 1 & 2 \\ 0 & 1 & i & i & -2-i \end{bmatrix}$

答. s, t を任意の数として $x = is - t + 2,\ y = -is - it - 2 - i,\ z = s,\ u = t$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & -5 & 21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 答. $x = 2, y = 2, z = -1$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 10 & -2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 答. 解なし

4.2 (1) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 答. 3

(2) 与式 $\to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 答. 3

(3) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 答. 2 （ただし $n \geqq 2$）

(4) 与式 $\to \begin{bmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ ①

(i) $a+b+c=0$ のとき $a=-b-c$ より ① $\to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & -b-c & b \\ b & c & -b-c \end{bmatrix}$ ②

(i–1) $c \neq 0$ のとき ② $\to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & -b-c & b \\ 0 & \frac{1}{c}(b^2+bc+c^2) & -\frac{1}{c}(b^2+bc+c^2) \end{bmatrix}$

$b^2+bc+c^2 = \left(b+\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}c^2 > 0$ より 2 階

(i–2) $c=0$ のとき ② $\to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & b \\ b & 0 & -b \end{bmatrix} \to \begin{cases} 2\text{ 階} & (b \neq 0) \\ 0\text{ 階} & (b=0) \end{cases}$

(ii) $a+b+c \neq 0$ のとき ① $\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & c-b & a-b \end{bmatrix}$ ③

(ii–1) $a \neq c$ のとき ③ $\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & 0 & \dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(a-c)} \end{bmatrix} \to 3$ 階

(ii–2) $a=c$ のとき ③ $\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-c \\ 0 & c-b & c-b \end{bmatrix} \to \begin{cases} 3\text{ 階} & (b \neq c) \\ 1\text{ 階} & (b=c) \end{cases}$

答. $a+b+c=0$ のとき：$a=b=c=0$ なら 0 階，それ以外なら 2 階
$a+b+c \neq 0$ のとき：$a=b=c$ なら 1 階，それ以外なら 3 階

4.3 $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$ を書き換えると $A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$ となる．これを $c_1 \sim c_n$ に関する連立一次方程式とみなすと，一意解が存在するための必要十分条件は定理 4.5 より $\operatorname{rank} A = n$ であり，このとき $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ が一意解となる．

4.4 (1) 演習問題 4.3 より行列 A を $\begin{bmatrix} i & 1+i & 1+i \\ 1 & i & 2-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$ とし，A の階数を調べる．

$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1-i \\ 0 & -1+2i & 1 \\ 0 & -2i & -1-i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1-i \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & -2i & -1-i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1-i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -3-i \end{bmatrix}$ より

$\operatorname{rank} A = 3$. 答. 線形独立

(2) (1) と同様に $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\operatorname{rank} A = 2 < 3$. 答. 線形従属

(3) $\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{bmatrix}}_{A} \to \begin{bmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&b^2-a^2&c^2-a^2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&0&(c-b)(c-a)\end{bmatrix}$

$a=b$ か $b=c$ か $c=a$ なら $\operatorname{rank}A<3$, $a\neq b$ かつ $b\neq c$ かつ $c\neq a$ なら $\operatorname{rank}A=3$.

答. a, b, c が互いにすべて異なるなら線形独立，そうでなければ線形従属

4.5 (1) $\begin{bmatrix}1&1&-1&1&0&0\\5&-2&4&0&1&0\\-3&1&-2&0&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&1&0&0\\0&-7&9&-5&1&0\\0&4&-5&3&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&1&0&0\\0&1&-1&1&1&2\\0&4&-5&3&0&1\end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix}1&1&-1&1&0&0\\0&1&-1&1&1&2\\0&0&1&1&4&7\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0&0&-1&-2\\0&1&0&2&5&9\\0&0&1&1&4&7\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}0&-1&-2\\2&5&9\\1&4&7\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}1&-1-i&i&1&0&0\\-1&1&1-i&0&1&0\\1+i&1-i&-2+i&0&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&-1-i&i&1&0&0\\0&-i&1&1&1&0\\0&1+i&-1&-1-i&0&1\end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix}1&0&-1+i&-i&0&1\\0&1&i&i&i&0\\0&1+i&-1&-1-i&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-1+i&-i&0&1\\0&1&i&i&i&0\\0&0&-i&-2i&1-i&1\end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix}1&0&0&2-3i&2&2+i\\0&1&0&-i&1&1\\0&0&1&2&1+i&i\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}2-3i&2&2+i\\-i&1&1\\2&1+i&i\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}1&a&0&0&1&0&0&0\\0&1&a&0&0&1&0&0\\0&0&1&a&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&a&0&0&1&0&0&0\\0&1&a&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&-a\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&a&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&-a&a^2\\0&0&1&0&0&0&1&-a\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&-a&a^2&-a^3\\0&1&0&0&0&1&-a&a^2\\0&0&1&0&0&0&1&-a\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}1&-a&a^2&-a^3\\0&1&-a&a^2\\0&0&1&-a\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

4.6 以下の Q はすべて n 次正方行列である.

I' : 第 i 列を c $(\neq 0)$ 倍するための行列

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} &&i&&\end{array} \\ i & \begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&c&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}\end{array}$$

II' : 第 i 列の c 倍を第 j 列に加えるための行列

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} &&i&j&&\end{array} \\ \begin{array}{c}\\ \\ i\\ j\\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&c&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}\end{array} \quad (i<j), \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} &&j&i&&\end{array} \\ \begin{array}{c}\\ \\ j\\ i\\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&c&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}\end{array} \quad (i>j)$$

III$'$：第 i 列と第 j 列を入れ替えるための行列

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & & i & & j & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & & & & & \\
 & \ddots & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \\
\cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

4.7 (1) $P = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ とする．

左辺 $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+d-g & 2b+e-h & 2c+f-i \\ a+2d-g & b+2e-h & c+2f-i \\ a-d+2g & b-e+2h & c-f+2i \end{bmatrix}$,

右辺 $= \begin{bmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{bmatrix}$

各成分を比べて $\begin{cases} a+d-g=0, \ e-h=0, \ c-f+i=0 \\ a+d-g=0, \ b-h=0, \ c-f-i=0. \\ a-d+g=0, \ b-e=0, \ c-f-i=0 \end{cases}$

ゆえに $a=0$, $d=g$, $b=e=h$, $c=f$, $i=0$.

答. p, q, r を任意の数として $P = \begin{bmatrix} 0 & q & r \\ p & q & r \\ p & q & 0 \end{bmatrix}$

(2) P の逆行列を求める． $\begin{bmatrix} 0 & q & r & 1 & 0 & 0 \\ p & q & r & 0 & 1 & 0 \\ p & q & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & q & r & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ p & q & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & q & r & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & r & 0 & 1 & -1 \\ p & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & r & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

P^{-1} が存在するには $p \neq 0$, $q \neq 0$, $r \neq 0$. このとき $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/p & 1/p & 0 \\ 1/q & -1/q & 1/q \\ 0 & 1/r & -1/r \end{bmatrix}$.

(1) より $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. よって $(P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$.

$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots A(PP^{-1})AP = P^{-1}A^nP$.

ゆえに $A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2^n & 3^n-2^n & 2^n-3^n \\ 2^n-1 & 3^n-2^n+1 & 2^n-3^n \\ 2^n-1 & -2^n+1 & 2^n \end{bmatrix}$.

4.8 (1) $k=1$ のときは明らか． $k>1$ のとき $A^{k-1} \cdot A = E$. したがって $A^{-1} = A^{k-1}$ となり A^{-1} が存在するので正則.

(2) もし A が正則なら A^{-1} が存在する．すると,
$(A^{-k})A^k = (A^{-1}(\cdots(A^{-1}(A^{-1}A)A)\cdots)A) = E = O$ となり矛盾．ゆえに A は正則でない.

4.9 (1) <u>A_1 による写像の場合</u>

(a) x 軸上の任意の点は $(p,0,0)$ と表すことができる．$A_1\begin{bmatrix}p\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\-p\\p\end{bmatrix}$.

答. 直線 $x=-y=z$

(b) 平面 $x=c$ 上の点は (c,q,r) と表すことができる．$A_1\begin{bmatrix}c\\q\\r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c+q+r\\-c+q\\c-q+r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p'\\q'\\r'\end{bmatrix}$

とする．すると $p'-2q'-r'=2c$ となる． 答. 平面 $x-2y-z=2c$

(c) 平面 $z=c$ 上の点は (p,q,c) と表すことができる．$A_1\begin{bmatrix}p\\q\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p+q+c\\-p+q\\p-q+c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p'\\q'\\r'\end{bmatrix}$

とする．すると $r'=-q'+c$ となる． 答. 平面 $y+z=c$

<u>A_2 による写像の場合</u>

A_1 による場合と同様にして，(a) 直線 $2x=y=2z$, (b) 平面 $x-y+z=0$, (c) 平面 $x-y+z=0$. **注**：(b), (c) の平面は同じであり，(a) の直線もその平面上にある．

(2) 任意の点 $P'(p',q',r')$ に対して $\begin{bmatrix}p'\\q'\\r'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}$ ① を満たす $P(p,q,r)$ が存在するなら，写像によって得られた点全体が空間全部をおおう．

A が正則のときは $\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}p'\\q'\\r'\end{bmatrix}$ とできるので必ず P が存在する．一方 A が正則でないとき，①を満たす P が存在しないような P' が必ず存在する．その理由は以下の通り．まず，A が正則でないので $\operatorname{rank}A<3$ である．ゆえに $BA=\begin{bmatrix}* & * & *\\ * & * & *\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ となるような，行基本変形を表す 3 次正則行列 B が存在する (P.88, $*$ は適当な数)．このとき①を p, q, r に関する連立一次方程式とみなして拡大係数行列 $A'=\begin{bmatrix} & p'\\ A & q'\\ & r'\end{bmatrix}$ を考える．$\begin{bmatrix}p'\\q'\\r'\end{bmatrix}=B^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ を満たす p', q', r' を考えると，B による行基本変形により $BA'=\begin{bmatrix}* & * & * & 0\\ * & * & * & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ となる．したがってこの P' に対しては①を満たす P が存在しない．