5 章問題解答

5.1 (1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$.

(2) $\dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 1}{3} + \dfrac{1\cdot 3 + 3\cdot 1}{2} + \dfrac{2\cdot 3 + 3\cdot 2}{1} = \dfrac{49}{3}$.

(3) i_1 をある数に定めたとき $i_2 \sim i_n$ の与え方は $(n-1)!$ 通りある．したがって

$(n-1)! \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n} i_1 = \dfrac{(n+1)!}{2}$.

5.2 (1) -1 (2) 1 (3) -1 (4) -1

(5) 1 と n, 2 と $n-1$, $\cdots$ と互換を数えると全部で $\lfloor n/2 \rfloor$ 個ある．($\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す．) したがって与式の符号は $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$.（あるいは $n = 4m$ か $4m+1$ のとき 1, それ以外 -1.）

5.3 順列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ に対し，たとえば以下の互換を順に行えば，目的とする順列 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ は左の数から確定していく.

左から 1 番目の数と j_1 の互換 $\to$ 左から 2 番目の数と j_2 の互換 $\to \cdots$
$\to$ 左から $n-1$ 番目の数と j_{n-1} の互換

ただし k 回目の手順で左から k 番目の数と j_k が等しいときはその互換を行わない.

5.4 (1) $3 \cdot 1 - 2i \cdot i = 5$ (2) $1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) = 6$

(3) $1 \cdot 1 \cdot 1 + i \cdot i \cdot i + 2 \cdot 2 \cdot 2 - (1 \cdot i \cdot 2 + i \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot i) = 9 - 7i$

(4) $a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{34} = 0$ なので行列式の定義で残る項を並べると

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,2\,3\,4\end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,2\,4\end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}\\
&\quad + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,4\,2\,3\end{pmatrix} a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,4\,3\,2\end{pmatrix} a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}\\
=&6 - 2 - 8 - 2 = -6
\end{aligned}$$

(5) (4) と同様に $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,2\,4\end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,4\,2\end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} = -48 + 8 = -40$

5.5 (1) 和の一つの項あたり $n-1$ 回のかけ算を要する．全部で $n!$ 個の項があるので $(n-1) \cdot n!$ 回.

(2) $n = 2$ のとき 2 回, $n = 3$ のとき $2 \cdot 3! =$ 12 回, $n = 4$ のとき $3 \cdot 4! =$ 72 回.
n が大きいとき $\log_{10}(n-1) \cdot n! \sim \log_{10}(n-1) + n \log_{10} n - 0.43n \sim (n+1)\log_{10} n - 0.43n$.
したがって $n = 100$ のとき約 159 桁, $n = 1000$ のとき約 2573 桁.

5.6 まず，元の行列 A については $|A| = 9 + 2 + 4 + 2 - 12 + 3 = 8$.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 6 + 12 + 6 - 36 + 9 = 24 = 3\,|A|$

(2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -9+4+2-2-6+6+18-2+2+4-6-3 = 8 = |A|$

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3+12-2-4-2-9 = -8 = -|A|$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9+4+2+2-12+3 = 8 = |A|$

5.7 (i) $\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda|A|$ など.

(ii) $\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (b_{11}+c_{11})a_{22} - a_{12}(b_{21}+c_{21}) = (b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21}) + (c_{11}a_{22} - a_{12}c_{21}) =$
$\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ など.

(iii) $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -|A|$

(iv) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A|$

5.8 (1) 与式 $= \begin{vmatrix} 11 & 12 & 1 \\ 14 & 15 & 1 \\ 17 & 18 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 14 & 1 & 1 \\ 15 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 0 \\ 14 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

(2) 与式 $= \begin{vmatrix} 64 & 66 & 1 \\ 55 & 62 & 6 \\ 52 & 60 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 63 & 2 & 1 \\ 55 & 7 & 6 \\ 52 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 64 & 1 & 1 \\ 55 & 1 & 6 \\ 52 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & 1 & 5 \\ -12 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot(-12) - 1\cdot(-9)\cdot 6 = -6$

(3) 与式 $= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 \\ 0 & 0 & 1-a^4 & 0 \\ 0 & 1-a^4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}(1-a^4)^3 = (a^4-1)^3$

(4) 与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^3-a^3 \\ 1 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c^3-a^3) - (c-a)(b^3-a^3)$
$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

5.9 (1) 与式 $= |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_4| = |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4| = |A|$

(2) 与式 $= \dfrac{i}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot i\cdot|\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3| = |A|$

(3) 与式 $= |\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_1| = 0 \neq |A|$

(4) 与式 $= \dfrac{1}{4}|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2\ 2\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4\ 2\boldsymbol{a}_3| = |\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_3|$
$= |\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_3| = |A|$

答. (1), (2), (4)

5.10 (1) $AB = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & -5 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |A| = 3, \quad |B| = 3, \quad |AB| = 9$

(2) $AB = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 \\ 11 & 14 & 10 \\ 10 & 11 & 8 \end{bmatrix}, \quad |A| = -5, \quad |B| = -8, \quad |AB| = 40$

(3) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 10 & 0 & -17 & -8 \\ 1 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & -9 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad |A| = -4, \quad |B| = -3, \quad |AB| = 12$

5.11 $|A| = -3$ である.

(1) $|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -3$

(2) $|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -3$

5.12 (1) $与式 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & 1 & -8 \\ 3 & -4 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & -11 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 11 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -11 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 11 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ 3 & -11 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 11 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -11 & 6 \end{vmatrix}$

$= 2\begin{vmatrix} 13 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 13 & -1 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} = -8$

(2) $与式 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 11 & 12 & 6 & 12 \\ 7 & 8 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 1 & 17 & -10 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & 12 & -2 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -2$

(3) $与式 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -7 \\ 7 & 7 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 4 \\ 7 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & -6 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$

$= 12\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} + 16\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 7 & 7 & -4 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} - 42\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 7 & -6 & -4 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 12 \cdot 244 + 16 \cdot (-327) - 42 \cdot (-55) = 6$

(4) $与式 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 4 & 12 \\ -8 & -3 & -3 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 11 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 11 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 11 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 12 & 0 & 21 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -3$

5.13 (1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

5.14 (1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0$

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ \lambda b_x & \lambda b_y & \lambda b_z \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ など

(4) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x + c_x & b_y + c_y & b_z + c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

5.15 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ の x 成分は

$$a_y \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \text{ の } z \text{ 成分} - a_z \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \text{ の } y \text{ 成分} = a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z)$$

であり，$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ の x 成分は

$$(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)b_x - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)c_x = (a_y c_y + a_z c_z)b_x - (a_y b_y + a_z b_z)c_x$$

であるので両者は等しい．他の成分についても同様に等式が成り立つ．

5.16 (1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 23$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

5.17 定理 5.3 (iii$'$) の行列式の基本的性質より明らか．

5.18 (1) 行基本変形より 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ となり，

階数は3．

行列式は $-12 + 12 + 3 - 2 - 12 + 18 = 7$．

(2) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり，階数は2．

行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = -50 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$．

(3) 与式 $\to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -5 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & 5 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり，階数は3.

行列式は $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -4 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 14 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 14 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -15 & 5 \end{vmatrix} =$

$2\begin{vmatrix} -4 & 14 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

(4) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ と

なり，階数は4.

行列式は $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 6.$

5.19 (1) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & -10 & 0 \\ 0 & 13 & -9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 13 & -9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

答. $x = y = z = 0$（一意解），$\operatorname{rank} A = 3$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

答. t を任意の数として $x = -t,\ y = 0,\ z = t$（無限個の解），$\operatorname{rank} A = 2$

5.20 (1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1,$

$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7,\ \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 9,\ \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$

$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 8,\ \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -10,\ \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3,$

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\quad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,\quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 8 & -3 \\ 9 & -10 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$

(2) $|A| = \begin{vmatrix} 0 & i & -2i \\ 1 & 0 & -1+i \\ -i & 1 & i \end{vmatrix} = -i,$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1+i \\ 1 & i \end{vmatrix} = 1-i, \quad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1+i \\ -i & i \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} i & -2i \\ 1 & i \end{vmatrix} = 1-2i, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -2i \\ -i & i \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} i & -2i \\ 0 & -1+i \end{vmatrix} = -1-i, \quad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -2i \\ 1 & -1+i \end{vmatrix} = -2i, \quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -i,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-i}\begin{bmatrix} 1-i & 1-2i & -1-i \\ 1 & 2 & -2i \\ 1 & 1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 2+i & 1-i \\ i & 2i & 2 \\ i & i & 1 \end{bmatrix}.$$

5.21 (1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad x = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad y = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$ 答. $x = y = 1$

(2) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad x = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{3},$

$y = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}, \quad z = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 1.$ 答. $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = 1$

(3) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-i \\ 1 & i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i, \quad x = \frac{1}{-i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-i \\ 2i & i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i,$

$y = \frac{1}{-i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-i \\ 1 & 2i & i \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2-i, \quad z = \frac{1}{-i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 2i \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2+i.$

答. $x = 2i$, $y = -2-i$, $z = 2+i$

5.22 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ 答. 線形独立

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$ 答. 線形従属

5.23 $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ としたときの c_1, c_2, c_3 を求めればよい. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

なので $A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

答. $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

5.24 数学的帰納法を用いる．まず $(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2)$ は明らか．次に，ある k に対し $i, j \leqq k$ を満たす任意の相異なる i, j で $(\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}'_j) = 0$ であるとする．このとき

$$\boldsymbol{x}'_{k+1} = \boldsymbol{x}_{k+1} - \frac{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_{k+1})}{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_1)}\boldsymbol{x}'_1 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{x}'_k, \boldsymbol{x}_{k+1})}{(\boldsymbol{x}'_k, \boldsymbol{x}'_k)}\boldsymbol{x}'_k$$

であるので，$i \leqq k$ を満たす任意の $\boldsymbol{x}'_i$ と内積をとると，仮定より

$$(\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}'_{k+1}) = (\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}_{k+1}) - \frac{(\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}_{k+1})}{(\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}'_i)}(\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}'_i) = 0$$

となる．

5.25 (1) $\boldsymbol{x}'_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_1) = 2$, $(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2) = 2$, $\boldsymbol{x}'_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_3) = 1$, $(\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}'_2) = 1$, $(\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}_3) = 1$, $\boldsymbol{x}'_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{bmatrix}$.

答. $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{bmatrix}$

(2) (1) の直交基底のベクトルを並べて $A' = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\1 & 0 & 1/2\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ とする．

$A'^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ より $A'^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\1\\-1\end{bmatrix}$, $A'^{-1}\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\2\\-3\end{bmatrix}$.

答. $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'_1 + \boldsymbol{x}'_2 - \boldsymbol{x}'_3,\quad \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'_1 + 2\boldsymbol{x}'_2 - 3\boldsymbol{x}'_3$

5.26 (1) $|\boldsymbol{x}'_1| = \sqrt{2}$, $|\boldsymbol{x}'_2| = 1$, $|\boldsymbol{x}'_3| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より

$\boldsymbol{x}''_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}''_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}''_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{x}'_1 = \sqrt{2}\boldsymbol{x}''_1$, $\boldsymbol{x}'_2 = \boldsymbol{x}''_2$, $\boldsymbol{x}'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}''_3$ の関係を問題 5.25 (2) の答に代入すればよい．

答. $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}''_1 + \boldsymbol{x}''_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}''_3,\quad \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}''_1 + 2\boldsymbol{x}''_2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}''_3$

5.27 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$ とする.

$\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1') = 2$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2) = 1$. ゆえに $\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2i \\ i \end{bmatrix}$.

$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_3) = 2$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_2') = \frac{3}{2}$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_3) = 1$. ゆえに $\boldsymbol{x}_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2i \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}$.

さらに $|\boldsymbol{x}_1'| = \sqrt{2}$, $|\boldsymbol{x}_2'| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $|\boldsymbol{x}_3'| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

答. $\boldsymbol{x}_1'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2'' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2i \\ i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}$

5 章演習問題解答

5.1 (1) 与式 $= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -9$

(2) 与式 $= \begin{vmatrix} 1 & -2-i & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1-2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2-i \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4+2i$

(3) 与式 $= \begin{vmatrix} -7 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -2 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 9$

(4) 与式 $= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ -7 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ -7 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ -7 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= -2\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 & 3 \\ -7 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 & 3 \\ -7 & -3 & -1 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -2 & -14 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 14 \\ 4 & -2 & -14 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 14 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

$= -2\begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -3 & -10 & 14 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -10 & 14 \end{vmatrix} = -4$

5.2 (1) 順列 $(1\,2\,\cdots\,n)$ から $(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)$ を得る一連の互換の順序を逆にして $(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)$ に適用すると $(1\,2\,\cdots\,n)$ を得る．

(2) (1) を用いると

$$左辺 = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

この式は，$(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)$ から $(1\,2\,\cdots\,n)$ を得てさらに $(1\,2\,\cdots\,n)$ から $(j_1\,j_2\,\cdots\,j_n)$ を得るのに要する互換の回数の偶奇性を表している．結局 $(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)$ から $(j_1\,j_2\,\cdots\,j_n)$ を得ているので右辺に等しい．

5.3 (1) 与式 $= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 0 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b+c & c+a \\ 0 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\{(c-b)(c-a)(c+a)-(a-c)(b-c)(b+c)\}$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(2) 与式 $= \dfrac{1}{a^3b^3c^3}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{a^3b^3c^3}\begin{vmatrix} 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ 0 & b-a & c-a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{a^3b^3c^3}\{(b^2-a^2)(c-a)-(c^2-a^2)(b-a)\} = -\dfrac{1}{a^3b^3c^3}(a-b)(b-c)(c-a)$

(3) 与式 $=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ b-a & 0 & a-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^3 \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a-b)^3 \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3(a+3b)$

(4) 与式 $=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & a & b & b \\ 0 & -b & a & b \\ 0 & -b & -b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & b & b \\ -b & a & b & b \\ -b & -b & a & b \\ -b & -b & -b & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & b \\ -b & a & b \\ -b & -b & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & b \\ 1 & -b & a & b \\ 1 & -b & -b & a \end{vmatrix}$

$= a \left(\begin{vmatrix} a & b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & b \\ -b & a & b \\ -b & -b & a \end{vmatrix} \right) - b^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b-a & b-a \\ 1 & -b & a+b & 2b \\ 1 & -b & 0 & a+b \end{vmatrix}$

$= a \left(a \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & -b & a \end{vmatrix} \right) + b^2 \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & a+b & 2b \\ 1 & 0 & a+b \end{vmatrix}$

$= a \left(a^3 + ab^2 - b^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & b-a \\ 1 & -b & a+b \end{vmatrix} \right) + b^2 \begin{vmatrix} 0 & b-a & -2a \\ 0 & a+b & b-a \\ 1 & 0 & a+b \end{vmatrix}$

$= a \left(a^3 + ab^2 + b^2 \begin{vmatrix} 1 & b-a \\ 1 & a+b \end{vmatrix} \right) + b^2 \begin{vmatrix} b-a & -2a \\ a+b & b-a \end{vmatrix}$

$= a(a^3 + 3ab^2) + b^2(3a^2 + b^2) = a^4 + 6a^2b^2 + b^4$

5.4 (1) $\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1') = 6$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2) = 2$, $\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_3) = -3$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_2') = \frac{25}{3}$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_3) = 5$, $\boldsymbol{x}_3' = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

答. $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{bmatrix}$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1') = 4$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2) = 3+i$, $\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} i \\ 1-i \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{3+i}{4} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_3) = 2$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_2') = \frac{3}{2}$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_3) = -\frac{3}{2}(1+i)$,

$\boldsymbol{x}_3' = \begin{bmatrix} 1+2i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1+i}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}$.

答. $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{bmatrix}$, $-\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1') = 2$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2) = -1$, $\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_3) = -2$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_2') = \dfrac{5}{2}$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_3) = 0$, $\boldsymbol{x}_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_4) = 3$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_4) = \dfrac{3}{2}$, $(\boldsymbol{x}_3', \boldsymbol{x}_3') = 2$, $(\boldsymbol{x}_3', \boldsymbol{x}_4) = 1$,

$$\boldsymbol{x}_4' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{10}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

答. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

5.5 (1)

$${}^tAA = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1 \\ {}^t\boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 & {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_n \\ {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1 & {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}^t\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_1 & {}^t\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$$

$\{\boldsymbol{x}_i\}$ は実の正規直交基底なので ${}^t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j = \delta_{ij}$．したがって上式より ${}^tAA = E$.

(2)

$$|{}^tAA| = |{}^tA||A| = |A|^2 = |E| = 1$$

したがって $|A| = \pm 1$.

5.6

- $|A| \neq 0$ のとき P.120 より

$$|\tilde{A}A| = |\tilde{A}||A| = \begin{vmatrix} |A| & & & 0 \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |A| \end{vmatrix} = |A|^n$$

ゆえに $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$.

- $|A| = 0$ のとき同じく P.120 より $\tilde{A}A = O$．もし $|\tilde{A}| \neq 0$ ならば $\tilde{A}$ に逆行列が存在し，$A = \tilde{A}^{-1}O = O$．$A \neq O$ のときは矛盾するので $|\tilde{A}| = 0$．また $A = O$ のときは $\tilde{A}$ の定義より明らかに $\tilde{A} = O$ となり，やはり $|\tilde{A}| = 0$.

以上をまとめると $|A| \neq 0, = 0$ のどちらの場合も $|\tilde{A}| = |A|^{n-1} = |A^{n-1}|$.

5.7 (1)

$$E(E + xA + (xA)^2 + \cdots + (xA)^{m-1}) = E + xA + (xA)^2 + \cdots + (xA)^{m-1}$$
$$xA(E + xA + (xA)^2 + \cdots + (xA)^{m-1}) = xA + (xA)^2 + (xA)^3 + \cdots + (xA)^m$$

したがって

$$(E-xA)(E+xA+(xA)^2+\cdots+(xA)^{m-1})=E-(xA)^m=E-x^mA^m=E.$$

上式の最後の変形で $A^m=O$ を用いた．

(2) $|E-xA|$, $|E+xA+(xA)^2+\cdots+(xA)^{m-1}|$ はどちらも x の多項式である．(x の負べきは含まれない．）前者を k 次，後者を l 次の多項式とする $(0 \leqq k,\ 0 \leqq l)$．すると積 $|E-xA||E+xA+(xA)^2+\cdots+(xA)^{m-1}|$ は x の $(k+l)$ 次多項式となる．ところが，(1) より

$$|E-xA||E+xA+(xA)^2+\cdots+(xA)^{m-1}|=|E|=1$$

なので，$k=l=0$．すると $|E-xA|$ は x によらない定数となるので $x=0$ の場合を考えて

$$|E-xA|=|E|=1.$$

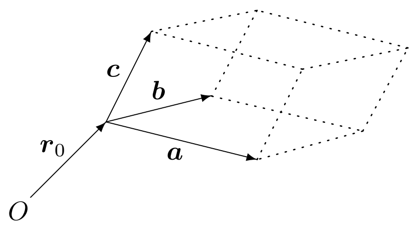
5.8 (1) 点 $\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}$ に平行な向きの直線を考える．$\boldsymbol{d}$ は向きを与えるベクトルなので $\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$ である．この直線上の任意の点の位置ベクトルはパラメータ t を用いて $\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{d}$ で表される．与えられた線形変換によってこの点は

$$A(\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{d})=A\boldsymbol{r}_0+tA\boldsymbol{d}$$

の点に写像される．このとき $A\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$ とすると A が正則なので $\boldsymbol{d}=A^{-1}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ となり仮定に矛盾する．よって $A\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$ であり，上式は点 $A\boldsymbol{r}_0$ を通りベクトル $A\boldsymbol{d}$ に平行な直線に対するパラメータ表示である．したがって直線は直線に写像される．

(2) (1) より $\boldsymbol{d}$ に平行な直線は写像後 $A\boldsymbol{d}$ に平行となるので，平行な 2 直線は写像後も平行である．

(3) 写像前の平行六面体を次図に示す．



この平行六面体の中の任意の点の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_0+t_1\boldsymbol{a}+t_2\boldsymbol{b}+t_3\boldsymbol{c} \qquad (0\leqq t_1,t_2,t_3\leqq 1)$$

によって表される．この点は線形変換により

$$\boldsymbol{r}_0'+t_1\boldsymbol{a}'+t_2\boldsymbol{b}'+t_3\boldsymbol{c}'$$

に写像される．ただし

$$\boldsymbol{r}_0'=A\boldsymbol{r}_0,\quad \boldsymbol{a}'=A\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{b}'=A\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{c}'=A\boldsymbol{c}$$

である．このことから写像後も平行六面体であることがわかる．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を列ベクトルとして並べた行列 $[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]$ と，$\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ を列ベクトルとして並べた行列 $[\boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{c}']$ は

$$[\boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{c}'] = [A\boldsymbol{a}\,A\boldsymbol{b}\,A\boldsymbol{c}] = A[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]$$

の関係がある．また写像前後の平行六面体の体積はそれぞれ行列式 $|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}|$, $|\boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{c}'|$ の絶対値に等しく，上の関係より

$$|\boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{c}'| = |A|\,|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}|$$

であるので，両者の体積比は $|A|$ の絶対値に等しい．

5.9 まず一般の行列の微分について考えておくと見通しがよい．行列 A の行列式の定義 (5.2) は，定理 5.2 (iv) より行と列の添え字を入れ替えても成立するので

$$|A| = \sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

となる．いま a_{ij} が x に依存しているとする．両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}
|A|' &= \sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix} \frac{d}{dx}(a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n})\\
&= \sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix} a'_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} + \sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix} a_{i_1 1}a'_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\\
&\qquad + \cdots + \sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a'_{i_n n}
\end{aligned}$$

となる．最右辺の k 番目の和は

$$\sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix} a_{i_1 1}\cdots a_{i_{k-1} k-1}a'_{i_k k}a_{i_{k+1} k+1}\cdots a_{i_n n}$$

であり，元の行列式の第 k 列の成分 $a_{i_k k}$ をすべてその微分 $a'_{i_k k}$ に置き換えたものに等しい．したがって $|A|$ の微分を列ベクトルで表現すると

$$|A|' = |\boldsymbol{a}'_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}'_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n| + \cdots + |\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}'_n|$$

となる.（もちろん列の代わりに行でも同様のことが成立する.）

(1) $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1\\ f_2\\ f_3\end{bmatrix}$ とすると $W = |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}''|$ と表せる．上に示した微分公式より

$$W' = |\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'''|.$$

定理 5.4(v) の行列式の基本的性質より同じ列を含む行列式は 0 なので

$$W' = |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'''|.$$

続けて微分を行うと

$$W'' = |\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}'''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}^{(4)}| = |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}'''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}^{(4)}|.$$

(2) $W''' = |\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}'''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'''\,\boldsymbol{f}'''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}^{(4)}| + |\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}^{(4)}| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}^{(4)}| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}^{(5)}|$

$= |\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}'''| + 2|\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}^{(4)}| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}^{(5)}|$

成分で表すと

$$W''' = \begin{vmatrix} f_1' & f_1'' & f_1''' \\ f_2' & f_2'' & f_2''' \\ f_3' & f_3'' & f_3''' \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} f_1 & f_1'' & f_1^{(4)} \\ f_2 & f_2'' & f_2^{(4)} \\ f_3 & f_3'' & f_3^{(4)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1^{(5)} \\ f_2 & f_2' & f_2^{(5)} \\ f_3 & f_3' & f_3^{(5)} \end{vmatrix}.$$

5.10 (1) 左辺の行列式を D と書くことにする．D を行列式の定義に当てはめると

$$D = \sum_{(i_1\, i_2\, \cdots\, i_n) \in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} x_{i_2} x_{i_3}^2 \cdots x_{i_n}^{n-1}$$

となるので，D は次数が $1 + 2 + \cdots + (n-1) = n(n-1)/2$ の単項式の和である．また，$x_1 = x_2$ とすると，D の第 1 列と第 2 列が等しくなり $D = 0$ となるので

$$D = (x_1 - x_2)(x_1 \sim x_n \text{ の多項式})$$

と因数分解できる．同様にして $x_i = x_j\ (i \neq j)$ とするとやはり $D = 0$ となるので

$$D = c \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$$

と因数分解できる．上式で $1 \leqq i < j \leqq n$ の条件を満たす i, j の組は ${}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ 個あるので $\displaystyle\prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$ は $n(n-1)/2$ 次の多項式となる．したがって c は定数である．

D 中のひとつの項 $x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$ に注目する．この項は

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j) =& (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) \\ & \times (x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n) \\ & \cdots \\ & \times (x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

の中ですべての (　) の中の右側の変数を選んだときに作られる．したがって $c = (-1)^{n(n-1)/2}$ であることがわかる．

(2) 曲線を表す式に点の座標 (x_i, y_i) を代入すると次の連立 1 次方程式が成り立つ．

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_1 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_1 x_2^2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_1 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

これを行列で表すと

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

となる．$|A|$ $(=|{}^tA|)$ はヴァンデルモンドの行列式であり，(1) の結果より $x_1 \sim x_n$ が全て異なるなら $|A| \neq 0$ である．したがって A には逆行列が存在し，

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

となるので，$a_0 \sim a_{n-1}$ は $x_1 \sim x_n$, $y_1 \sim y_n$ から一意的に定まる．

5.11 (1) 第 1 行で余因子展開すると次式のようになる．

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 3 & 4 & 1 & & & \\ & 3 & 4 & 1 & & \\ & & 3 & 4 & 1 & \\ & & & \cdots\cdots & & \\ & & & 3 & 4 & 1 \\ & & & & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{D_n} = 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & & & \\ 3 & 4 & 1 & & \\ & 3 & 4 & 1 & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & 3 & 4 & 1 \\ & & & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{D_{n-1}} -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 4 & 1 & & \\ & 3 & 4 & 1 & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & 3 & 4 & 1 \\ & & & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

さらに右辺第 2 項の行列式を第 1 行で余因子展開する．

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 4 & 1 & & \\ & 3 & 4 & 1 & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & 3 & 4 & 1 \\ & & & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & & \\ 3 & 4 & 1 & \\ & \cdots\cdots & & \\ & 3 & 4 & 1 \\ & & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{D_{n-2}} -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ & 4 & 1 & \\ & \cdots\cdots & & \\ & 3 & 4 & 1 \\ & & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

この式の右辺第 2 項の行列式の値は，第 1 列の成分がすべて 0 なので 0 となる．したがって

$$D_n = 4D_{n-1} - 3D_{n-2}.$$

ア $= 4$，イ $= -3$

(2) $D_n - 4D_{n-1} + 3D_{n-2} = 0$ より

$$D_n - 3D_{n-1} = D_{n-1} - 3D_{n-2}.$$

したがって

$$D_n - 3D_{n-1} = D_2 - 3D_1 = 13 - 3 \cdot 4 = 1.$$

これより

$$D_n + \frac{1}{2} = 3\Big(D_{n-1} + \frac{1}{2}\Big).$$

ゆえに

$$D_n = 3^{n-1}\Big(D_1 + \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1).$$