6章問題解答

6.1 問題で与えられた行列を A と表す.

(1)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

ゆえに固有値は$\lambda = -2,\ 1,\ 2$.

・$\lambda = -2$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+y) \\ 2(x+y) \\ -x+2y+3z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $y=-x,\ z=x$. したがって固有ベクトルは$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda = 1$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2y \\ 2x-y \\ -x+2y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x=y=0$. したがって固有ベクトルは$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda = 2$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x-y) \\ 2(x-y) \\ -x+2y-z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x=y=z$. したがって固有ベクトルは$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(2)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2+1) = 0$$

ゆえに固有値は$\lambda = 1,\ \pm i$.

・$\lambda = 1$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(y-2z) \\ -2z \\ y-2z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $y = z = 0$. したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

・$\lambda = \pm i$ のとき

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \mp i & 2 & -4 \\ 0 & 1 \mp i & -2 \\ 0 & 1 & -1 \mp i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \mp i)x + 2y - 4z \\ (1 \mp i)y - 2z \\ y - (1 \pm i)z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x = 2z$, $y = (1 \pm i)z$. したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \pm i \\ 1 \end{bmatrix}$ （複号同順）.

(3)

$$\begin{aligned}
|A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0
\end{aligned}$$

ゆえに固有値は $\lambda = -1, 0, 1, 2$.

・$\lambda = -1$ のとき

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2x - y - u) \\ y + z - u \\ x + 2z - u \\ x + 2z - u \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x = y = u$, $z = 0$. したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda = 0$ のとき

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2y - 2u \\ z - u \\ x + z - u \\ x + 2z - 2u \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x = 0$, $y = -u$, $z = u$. したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda = 1$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x-y-u) \\ -y+z-u \\ x-u \\ x+2z-3u \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x = z = u$, $y = 0$. したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda = 2$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y-2u \\ -2y+z-u \\ x-z-u \\ x+2z-4u \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x = 2u$, $y = 0$, $z = u$. したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6.2 問題 6.1 で求めた固有ベクトルを並べて P を作る.

(1)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

確かに対角化できる.

(2)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & i & 1-i \\ 0 & -i & 1+i \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & i & 1-i \\ 0 & -i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & i & 1-i \\ 0 & -i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2i & 2i \\ 0 & -1-i & -1+i \\ 0 & -i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

確かに対角化できる.

(3)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

確かに対角化できる.

6.3 問題の行列はどれも 3 次なので，線形独立な固有ベクトルが 3 つ存在するかどうかを調べればよい.

(1)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

ゆえに固有値は $\lambda = 0, 1, 2$. 異なる固有値が 3 つ存在するので，定理6.3 より対角化できる.

(2)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0$$

ゆえに固有値は $\lambda = -1$（単根），1（重根）.

・$\lambda = -1$ のとき

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - 3z \\ 2(x+y+z) \\ 2(x+y+z) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x = -4z$, $y = 3z$. 固有ベクトルは $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda = 1$ のとき

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + y - 3z \\ 2(x+z) \\ 2(x+y) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $y = z = -x$. したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ の 1 種類.

対角化できない.

(3)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0$$

ゆえに固有値は $\lambda=-2$（単根），1（重根）.

・$\lambda=-2$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y+3z \\ -x+4y+3z \\ x-y \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

ゆえに $x=y$, $z=-x$. 固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda=1$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y+3z \\ -x+y+3z \\ x-y-3z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

ゆえに $x=y+3z$. したがって固有ベクトルは一般に $\begin{bmatrix} s+3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となるので，線形独立な $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の2種類を作ることができる．ゆえに対角化できる.

6.4 (ii) より

$$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i, \quad A\boldsymbol{x}_i' = \lambda_i \boldsymbol{x}_i' + \boldsymbol{x}_i, \quad A\boldsymbol{x}_i'' = \lambda_i \boldsymbol{x}_i'' + \boldsymbol{x}_i', \quad \cdots$$

であることに注意すると，次式が得られる.

$$\begin{aligned} AP &= A[\boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{x}_1'\, \boldsymbol{x}_1'' \cdots \vdots\, \boldsymbol{x}_2\, \boldsymbol{x}_2'\, \boldsymbol{x}_2'' \cdots \vdots \cdots\cdots \vdots\, \boldsymbol{x}_r\, \boldsymbol{x}_r'\, \boldsymbol{x}_r'' \cdots] \\ &= [\lambda_1\boldsymbol{x}_1\ \ \lambda_1\boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_1\ \ \lambda_1\boldsymbol{x}_1'' + \boldsymbol{x}_1'\ \cdots \vdots\, \lambda_1\boldsymbol{x}_2\ \ \lambda_2\boldsymbol{x}_2' + \boldsymbol{x}_2\ \ \lambda_2\boldsymbol{x}_2'' + \boldsymbol{x}_2'\ \cdots \vdots \\ &\qquad \vdots \cdots\cdots \vdots\, \lambda_r\boldsymbol{x}_r\ \ \lambda_r\boldsymbol{x}_r' + \boldsymbol{x}_r\ \ \lambda_r\boldsymbol{x}_r'' + \boldsymbol{x}_r'\ \cdots] \end{aligned}$$

さらに (6.6) の右辺の行列を J とすると，$PJ=$ 上式右辺 となることも明らか．したがって $AP=PJ$. P を正則としているので $P^{-1}AP=J$.

6.5 (1)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -8 \\ 1 & -\lambda & 6 \\ 1 & -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^3$$

ゆえに固有値は $\lambda=2$（3 重根）．固有ベクトルを求める.

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x-y+4z) \\ x-2y+6z \\ x-y+4z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$x=-2z,\ y=2z$ なので，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$ の1種類のみ．そこで P.142 (ii) の手続きを用いる．$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$ より

$$\begin{bmatrix}-2(x'-y'+4z')\\x'-2y'+6z'\\x'-y'+4z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$$

ゆえに $x'=-2z',\ y'=2z'-1$．これよりたとえば $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$ とする．次に $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}''=\boldsymbol{x}'$ より

$$\begin{bmatrix}-2(x''-y''+4z'')\\x''-2y''+6z''\\x''-y''+4z''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$$

ゆえに $x''=-2z''+1,\ y''=2z''$．これよりたとえば $\boldsymbol{x}''=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$．以上より次式が得られる．

$$P=[\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}'\,\boldsymbol{x}'']=\begin{bmatrix}-2&-2&-1\\2&1&2\\1&1&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

(2)

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}i-\lambda&-1+i&0\\0&1-\lambda&0\\1&4-3i&i-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-i)^2=0$$

ゆえに固有値は $\lambda_1=i$（重根），$\lambda_2=1$（単根）．
λ_1 の固有ベクトルを求める．

$$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{x_1}=\begin{bmatrix}0&-1+i&0\\0&1-i&0\\1&4-3i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1+i)y\\(1-i)y\\x+(4-3i)y\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

$x=y=0$ なので，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ の1種類のみ．そこで P.141 (i) の手続きを用いる．

$$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{x}_1'=\begin{bmatrix}(-1+i)y'\\(1-i)y'\\x'+(4-3i)y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

より $x'=1,\ y'=0$．これよりたとえば $\boldsymbol{x}_1'=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

λ_2 の固有ベクトルを求める．

$$(A-\lambda_2E)\boldsymbol{x_2}=\begin{bmatrix}-1+i&-1+i&0\\0&0&0\\1&4-3i&-1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1+i)(x+y)\\0\\x+(4-3i)y+(-1+i)z\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ゆえに $y=-x$, $z=-3x$．固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix}$．

以上より次式が得られる．

$$P=[\boldsymbol{x}_1\,\boldsymbol{x}_1'\,\boldsymbol{x}_2]=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&-1\\1&0&-3\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}i&1&0\\0&i&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(3)

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&4\\0&1-\lambda&2\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

ゆえに固有値は $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$．

それぞれの固有ベクトルを求める．

$$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{x_1}=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y+4z\\2(y+z)\\0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ゆえに $x=2y$, $z=-y$ となり，$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$．

$$(A-\lambda_2E)\boldsymbol{x_2}=\begin{bmatrix}0&2&4\\0&1&2\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(y+2z)\\y+2z\\-z\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ゆえに $y=z=0$ となり，$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$．

$$(A-\lambda_3E)\boldsymbol{x_3}=\begin{bmatrix}-1&2&4\\0&0&2\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x+2y+4z\\2z\\-2z\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ゆえに $x=2y$, $z=0$ となり，$\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$．

以上より次式が得られる．

$$P=[\boldsymbol{x}_1\,\boldsymbol{x}_2\,\boldsymbol{x}_3]=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\text{（対角化）}$$

(4)

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&1\\2&-\lambda&2\\1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^3=0$$

ゆえに固有値は $\lambda = 2$（3 重根）.
固有ベクトルを求める.

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + z \\ 2(x - y + z) \\ x - y + z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$x = y - z$ より固有ベクトルは一般に

$$\begin{bmatrix} s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

したがって線形独立な固有ベクトルは 2 種類しか作れない．そこで，P.142 (iii) の手順を用いる．改めて (6.7) を考える．

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

として (6.7) に代入すると次式が得られる．

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0} \quad &\rightarrow \quad \begin{bmatrix} x - y + z \\ 2(x - y + z) \\ x - y + z \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \\ (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_1 \quad &\rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' - y' + z' \\ 2(x' - y' + z') \\ x' - y' + z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \\ (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}, \quad &\rightarrow \quad \begin{bmatrix} u - v + w \\ 2(u - v + w) \\ u - v + w \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$x - y + z = 0, \qquad x' - y' + z' = x = y/2 = z, \qquad u - v + w = 0.$$

この条件を満たす線形独立な $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2$ の例として

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

がある．以上より次式が得られる．

$$P = [\boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{x}_1'\, \boldsymbol{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6.6 どの問題も数学的帰納法で示す.

(1) $n=1$ のとき与式が成立する．$n=k$ のとき成立すると仮定する．$n=k+1$ のとき

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{k+1} \end{bmatrix}.$$

よって帰納法が成立する.

(2) $n=1$ のとき与式が成立する．$n=k$ のとき成立すると仮定する．$n=k+1$ のとき

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k & \sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & a\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} + b^k & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{k+1} \end{bmatrix}.$$

$(1,2)$ 成分を整理する.

$$a\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} + b^k = b^k + ab^{k-1} + a^2b^{k-2} + \cdots + a^{k-1}b + a^k = \sum_{i=0}^{k} a^i b^{k-i}$$

よって帰納法が成立する.

(3) $n=2$ のとき

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$$

となり，与式が成立する．$n=k$ のとき成立すると仮定する．$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k & \sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} & \sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-i} a^i b^j c^{k-i-j-2} \\ 0 & b^k & \sum_{i=0}^{k-1} b^i c^{k-i-1} \\ 0 & 0 & c^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{k+1} & a\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} + b^k & a\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-i} a^i b^j c^{k-i-j-2} + \sum_{i=0}^{k-1} b^i c^{k-i-1} \\ 0 & b^{k+1} & b\sum_{i=0}^{k-1} b^i c^{k-i-1} + c^k \\ 0 & 0 & c^{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$(1,2)$, $(2,3)$ 成分については，(2) より

$$a\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} + b^k = \sum_{i=0}^{k} a^i b^{k-i}, \qquad b\sum_{i=0}^{k-1} b^i c^{k-i-1} + c^k = \sum_{i=0}^{k} b^i c^{k-i}$$

が成立する．(1,3) 成分については

$$
\begin{aligned}
&a\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-i}a^ib^jc^{k-i-j-2}+\sum_{i=0}^{k-1}b^ic^{k-i-1}\\
&=\sum_{j=0}^{k-1}b^jc^{k-j-1}+\sum_{j=0}^{k-2}ab^jc^{k-j-2}+\sum_{j=0}^{k-3}a^2b^jc^{k-j-3}\\
&\qquad\qquad+\cdots+\sum_{j=0}^{1}a^{k-2}b^jc^{1-j}+\sum_{j=0}^{0}a^{k-1}b^jc^{-j}\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i}a^ib^jc^{k-i-j-1}.
\end{aligned}
$$

よって帰納法が成立する．

6.7 (1)

$$
P=\begin{bmatrix}-2&-2&-1\\2&1&2\\1&1&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&-3\\0&-1&2\\1&0&2\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}.
$$

問題 6.6 (3) より

$$
(P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}2^n&\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}2^{n-1}&\displaystyle\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2-i}2^{n-2}\\0&2^n&\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}2^{n-1}\\0&0&2^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n&n2^{n-1}&n(n-1)2^{n-3}\\0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{bmatrix}\quad(n\geqq 2).
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{bmatrix}&=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}-2&-2&-1\\2&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n&n2^{n-1}&n(n-1)2^{n-3}\\0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&-3\\0&-1&2\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}(n^2+7n+4)2^{n-2}\\-(n^2+5n+4)2^{n-2}\\-(n^2+7n+8)2^{n-3}\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

上の解は $n\geqq 0$ で成立する．

(2)

$$
P=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&-1\\1&0&-3\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&-3&1\\1&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}i&1&0\\0&i&0\\0&0&1\end{bmatrix}.
$$

問題 6.6 (2) より

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} i^n & \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} i^{n-1} & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^n & n\,i^{n-1} & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (n \geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^n & n\,i^{n-1} & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2\,i^n - 3 \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

上の解は $n \geqq 0$ で成立する．

(3)

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

問題 6.6 (1) より

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (n \geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \boxed{\begin{bmatrix} 2(-1)^n - 4 \\ (-1)^n - 2 \\ (-1)^{n+1} \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

上の解は $n \geqq 1$ で成立する．

注：解の表式が $n = 0$ で成立しないのは，固有値に 0 が含まれているからである．

(4)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

問題 6.6 (2) より

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} 2^n & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & n\,2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \qquad (n \geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & n\,2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (n+2)2^{n-1} \\ (n-1)2^n \\ (n-2)2^{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

上の解は $n \geqq 0$ で成立する．

6.8 列ベクトルの直行性，すなわち，$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$ を利用する．

(1)

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + a_{12}\Big)$$

より $a_{12} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$．これより $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = 1$ は明らか．

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{13} + a_{23}) = 0, \qquad (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_{13} + a_{23}) = 0,$$
$$(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3) = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$$

より $a_{13} = a_{23} = 0,\ a_{33} = \pm 1$．

注：$a_{13} \sim a_{33}$ については $\boldsymbol{x}_3 = \pm \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ からも求められる．

(2)

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{3}\,a_{12} - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = 0, \qquad (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = a_{12}^2 + a_{22}^2 + \frac{1}{3} = 1$$

よって $a_{12} = \dfrac{1}{3},\ a_{22} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,a_{13} + a_{33}) = 0, \qquad (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \frac{1}{3}(a_{13} \pm \sqrt{5}\,a_{23} - \sqrt{3}\,a_{33}) = 0,$$
$$(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3) = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$$

よって $(a_{13}, a_{23}, a_{33}) = \Big(\mp\dfrac{\sqrt{5}}{6}, \dfrac{2}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{15}}{6}\Big)$ もしくは $\Big(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{6}, -\dfrac{2}{3}, \mp\dfrac{\sqrt{15}}{6}\Big)$（複号同順）

6.9 直交行列を P とすると ${}^tP = P^{-1}$ となるので，(6.9) とは逆の順に P と ${}^tP$ をかけてもやはり

$$P\,{}^tP = E \tag{a}$$

となる．P を

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$$

と行ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_n$ で表し，(a) の両辺の (i,j) 成分を比較すると

$$\boldsymbol{x}_i{}^t\boldsymbol{x}_j = \delta_{ij}$$

が得られる．これは実の横ベクトルの内積に等しいので，$\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_n$ は正規直交基底である．

6.10 A, B をそれぞれ直交行列とし，$C = AB$ とする．

$${}^tCC = {}^t(AB)(AB) = ({}^tB{}^tA)(AB) = {}^tB({}^tAA)B = {}^tBB = E$$

よって C も直交行列である．

6.11 問題で与えられた行列を A とする．

(1)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+3) = 0$$

固有値は $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$ の 3 つでありすべて実数である（定理 6.9 (i) の確認）．次に固有ベクトルを求める．

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-y+z \\ -x+3y+z \\ x+y+z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

よって $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y+z \\ -x+z \\ x+y-2z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

よって $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$(A - \lambda_3 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-y+z \\ -x-y+z \\ x+y-3z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

よって$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$．確かに $i \neq j$ のとき $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = 0$ である（定理 6.9 (ii) の確認）．

(2)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+5) = 0$$

よって$\lambda_1 = -5$（単根），$\lambda_2 = 1$（重根）の 2 つであり，どちらも実数である（定理 6.9 (i) の確認）．次に固有ベクトルを求める．

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x+2y-z \\ 2(x+y+z) \\ -x+2y+5z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$．

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2y-z \\ 2(x-2y+z) \\ -x+2y-z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって $x-2y+z=0$ より s, t を任意の数として$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} s \\ t \\ -s+2t \end{bmatrix}$．確かに $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ である（定理 6.9 (ii) の確認）．

(3)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda+3) = 0$$

よって$\lambda_1 = -3$（単根），$\lambda_2 = 1$（3 重根）の 2 つであり，どちらも実数である（定理 6.9 (i) の確認）．次に固有ベクトルを求める．

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+y-z+u \\ x+3y+z-u \\ -x+y+3z+u \\ x-y+z+3u \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$．

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y-z+u \\ x-y+z-u \\ -x+y-z+u \\ x-y+z-u \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって $x-y+z-u=0$ より $r,\ s,\ t$ を任意の数として $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ r-s+t \end{bmatrix}$．確かに $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=0$ である（定理 6.9 (ii) の確認）．

6.12 (1) 固有値が全て異なるので固有ベクトルは互いに直交しており，それらを単位ベクトルにして並べるだけでよい．

$$P=\begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_2|} & \dfrac{\boldsymbol{x}_3}{|\boldsymbol{x}_3|} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2=1$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} s \\ t \\ -s+2t \end{bmatrix}$ なので，線形独立なものとして改めて

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

を選び，グラム–シュミットの直交化法 (P.126∼127) を適用する．なお，$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が直交していることは問題 6.11 で既に示されている．

$$\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_1, \qquad \boldsymbol{x}_2'=\boldsymbol{x}_2-\frac{\overbrace{(\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_2)}^{0}}{(\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_1')}\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_2,$$

$$\boldsymbol{x}_3'=\boldsymbol{x}_3-\frac{\overbrace{(\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_3)}^{0}}{(\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_1')}\boldsymbol{x}_1'-\frac{(\boldsymbol{x}_2',\boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{x}_2',\boldsymbol{x}_2')}\boldsymbol{x}_2'=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}-\frac{-2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに (5.21) のように $\boldsymbol{x}_1'\sim\boldsymbol{x}_3'$ を単位ベクトルにして並べて P を作る．

$$P=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(3) $\lambda_2=1$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ r-s+t \end{bmatrix}$ なので，改めて線形独立なものとして

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_4=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を選び，グラム–シュミットの直交化法を適用する．なお，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_2 \sim \boldsymbol{x}_4$ が直交していることは問題 6.11 で既に示されている．

$$\boldsymbol{x}'_1 = \boldsymbol{x}_1, \qquad \boldsymbol{x}'_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{\overbrace{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2)}^{0}}{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_1)}\boldsymbol{x}'_1 = \boldsymbol{x}_2,$$

$$\boldsymbol{x}'_3 = \boldsymbol{x}_3 - \frac{\overbrace{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_3)}^{0}}{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_1)}\boldsymbol{x}'_1 - \frac{(\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}'_2)}\boldsymbol{x}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'_4 &= \boldsymbol{x}_4 - \frac{\overbrace{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_4)}^{0}}{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_1)}\boldsymbol{x}'_1 - \frac{(\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}_4)}{(\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}'_2)}\boldsymbol{x}'_2 - \frac{(\boldsymbol{x}'_3, \boldsymbol{x}_4)}{(\boldsymbol{x}'_3, \boldsymbol{x}'_3)}\boldsymbol{x}'_3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1/2}{3/2}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

さらに (5.21) のように $\boldsymbol{x}'_1 \sim \boldsymbol{x}'_4$ を単位ベクトルにして並べて P を作る．

$$P = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 & 2/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \\ -1/2 & 0 & 0 & 3/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

6.13 (1) 与式を実対称行列によって表す．

$$[x\ y\ z]\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}} -4 = 0$$

A の固有値は $\lambda_1 = 2$（重根），$\lambda_2 = 4$（単根）である．λ_1 に対する固有ベクトルとして線形独立な $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を選ぶ．λ_2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$．
$\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_3$ は互いに直交しているので，単位ベクトルにして並べて直交行列 P を作る．

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r} = P\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}'}$ とすると，

$${}^t\boldsymbol{r}'({}^tPAP)\boldsymbol{r}' - 4 = 0.$$

よって

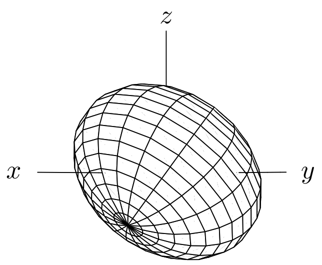
$$[x'\ y'\ z']\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}-4=0.$$

ゆえに

$$\frac{(x')^2}{2}+\frac{(y')^2}{2}+(z')^2=1. \tag{a}$$

この式は楕円面を表す.

答. 原点を中心に x', y', z' 軸をそれぞれ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ の方向に回転する線形写像によって (a) の楕円面を写像すると与式の曲面が得られる.



(2) 与式を実対称行列によって表す.

$$\underbrace{[x\ y\ z]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}}+2\underbrace{[-3\ 3\ 0]}_{{}^t\boldsymbol{b}}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$$

A の固有値は $\lambda_1=0$（重根），$\lambda_2=3$（単根）である．λ_1 に対する固有ベクトルとして線形独立な $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ を選ぶ．λ_2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{x}_1\sim\boldsymbol{x}_3$ をグラム–シュミットの直交化法によって正規直交化すると

$$\boldsymbol{x}''_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}''_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}''_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

よって

$$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{r}=P\boldsymbol{r}'$ とすると，

$${}^t\boldsymbol{r}'({}^tPAP)\boldsymbol{r}'+2({}^t\boldsymbol{b}P)\boldsymbol{r}'=0.$$

よって

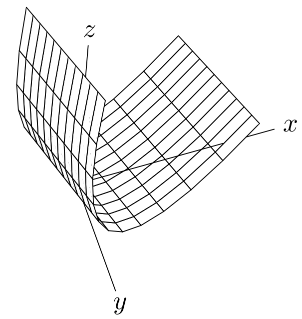
$$[x'\ y'\ z']\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}+2[-3\sqrt{2}\ 0\ 0]\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=0.$$

ゆえに

$$3(z')^2 - 6\sqrt{2}x' = 0 \quad \rightarrow \quad x' = \frac{1}{2\sqrt{2}}(z')^2. \tag{b}$$

この式は放物柱を表す.

答. 原点を中心に x', y', z' 軸をそれぞれ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ の方向に回転する線形写像によって (b) の放物柱を写像すると与式の曲面が得られる.



(3) 与式を実対称行列によって表す.

$$\underbrace{[x\ y\ z]\begin{bmatrix}2&-2&5\\-2&2&-5\\5&-5&-1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}} + 2\underbrace{[-3\ 3\ -3]}_{{}^t\boldsymbol{b}}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} - 6 = 0$$

A の固有値は $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 9$ である. $\lambda_1 \sim \lambda_3$ に対する固有ベクトルは, それぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$. $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_3$ は互いに直交しているので単位ベクトルにして並べて直交行列 P を作る.

$$P = \begin{bmatrix}1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{3}\\-2/\sqrt{6}&0&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r} = P\boldsymbol{r}'$ とすると,

$${}^t\boldsymbol{r}'({}^tPAP)\boldsymbol{r}' + 2({}^t\boldsymbol{b}P)\boldsymbol{r}' - 6 = 0.$$

よって

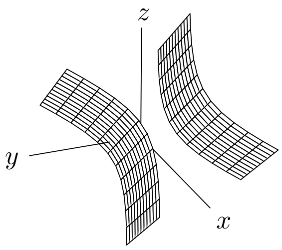
$$[x'\ y'\ z']\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&0&0\\0&0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix} + 2[0\ 0\ -3\sqrt{3}]\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix} - 6 = 0.$$

ゆえに

$$-6(x')^2 + 9(z')^2 - 6\sqrt{3}z' - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(z' - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{2}{3}(x')^2 = 1. \tag{c}$$

この式は, $(z')^2 - \frac{2}{3}(x')^2 = 1$ によって表される双曲柱を z' 軸正方向に $1/\sqrt{3}$ だけ平行移動した図形を表す.

答. 原点を中心に x', y', z' 軸をそれぞれ $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ の方向に回転する線形写像によって (c) の双曲柱を写像すると与式の曲面が得られる.



注：たとえば (1) の問題で固有ベクトル $\boldsymbol{x}_3$ を $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ とする代わりに $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ と符号を変えることも可能である．このときに (a) の式は変わらないが，$x'y'z'$ 空間から xyz 空間への線形写像は単なる回転だけでなく，原点に関する対称移動も必要となる．もちろん結果の図は変わらない．さらに，固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_3$ の順序を変えて P を定義しても対称移動が必要となることがある．他の問題も同様.

6.14 与えられた行列を A とする.

(1) $|A-\lambda E| = \lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$ より $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{7}i}{2}$.
$\lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{3+\sqrt{7}i}{2} + \dfrac{3-\sqrt{7}i}{2} = 3$. 一方，$\mathrm{tr}\,A = 1 + 2 = 3$.
$\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}\,\dfrac{3-\sqrt{7}i}{2} = 4$. 一方，$|A| = 1\cdot 2 - 2\cdot(-1) = 4$.
確かに定理 6.11 が成立する.

(2) $|A-\lambda E| = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$ より $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.
$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + 2 + 3 = 5$. 一方，$\mathrm{tr}\,A = 1 + 1 + 3 = 5$.
$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0\cdot 2\cdot 3 = 0$. 一方，$|A| = 3 + 2 + 4 + 1 - 12 + 2 = 0$.
確かに定理 6.11 が成立する.

6.15 行列 A, B の (i,j) 成分をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とする.

(1)
$$\mathrm{tr}\,(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}), \qquad \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}.$$
よって等式が成り立つ.

(2) AB の (i,i) 成分は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$, BA の (i,i) 成分は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}$. よって
$$\mathrm{tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}, \qquad \mathrm{tr}\,(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}.$$
$\mathrm{tr}\,(AB)$ の方の和をとる変数 i, j をそれぞれ j, i に書き換えれば，それが $\mathrm{tr}\,(BA)$ に等しいことは明らか.

6.16 エルミート行列は $H^* = H$ を満たすので $HH^* = H^*H$ が明らかに成り立つ．よって H は正規行列である．
ユニタリ行列は $U^*U = E$ なので $U^* = U^{-1}$ であり，UU^*, U^*U ともに単位行列 E に等しい．よって U は正規行列である．

6.17 ユニタリ行列 U の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とする．

$$U^* = {}^t\overline{U} = {}^t[\overline{\boldsymbol{x}_1}\ \overline{\boldsymbol{x}_2}\ \cdots\ \overline{\boldsymbol{x}_n}] = \begin{bmatrix} {}^t\overline{\boldsymbol{x}_1} \\ {}^t\overline{\boldsymbol{x}_2} \\ \vdots \\ {}^t\overline{\boldsymbol{x}_n} \end{bmatrix}$$

よって U^*U の (i,j) 成分は ${}^t\overline{\boldsymbol{x}_i}\,\boldsymbol{x}_j = (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)$ となり，これが E の (i,j) 成分に等しいので $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$ となる．したがって $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_n$ は正規直交基底をなす．

6.18 U の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とすると

$$AU = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \text{\huge 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

より

$$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$$

となる．またユニタリ行列の定義より $|U| \neq 0$ は明らかなので，$\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ である．したがって $\boldsymbol{x}_i$ は A の固有値 λ_i に対する固有ベクトルである．

6.19 (1) A の (i,j) 成分を a_{ij} とすると ${}^tA = -A$ より $a_{ji} = -a_{ij}$．特に $i = j$ のとき $a_{ii} = -a_{ii}$ より $a_{ii} = 0$． 答. $a_{ji} = -a_{ij}$ であり，特に $a_{ii} = 0$．

(2) $A^* = {}^t\overline{A} = {}^tA = -A$．よって $AA^* = A^*A = -A^2$．

6.20 (1) 成分がすべて実数なので $A^* = {}^t\overline{A} = {}^tA$．これが $-A$ に等しいので A は交代行列である．

(2) A の (i,j) 成分を a_{ij} とすると $A^* = -A$ より $\overline{a_{ji}} = -a_{ij}$．特に $i = j$ のとき $\overline{a_{ii}} = -a_{ii}$，すなわち $a_{ii} + \overline{a_{ii}} = 0$．任意の複素数 $z = x + iy$ に対し $z + \overline{z} = 0$ は，$x = 0$ つまり z が純虚数を意味するので，a_{ii} も純虚数である． 答. $\overline{a_{ji}} = -a_{ij}$ であり，特に a_{ii} は純虚数．

(3) $A^* = -A$ より $AA^* = A^*A = -A^2$．

6.21 与えられた行列を A とする．対角化するためのユニタリ行列 U を作るには，まず A の固有ベクトルを求め（問題 6.18），それら固有ベクトルから正規直交基底をなすベクトルを作り（問題 6.17），それらを列ベクトルする行列を作ればよい．

(1) A の固有値は $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$．固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$．

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = {}^t\overline{\boldsymbol{x}_1}\,\boldsymbol{x}_2 = [1\ \ -i] \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = 0$$

より $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ は直交する．それぞれを単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\i&-i\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}U^*AU&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-i\\1&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\i&-i\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-i\\1&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+i&1-i\\i(1+i)&-i(1-i)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1+i&0\\0&1-i\end{bmatrix}\quad\text{（確かに対角化できる）}\end{aligned}$$

(2) A の固有値は $\lambda_1=1+\sqrt{2}$, $\lambda_2=1-\sqrt{2}$．固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1+i\\\sqrt{2}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}-1-i\\\sqrt{2}\end{bmatrix}$．$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=0$ より $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ は直交する．それぞれを単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+i&-1-i\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}U^*AU&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1-i&\sqrt{2}\\-1+i&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1+i\\1-i&1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+i&-1-i\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1-i&\sqrt{2}\\-1+i&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1+\sqrt{2})(1+i)&-(1-\sqrt{2})(1+i)\\\sqrt{2}(1+\sqrt{2})&\sqrt{2}(1-\sqrt{2})\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}&0\\0&1-\sqrt{2}\end{bmatrix}\quad\text{（確かに対角化できる）}\end{aligned}$$

(3) A の固有値は $\lambda_1=1,\ \lambda_2=1+\sqrt{2}i,\ \lambda_3=1-\sqrt{2}i$．固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}i\\-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}i\\-1\end{bmatrix}$．$i\neq j$ のとき $(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=0$ なので $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_j$ は直交する．それぞれを単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&1&1\\0&\sqrt{2}i&-\sqrt{2}i\\\sqrt{2}&-1&-1\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}U^*AU&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\1&-\sqrt{2}i&-1\\1&\sqrt{2}i&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&1&1\\0&\sqrt{2}i&-\sqrt{2}i\\\sqrt{2}&-1&-1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\1&-\sqrt{2}i&-1\\1&\sqrt{2}i&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&1+\sqrt{2}i&1-\sqrt{2}i\\0&\sqrt{2}i(1+\sqrt{2}i)&-\sqrt{2}i(1-\sqrt{2}i)\\\sqrt{2}&-(1+\sqrt{2}i)&-(1-\sqrt{2}i)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1+\sqrt{2}i&0\\0&0&1-\sqrt{2}i\end{bmatrix}\quad\text{（確かに対角化できる）}\end{aligned}$$

6章演習問題解答

6.1 与えられた行列を A とする．

(1)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

より，固有値は $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$.

$(A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x-2y \\ x+3y+z \\ x+3y+z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_1 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$.

$(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -x-2y \\ x+y+z \\ x+3y-z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_2 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$(A-\lambda_3 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2(x+y) \\ x+z \\ x+3y-2z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_3 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(2)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2+1) = 0$$

より，固有値は $\lambda_1=0,\ \lambda_2=i,\ \lambda_3=-i$.

$(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -x+2y+2z \\ x+y-2z \\ 2y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_1 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -(1+i)x+2y+2z \\ x+(1-i)y-2z \\ 2y-iz \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_2 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1+3i \\ -1 \\ 2i \end{bmatrix}$.

$(A-\lambda_3 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -(1-i)x+2y+2z \\ x+(1+i)y-2z \\ 2y+iz \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_3 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1-3i \\ -1 \\ -2i \end{bmatrix}$.

注：$A,\ E$ が実行列でかつ $\lambda_3=\overline{\lambda_2}$ なので $\overline{(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x}} = (A-\lambda_3 E)\overline{\boldsymbol{x}}$. したがって $\boldsymbol{x}$ が λ_2 の固有ベクトルなら $\overline{\boldsymbol{x}}$ が λ_3 の固有ベクトルになる．このことは，実行列の共役な複素固有値について常に成り立つ．

(3)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

より，固有値は$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=1,\ \lambda_4=2$.

$$(A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\u\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}x+y+u\\x+3y+3u\\-2x+3z\\-(x+y+u)\end{bmatrix}=\mathbf{0}\ \text{より}\ \lambda_1\ \text{に対する固有ベクトルは}\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

$$(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}y+u\\x+2y+3u\\-2(x-z)\\-(x+y+2u)\end{bmatrix}=\mathbf{0}\ \text{より}\ \lambda_2\ \text{に対する固有ベクトルは}\ \begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

$$(A-\lambda_3 E)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-x+y+u\\x+y+3u\\-2x+z\\-(x+y+3u)\end{bmatrix}=\mathbf{0}\ \text{より}\ \lambda_3\ \text{に対する固有ベクトルは}\ \begin{bmatrix}1\\2\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

$$(A-\lambda_4 E)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2x+y+u\\x+3u\\-2x\\-(x+y+4u)\end{bmatrix}=\mathbf{0}\ \text{より}\ \lambda_4\ \text{に対する固有ベクトルは}\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

6.2 問題で与えられた行列を A とする．

(1) $|A-\lambda E|=-(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$ より固有値は $\lambda_1=1$（重根），$\lambda_2=2$（単根）．

$$(A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}x+y+z\\y\\-(x+4y+z)\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

より $y=0,\ z=-x$ なので，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ の 1 種類しかない．これは P.141 の 3 次正方行列のジョルダンの標準形の (i) に相当する．そこで，$(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_1$ とおき，たとえば $\boldsymbol{x}_1'=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ を得る．また，$(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ より $\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$．以上より

$$P=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&-1\\-1&0&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

(2) $|A-\lambda E|=-(\lambda-1)^3=0$ より固有値は $\lambda=1$（3 重根）．

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2y\\y-z\\y-z\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

より $y=z=0$ なので，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ の 1 種類しかない．これは P.142 の 3 次正方行列のジョルダンの標準形の (ii) に相当する．そこで，$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_1$ とお

き，たとえば $\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ を得る．さらに，$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}'$ より $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ を得る．以上より

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) $|A-\lambda E| = (\lambda-1)^3(\lambda-2) = 0$ より固有値は $\lambda_1 = 1$（3 重根），$\lambda_2 = 2$（単根）．

$$(A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} y+z \\ x-y-z+u \\ -(x-y-z+u) \\ x+u \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

より $u=-x,\ z=-y$ なので，固有ベクトルの一般形は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ -t \\ -s \end{bmatrix}$ となる．よって線形独立なベクトルは 2 種類しか作れない．A は 4 次正方行列であるが，これは P.142 の 3 次正方行列のジョルダンの標準形の (iii) に相当する．そこで改めて線形独立な $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2$ を以下の条件を満たすように作る．

$$(A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ u_1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}_1} = \mathbf{0}, \qquad (A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \\ u_1' \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}_1'} = \boldsymbol{x}_1, \qquad (A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}_2} = \mathbf{0}.$$

これより

$$\begin{aligned} & x_1+u_1 = 0, \qquad y_1+z_1 = 0, \\ & x_1'+u_1' = u_1, \qquad y_1'+z_1' = x_1, \qquad x_1'-y_1'-z_1'+u_1' = y_1 = -z_1, \\ & x_2+u_2 = 0, \qquad y_2+z_2 = 0 \end{aligned}$$

となるので，たとえば

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

を得る．また，$(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ より，λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を得る．

したがって

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.3 問題で与えられた行列を A とする．

(1) A の固有値は $\lambda_1 = 3$（重根），$\lambda_2 = -3$（単根）．λ_1 に対する固有ベクトルの一般形は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} s \\ -s+2t \\ t \end{bmatrix}$．これよりたとえば $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 2 種類が作れる．両者が直交するように

$$\boldsymbol{x}'_1 = \boldsymbol{x}_1 \qquad \boldsymbol{x}'_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2)}{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_1)}\boldsymbol{x}'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする．また，λ_2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$．$\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}_3$ を単位ベクトルにして列ベクトルとして並べれば直交行列 U ができる．

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

(2) A の固有値は $\lambda_1 = -1$（重根），$\lambda_2 = 5$（単根）．λ_1 に対する固有ベクトルの一般形は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ -s-2t \end{bmatrix}$．これよりたとえば $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ の 2 種類が作れる．両者が直交するように

$$\boldsymbol{x}'_1 = \boldsymbol{x}_1 \qquad \boldsymbol{x}'_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2)}{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_1)}\boldsymbol{x}'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

とする．また，λ_2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$．$\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}_3$ を単位ベクトルにして列ベクトルとして並べれば直交行列 U ができる．

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

6.4 (1)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{p}_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{p}_n}$$

A の固有値は $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ の 3 つ．したがって A は対角化できる．それぞ

れに対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$. これより次式が得られる.

$$P=\begin{bmatrix}2&2&1\\2&1&0\\5&3&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\2&3&-2\\-1&-4&2\end{bmatrix},$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad (P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}(-1)^n&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad (n\geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_n&=A^n\boldsymbol{p}_0=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}\boldsymbol{p}_0\\&=\begin{bmatrix}2&2&1\\2&1&0\\5&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&1\\2&3&-2\\-1&-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\\&=\boxed{\begin{bmatrix}-2(-1)^n-3\\-2(-1)^n\\-5(-1)^n-3\end{bmatrix}}.\end{aligned}$$

注：上式は $n\geqq 1$ で成り立つが，$n=0$ では成り立たない.

(2)

$$\boldsymbol{p}_{n+1}=\underbrace{\begin{bmatrix}-3&1&3\\2&2&-3\\-1&1&1\end{bmatrix}}_{A}\boldsymbol{p}_n$$

A の固有値は $\lambda_1=1$（重根）, $\lambda_2=-2$（単根）の 2 つ. λ_1 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ の 1 種類のみ. そこで A をジョルダンの標準形に変形する. $(A-\lambda_1E)\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_1$ とおき $\boldsymbol{x}_1'=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ を得る. さらに, λ_2 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix}5\\-1\\2\end{bmatrix}$. 以上より次式が得られる.

$$P=\begin{bmatrix}1&0&5\\1&1&-1\\1&0&2\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&0&5\\3&3&-6\\1&0&-1\end{bmatrix},$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix},\qquad (P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{bmatrix}\quad (n\geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_n&=A^n\boldsymbol{p}_0=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}\boldsymbol{p}_0\\&=\begin{bmatrix}1&0&5\\1&1&-1\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&0&5\\3&3&-6\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\boxed{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5(-2)^n+3n+1\\-(-2)^n+3n+4\\2(-2)^n+3n+1\end{bmatrix}}.\end{aligned}$$

(3)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ u_{n+1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{p}_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{p}_n}$$

A の固有値は $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 3$ の 4 つ．したがって A は対角化できる．それぞれに対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$．これより次式が得られる．

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad (P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \quad (n \geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_n &= A^n \boldsymbol{p}_0 = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \boldsymbol{p}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(-1)^n - 2^{n+1} + 3^{n+1} \\ 4(-1)^n - 2^n \quad + 3^{n+1} \\ -4(-1)^n + 2^n \\ -2 \cdot 3^{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6.5 (1) 式の両辺を 2 倍しておく．

$$[x\ y\ z] \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}} + 2 = 0$$

A の固有値は $\lambda_1 = -\sqrt{2},\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \sqrt{2}$．$A$ を対角化する直交行列 P により $\boldsymbol{r} = P \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}'}$ とすると

$${}^t\boldsymbol{r}'\,{}^tPAP\boldsymbol{r}' + 2 = {}^t\boldsymbol{r}' \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}' + 2 = 0.$$

ゆえに

$$-\sqrt{2}({x'}^2-{z'}^2)+2=0 \quad \to \quad \frac{{x'}^2}{\sqrt{2}}-\frac{{z'}^2}{\sqrt{2}}=1.$$

これは P.157 の 2 次曲面の分類 (10) に相当する．　答．双曲柱

(2)

$$ {}^t\boldsymbol{r}\underbrace{\begin{bmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\1&-2&2\end{bmatrix}}_{A}\boldsymbol{r}+2\underbrace{[3\ 3/2\ 0]}_{{}^t\boldsymbol{b}}\boldsymbol{r}=0$$

A の固有値は $\lambda_1=-3$（単根）, $\lambda_2=3$（重根）．λ_1 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$,
λ_2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}$ の 2 種類．$\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が直交していない（$\boldsymbol{x}_1$ とはどちらも直交）ので,

$$\boldsymbol{x}_3'=\boldsymbol{x}_3-\frac{(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2)}\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}-\frac{-2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3'$ を単位ベクトルにして並べて P を作る．

$$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\\-2/\sqrt{6}&0&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r}=P\boldsymbol{r}'$ より

$${}^t\boldsymbol{r}'{}^tPAP\boldsymbol{r}'+2{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{r}'={}^t\boldsymbol{r}'\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\boldsymbol{r}'+[0\ 3\sqrt{2}\ 3\sqrt{3}]\boldsymbol{r}'=0.$$

ゆえに

$$-3{x'}^2+3{y'}^2+3{z'}^2+3\sqrt{2}y'+3\sqrt{3}z'=0 \quad \to \quad -{x'}^2+\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(z'+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

これは P.156 の 2 次曲面の分類 (2) に相当する．　答．1 葉双曲面

(3)

$${}^t\boldsymbol{r}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&4\\1&1&4\\4&4&-2\end{bmatrix}}_{A}\boldsymbol{r}+2\underbrace{[6\ 6\ 6]}_{{}^t\boldsymbol{b}}\boldsymbol{r}+18=0$$

A の固有値は $-6, 0, 6$．それぞれの固有値に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

これらを単位ベクトルにして並べて P を作る.

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r} = P\boldsymbol{r}'$ より

$${}^t\boldsymbol{r}'{}^tPAP\boldsymbol{r}' + 2{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{r}' + 18 = {}^t\boldsymbol{r}' \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{r}' + [0\ 0\ 12\sqrt{3}]\boldsymbol{r}' + 18 = 0.$$

ゆえに

$$-6x'^2 + 6z'^2 + 12\sqrt{3}z' + 18 = 0 \quad \rightarrow \quad -x'^2 + (z' + \sqrt{3})^2 = 0.$$

これは P.157 の 2 次曲面の分類 (13) に相当する.　答. 交わる 2 平面

(4)

$${}^t\boldsymbol{r} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 8 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{r} + 2 \underbrace{[3/2\ 3/2\ 0]}_{{}^t\boldsymbol{b}} \boldsymbol{r} + 1 = 0$$

A の固有値は 3, 6, 9. それぞれの固有値に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
これらを単位ベクトルにして並べて P を作る.

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r} = P\boldsymbol{r}'$ より

$${}^t\boldsymbol{r}'{}^tPAP\boldsymbol{r}' + 2{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{r}' + 1 = {}^t\boldsymbol{r}' \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \boldsymbol{r}' + [3\sqrt{2}\ 0\ 0]\boldsymbol{r}' + 1 = 0.$$

ゆえに

$$3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 + 3\sqrt{2}x' + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2y'^2 + 3z'^2 = \frac{1}{6}.$$

これは P.157 の 2 次曲面の分類 (1) に相当する.　答. 楕円面

6.6 問題で与えられた n 次正方行列 A を改めて A_n と書くことにする. また $|A_n - \lambda E|$ を λ に関する n 次多項式とみなしたとき, λ^{n-1} の係数を $(-1)^{n-1}p_n$, λ^{n-2} の係数を $(-1)^{n-2}q_n$ と

する．このとき

$$
\begin{aligned}
|A_{n+1}-\lambda E| &= \underbrace{\begin{vmatrix} a-\lambda & b & & & \\ c & a-\lambda & b & & \\ & c & a-\lambda & b & \\ & & c & a-\lambda & b \\ & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{vmatrix}}_{\text{第 1 行で余因子展開}} \\
&=(a-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} a-\lambda & b & & \\ c & a-\lambda & b & \\ & c & a-\lambda & b \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{vmatrix}}_{|A_n-\lambda E|} - b\underbrace{\begin{vmatrix} c & b & & \\ & a-\lambda & b & \\ & c & a-\lambda & b \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{vmatrix}}_{\text{第 1 行で余因子展開}} \\
&=(a-\lambda)|A_n-\lambda E| - bc\underbrace{\begin{vmatrix} a-\lambda & b & \\ c & a-\lambda & b \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{vmatrix}}_{|A_{n-1}-\lambda E|} \\
&=(a-\lambda)|A_n-\lambda E| - bc\,|A_{n-1}-\lambda E|
\end{aligned}
$$

となる（行列式中で空白の部分の成分はすべて 0 とする）．ゆえに

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n+1}\lambda^{n+1}+(-1)^n p_{n+1}\lambda^n+(-1)^{n-1}q_{n+1}\lambda^{n-1}+\cdots \\
=&(a-\lambda)\big((-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}p_n\lambda^{n-1}+(-1)^{n-2}q_n\lambda^{n-2}+\cdots\big) \\
&\quad -bc\big((-1)^{n-1}\lambda^{n-1}+(-1)^{n-2}p_{n-1}\lambda^{n-2}+(-1)^{n-3}q_{n-1}\lambda^{n-3}+\cdots\big).
\end{aligned}
$$

両辺の λ^n, λ^{n-1} の係数をそれぞれ比較すると

$$
\begin{aligned}
(-1)^n p_{n+1} &= (-1)^n a-(-1)^{n-1}p_n, \\
(-1)^{n-1}q_{n+1} &= (-1)^{n-1}ap_n-(-1)^{n-2}q_n-(-1)^{n-1}bc.
\end{aligned}
$$

よって

$$
p_{n+1}-p_n=a, \tag{a}
$$

$$
q_{n+1}-q_n=ap_n-bc. \tag{b}
$$

さらに $n=1$ のとき $|A_1|=a-\lambda$ より $p_1=a$, $q_1=0$．(a) より

$$
p_n=(p_n-p_{n-1})+(p_{n-1}-p_{n-2})+\cdots+(p_2-p_1)+p_1=na.
$$

(b) より

$$
\begin{aligned}
q_n &= (q_n-q_{n-1})+(q_{n-1}-q_{n-2})+\cdots+(q_2-q_1)+q_1 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(ap_i-bc)=\sum_{i=1}^{n-1}(a^2i-bc)=\frac{n(n-1)}{2}a^2-(n-1)bc.
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
|A_n-\lambda E| &= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda) \\
&= (-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\Big(\sum_{1\leqq i\leqq n}\lambda_i\Big)\lambda^{n-1}+(-1)^{n-2}\Big(\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\lambda_i\lambda_j\Big)\lambda^{n-2}+\cdots
\end{aligned}
$$

より

$$p_n = \sum_{1 \leqq i \leqq n} \lambda_i, \qquad q_n = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \lambda_i \lambda_j.$$

p_n より $\displaystyle\sum_{1 \leqq i \leqq n} \lambda_i = na = \operatorname{tr} A$ が得られ，定理 6.11 の前半の確認となっている．また q_n より

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \lambda_i \lambda_j = \frac{n(n-1)}{2} a^2 - (n-1)bc$$

が得られる．さらに

$$\sum_{1 \leqq i \leqq n} \lambda_i^2 = \Big(\sum_{1 \leqq i \leqq n} \lambda_i \Big)^2 - 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \lambda_i \lambda_j = na^2 + 2(n-1)bc$$

となる．

6.7 (1) 行列式 $|A|$ が 0 であることと A が正則でないことは同値である．また，$|A|$ は A の固有値の積に等しいので，$|A|$ が 0 であることと，固有値に 0 が含まれることは同値である．

(2) A が正則なので (1) より $\lambda \neq 0$ である．$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると $\boldsymbol{x} = \lambda A^{-1} \boldsymbol{x}$ となる．さらに両辺を λ で割ると $A^{-1}\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$ が得られる．したがって λ^{-1} は A^{-1} の固有値である．

6.8 問題で与えられた行列を A とする．

(1) A の固有値は $-i$, $+i$ で，それぞれに対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$．これらは互いに直交するので，単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U^* A U = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

(2) A の固有値は 1, $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$ で，それぞれに対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2}i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2}i \end{bmatrix}$．これらは互いに直交するので，単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad U^* A U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(3) A の固有値は $\lambda_1 = -1$（重根），$\lambda_2 = 1$（重根）．λ_1 に対する固有ベクトルの一般形は s, t を任意の数として $\begin{bmatrix} s \\ t \\ is \\ -it \end{bmatrix}$ なので，直交する 2 つの固有ベクトルとして例えば

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}$ をとる．また，λ_2 に対する固有ベクトルの一般形は $\begin{bmatrix} s \\ t \\ -is \\ it \end{bmatrix}$ なので，直交する 2 つの固有ベクトルとして例えば $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$ をとる．$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ と $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ 同士も直交するので，すべてを単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & i \end{bmatrix}, \qquad U^*AU = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) A の固有値は $\lambda_1 = -\sqrt{2}i$（重根），$\lambda_2 = \sqrt{2}i$（重根）．λ_1 に対する固有ベクトルの一般形は s, t を任意の数として $\begin{bmatrix} s \\ t \\ s - i\sqrt{2}t \\ -i\sqrt{2}s - t \end{bmatrix}$ なので，直交する 2 つの固有ベクトルとして例えば $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2}i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ をとる．λ_2 に対する固有ベクトルは，A が実行列で $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ なので $\boldsymbol{x}_3 = \overline{\boldsymbol{x}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4 = \overline{\boldsymbol{x}_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$（演習問題 6.1 (2) の解答の注を参照のこと）．$\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_4$ は互いに直交するので，すべてを単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}i & 0 & -\sqrt{2}i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2}i & 0 & \sqrt{2}i & 0 \end{bmatrix}, \qquad U^*AU = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

6.9 ユニタリ行列 U の固有値，固有ベクトルをそれぞれ λ, $\boldsymbol{x}$ とすると，$U\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である．$U^*U = {}^t\overline{U}U = E$ より

$$(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{x}) = {}^t(\overline{U\boldsymbol{x}})\,U\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,{}^t\overline{U}U\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}E\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2.$$

一方

$$(\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = {}^t(\overline{\lambda\boldsymbol{x}})\lambda\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\lambda{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = |\lambda|^2|\boldsymbol{x}|^2.$$

$(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x})$, $|\boldsymbol{x}| \neq 0$ より $|\lambda|^2 = 1$，したがって $|\lambda| = 1$.

6.10 (1) A の固有値は -3, -1, 2 で，対応する固有ベクトルはそれぞれ $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

よって

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3X + Y + Z \\ -5X - Y \\ 3X + 2Y + Z \end{bmatrix}$$

成分同士の等式を考えれば次式も明らか.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\dot{X} + \dot{Y} + \dot{Z} \\ -5\dot{X} - \dot{Y} \\ 3\dot{X} + 2\dot{Y} + \dot{Z} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}$$

(1) の式にこの関係を代入する.

$$P \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = AP \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = P^{-1}AP \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

(3)

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \\ Z(0) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ゆえに $X(0) = 0$, $Y(0) = -2$, $Z(0) = 3$.

②より

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

ゆえに $\dot{X} = -3X$, $\dot{Y} = -Y$, $\dot{Z} = 2Z$．これより a, b, c を任意定数として

$$X(t) = ae^{-3t}, \qquad Y(t) = be^{-t}, \qquad Z(t) = ce^{2t}.$$

また，$X(0) = a = 0$, $Y(0) = b = -2$, $Z(0) = c = 3$.

以上より $X(t) = 0$, $Y(t) = -2e^{-t}$, $Z(t) = 3e^{2t}$

(4)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^{-t} \\ 3e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 3e^{2t} \\ 2e^{-t} \\ -4e^{-t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$$

$x(t) = -2e^{-t} + 3e^{2t}$, $y(t) = 2e^{-t}$, $z(t) = -4e^{-t} + 3e^{2t}$

6.11 連立微分方程式を行列で表すと

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

となる．A の固有値は $\lambda_1 = 2$（重根），$\lambda_2 = 1$（単根）．λ_1 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$ の 1 種類．そこで P.141 の 3 次正方行列のジョルダンの標準形への変形手続き (i) を用いる．

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_1$$

とおき，たとえば $\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ を得る．一方，λ_2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$．以上より $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2$ を並べて P を作る．

$$P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

ここで前問のように

$$\begin{bmatrix}X(t)\\ Y(t)\\ Z(t)\end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{bmatrix}$$

とおく．すると $X(t), Y(t), Z(t)$ に関して以下の連立微分方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\\ \dot{Z}\end{bmatrix} = P^{-1}AP\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}$$

つまり

$$\text{(a)}\quad \dot{X} = 2X + Y, \qquad \text{(b)}\quad \dot{Y} = 2Y, \qquad \text{(c)}\quad \dot{Z} = Z$$

が得られる．(b), (c) を先に解いて $Y(t) = be^{2t}$, $Z(t) = ce^{t}$ が得られ，(a) に Y を代入して $\dot{X} = 2X + be^{2t}$ となる．ゆえに問題のヒントより $X(t) = (a + bt)e^{2t}$ となる．ただし，a, b, c は任意定数である．また，

$$\begin{bmatrix}X(0)\\ Y(0)\\ Z(0)\end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\\ z(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\ 4\\ 5\end{bmatrix}$$

より $X(0) = a = -3$, $Y(0) = b = 4$, $Z(0) = c = 5$ となる．以上より

$$X(t) = (4t - 3)e^{2t}, \qquad Y(t) = 4e^{2t}, \qquad Z(t) = 5e^{t}$$

が得られる．よって

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}X(t)\\ Y(t)\\ Z(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(4t-3)e^{2t}\\ 4e^{2t}\\ 5e^{t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(4t-3)e^{2t} + 5e^{t}\\ 4e^{2t} - 5e^{t}\\ (8t-10)e^{2t} + 10e^{t}\end{bmatrix}.$$

答．$x(t) = (4t - 3)e^{2t} + 5e^{t}$, $y(t) = 4e^{2t} - 5e^{t}$, $z(t) = (8t - 10)e^{2t} + 10e^{t}$