ライブラリ新数学大系＝E5

理工基礎　線形代数

問題解答

高橋大輔 著

サイエンス社

1章問題解答

1.1 たとえば $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1.2 $(1,2)$ 成分は -1, 第 3 列ベクトルは $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, 第 1 行ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

1.3 3 次元．第 2 成分は -2.

1.4 $6! = 720$ 通り．

1.5 成分ごとに考えればよい．たとえば (4) で両辺の (i,j) 成分を考えると，左辺は $(\lambda+\mu)a_{ij}$ となり右辺は $\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}$ となるので等しい．

1.6 (1) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6i & -3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1-2i & 4 \\ -2i & 5 \end{bmatrix}$ (3) $C = B - A = \begin{bmatrix} -1-i & 2 \\ 2i & 1 \end{bmatrix}$

1.7 (1) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 4i & 6 \\ i & -2 & 3i \\ -1 & -2i & -3 \end{bmatrix}$

1.8 (2) $A(B+C) = AB + BC$ について．A を $m \times l$, B, C を $l \times n$ 行列とする．

$$\begin{aligned} A(B+C) \text{ の } (i,j) \text{ 成分} &= \sum_{k=1}^{l} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{l} a_{ik}c_{kj} = AB + AC \text{ の } (i,j) \text{ 成分} \end{aligned}$$

$(A+B)C = AC + BC$ について．A, B を $m \times l$, C を $l \times n$ 行列とする．

$$\begin{aligned} (A+B)C \text{ の } (i,j) \text{ 成分} &= \sum_{k=1}^{l} (a_{ik} + b_{ik})c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{l} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{l} b_{ik}c_{kj} = AC + BC \text{ の } (i,j) \text{ 成分} \end{aligned}$$

(3) A を $m \times l$, B を $l \times n$ 行列とする．$\lambda(AB)$, $(\lambda A)B$, $A(\lambda B)$ の (i,j) 成分はそれぞれ $\lambda \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$, $\sum_{k=1}^{l} (\lambda a_{ik})b_{kj}$, $\sum_{k=1}^{l} a_{ik}(\lambda b_{kj})$．三者が等しいのは明らか．

1.9 (1) と (3)．一般に $AB \neq BA$ なので (2) と (4) は成立しない．

1.10 (1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 4 & 21 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

1.11 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする．$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3(a+2c) & 3(b+2d) \end{bmatrix} = O$．ゆえに $a = -2c$, $b = -2d$. 答. s, t を任意の数として $B = \begin{bmatrix} -2s & -2t \\ s & t \end{bmatrix}$

1.12 (1) $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 5i & 2+4i \end{bmatrix}$

1.13 AB の (i,j) の成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$．これは $A\boldsymbol{b}_j$ の第 i 成分，$\boldsymbol{a}_iB$ の第 j 成分に等しい．よって等式が成り立つ．

1.14 AE の (i,j) 成分 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$, EB の (i,j) 成分 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}b_{kj} = b_{ij}$.

1.15 $E\boldsymbol{x}$の第 i 成分 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}x_k = x_i$ より $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$．$\boldsymbol{y}E$ の第 i 成分 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k\delta_{ki} = y_i$ より $\boldsymbol{y}E = \boldsymbol{y}$.

1.16 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする．$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -a-c & -b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $a=-1$, $b=-2$, $c=1$, $d=1$．よって $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$．$BA = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$.

1.17 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$,　$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

1.18 ${}^t(ABC) = {}^t((AB)C) = {}^tC\,{}^t(AB) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA$.

1.19 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,　${}^t(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$,　${}^tB\,{}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$,
${}^tA\,{}^tB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1.20 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. ${}^t\boldsymbol{x}\,A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$.

1.21 (1) $2\cdot(2-i)+(-i)\cdot 1 = 4-3i$　(2) $1\cdot 2+(-2)\cdot 1 = 0$
(3) $2\cdot(2i)+(-1-2i)\cdot 3+1\cdot(-1) = -4-2i$.

1.22 任意の複素数 a, b に対して $\overline{a+b} = \overline{a}+\overline{b}$, $\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$ が成立するので，$\overline{a_1b_1+\cdots+a_nb_n} = \overline{a_1}\,\overline{b_1}+\cdots+\overline{a_n}\,\overline{b_n}$ が成立する．

(1) $\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} = \overline{\overline{x_1}y_1+\cdots+\overline{x_n}y_n} = x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n} = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$

(2) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \overline{x_1}(y_1+z_1)+\cdots+\overline{x_n}(y_n+z_n) = (\overline{x_1}y_1+\cdots+\overline{x_n}y_n)+(\overline{x_1}z_1+\cdots+\overline{x_n}z_n) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$
$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\overline{x_1+y_1})z_1+\cdots+(\overline{x_n+y_n})z_n = (\overline{x_1}z_1+\cdots+\overline{x_n}z_n)+(\overline{y_1}z_1+\cdots+\overline{y_n}z_n) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

(3) $(c\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \overline{cx_1}y_1+\cdots+\overline{cx_n}y_n = \overline{c}(\overline{x_1}y_1+\cdots+\overline{x_n}y_n) = \overline{c}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$
$(\boldsymbol{x},c\boldsymbol{y}) = \overline{x_1}(cy_1)+\cdots+\overline{x_n}(cy_n) = c(\overline{x_1}y_1+\cdots+\overline{x_n}y_n) = c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

(4) 任意の複素数 z は a, b を実数として $z = a+ib$ と表すことができる．また $\overline{z}z = (a-ib)(a+ib) = a^2+b^2 \geqq 0$ となる．等号が成立するのは $a=b=0$ すなわち

$z=0$ のときのみ．$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\overline{x_1}x_1+\cdots+\overline{x_n}x_n$ であり，$\overline{x_i}x_i \geqq 0$ であるので $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqq 0$. また $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ となるのは，すべての i に対して $\overline{x_i}x_i=0$ となるとき，すなわち $x_i=0$ のときであり，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる．

1.23 (1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は実数であるので問題 1.22 (1) より $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.
(2) $\bar{c}=c$ と問題 1.22 より明らか．

1.24 (1) $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{1^2+(-i)i}=\sqrt{2}$
(3) $\sqrt{2^2+(1-i)(1+i)+0^2+(-2)^2}=\sqrt{10}$

1.25 $|\boldsymbol{x}|$ が実数なので問題 1.23 (2) より $(\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|,\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})/|\boldsymbol{x}|^2=1$. したがって $\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ の大きさは1．

1.26 ${}^tA=A$ は明らか．A^k について与式が成立しているとする．このとき

$$A^{k+1}=A\,A^k=\begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1^k & & & 0 \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1^{k+1} & & & 0 \\ & a_2^{k+1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n^{k+1} \end{bmatrix}$$

が成立する．また $k=1$ のとき明らかに与式が成立する．したがって数学的帰納法より任意の k に対して与式が成立する．

1.27 $A=\begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{bmatrix}$ とする．

$A+B=\begin{bmatrix} a_1+b_1 & & & 0 \\ & a_2+b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n+b_n \end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix} a_1b_1 & & & 0 \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_nb_n \end{bmatrix}$ となり，ともに対角行列である．

1.28 上三角行列同士の和が上三角行列になることは明らか．積については

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \cdots\cdots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} & \cdots & a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2n}b_{nn} \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & 0 & & & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

となり，やはり上三角行列になる．

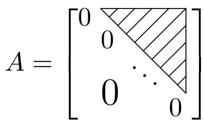
また，上三角行列と下三角行列の和が一般に三角行列でないのは明らか．積についても

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots & \\ \text{\Large 0} & & & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_{11} & & & \text{\Large 0} \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \cdots\cdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}
$$

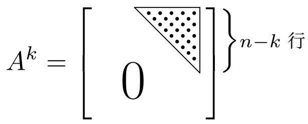
$$
= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{12}b_{22} + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{1n}b_{nn} \\ a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{22}b_{22} + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{2n}b_{nn} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}
$$

となるので一般に三角行列ではない．

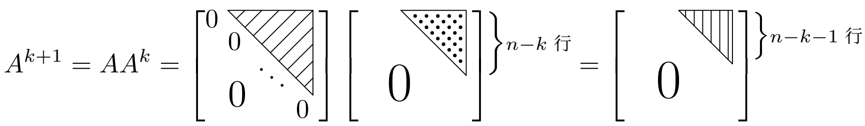
1.29 上三角行列の場合についてのみ示す．A は



の形をしている．このとき A^k $(1 \leqq k \leqq n)$ が



の形になることは,



より数学的帰納法によって示される．したがって $A^n = O$.

1 章演習問題解答

1.1 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 2i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4+2i \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3i \\ -3 \\ 2i \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 13 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 4-i \\ 3-2i \end{bmatrix} [i \ 1] = \begin{bmatrix} 1+4i & 4-i \\ 2+3i & 3-2i \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. ゆえに $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^5 = 3^4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \end{bmatrix}$.

1.2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする．$A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix} = O$. $a+d=0$ のとき $d=-a$, $a^2+bc=0$. $b=0$ なら $a=0$, $b \neq 0$ なら $c = -a^2/b$. $a+d \neq 0$ のとき $b=c=0$. ゆえに $a=d=0$ となり $a+d \neq 0$ に矛盾する.

答. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ か $\begin{bmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{bmatrix}$ $(b \neq 0)$ のどちらか

1.3 $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 = A^2+B^2$,
$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)^2 = (A+B)(A^2+B^2) = A^3+BA^2+AB^2+B^3 = A^3+A^2B+AB^2+B^3$,
$(A+B)^4 = (A+B)^2(A+B)^2 = (A^2+B^2)^2 = A^4+A^2B^2+B^2A^2+B^4 = A^4+2A^2B^2+B^4$.
答. ア $=0$, イ $=1$, ウ $=1$, エ $=0$, オ $=2$, カ $=0$

1.4 $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2+2i \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2i \\ 2+2i \\ -3 \end{bmatrix}$
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1 \cdot 2i + (1-i) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1+2i$
$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (-2i) \cdot 1 + 0 \cdot (1+i) + 1 \cdot (-1) = -1-2i$
$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2+(1-i)(1+i)+(-1)^2} = 2$ $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{(-2i)(2i)+0^2+1^2} = \sqrt{5}$

1.5 $|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2 = (3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) = 9(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+6(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+6(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+4(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) = 9+6+6i+6-6i+16 = 37$
答. $\sqrt{37}$

1.6 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$ とすると $AB = \begin{bmatrix} b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ となる．したがって

$$A^k = \begin{array}{c} \scriptstyle k+1\ \text{列} \\ \begin{bmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \large 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ \Large 0 & & & & \end{bmatrix} \end{array} \quad (1 \leqq k \leqq n-1), \qquad O \quad (n \leqq k)$$

1.7 ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA,\ {}^t({}^tA) = A$ より ${}^t(A{}^tA) = {}^t({}^tA){}^tA = A\,{}^tA, \quad {}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA.$

1.8 $E^k = E,\ A^kE^l = A^k$ などにより $(A+E)^m$ は A を変数 x, E を 1 に置き換えた多項式 $(x+1)^m$ と同じ計算にしたがう．${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数とすると $(x+1)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k x^k.$

答. $c_k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$

1.9 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とする．$A\boldsymbol{x}$ の第 k 成分は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i$. これが $\boldsymbol{x}$ によらず常に $3x_k$ となる．したがって $a_{ki} = 3\delta_{ki}$. すべての k でこのことが成立しなければならないので $A = 3E$.

1.10 (1) 左辺の (i,j) 成分 $= \overline{\overline{a_{ij}}} = a_{ij} =$ 右辺の (i,j) 成分

(2) 左辺の (i,j) 成分 $= \overline{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}}\,\overline{b_{kj}} =$ 右辺の (i,j) 成分

(3) 左辺の第 i 成分 $= \overline{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}}\,\overline{x_k} =$ 右辺の第 i 成分

(4) $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(\overline{A\boldsymbol{x}})\boldsymbol{y} = {}^t(\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{y} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,{}^t\overline{A}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, {}^t\overline{A}\boldsymbol{y})$

1.11 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ とする．

$${}^tC = {}^t\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & b_{11} & b_{12} \\ \multicolumn{2}{c}{0} & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & & \\ a_{12} & a_{22} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & b_{11} & b_{21} \\ \multicolumn{2}{c}{0} & b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tA & O \\ O & {}^tB \end{bmatrix},$$

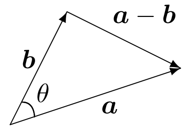
$$C^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} & & \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & b_{11}^2 + b_{12}b_{21} & b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} \\ \multicolumn{2}{c}{0} & b_{21}b_{11} + b_{22}b_{21} & b_{21}b_{12} + b_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & O \\ O & B^2 \end{bmatrix}.$$

同様にして $CD = \begin{bmatrix} A^2 & AB \\ B^2 & BA \end{bmatrix},\ D^2 = \begin{bmatrix} A^2 + B^2 & AB + BA \\ AB + BA & A^2 + B^2 \end{bmatrix}.$

2章問題解答

2.1 速度，加速度，力，電場，磁場など．

2.2 余弦定理より $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$．　ゆえに $(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2 = a_x^2+a_y^2+b_x^2+b_y^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$．
したがって $a_xb_x+a_yb_y=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$．



2.3 $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c-t\\c+t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$．ゆえに $y=-x+2c$．

$\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t-c\\t+c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$．ゆえに $y=x+2c$．

$\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c+2t\\-c+t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$．ゆえに $y=(x-3c)/2$．

$\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t+2c\\-t+c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$．ゆえに $y=-x+3c$．

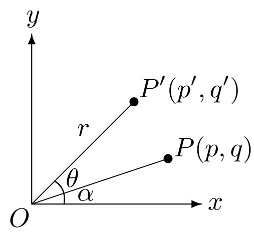
答．A によって直線 $x=c,\ y=c$ はそれぞれ直線 $y=-x+2c,\ y=x+2c$ に，B によって直線 $y=(x-3c)/2,\ y=-x+3c$ に写像される．

2.4 $\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\t^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\2t+t^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$．ゆえに $y=x^2+2x=(x+1)^2-1$．

答．放物線 $y=(x+1)^2-1$

2.5 たとえば $A=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ とすると，$\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ より直線 $y=x$ 上の点はすべて原点に写像されることになり，1対1写像にならない．

2.6 図より $p=r\cos\alpha,\ q=r\sin\alpha$ であり
$p'=r\cos(\theta+\alpha)=r(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)=p\cos\theta-q\sin\theta$,
$q'=r\sin(\theta+\alpha)=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=p\sin\theta+q\cos\theta$.
したがって $\begin{bmatrix}p'\\q'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$．
A^n は $n\theta$ だけの回転移動を表すので



$$A^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta&-\sin n\theta\\\sin n\theta&\cos n\theta\end{bmatrix}.$$

2.7 (1) $\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi&\sin\frac{2}{3}\pi\\\sin\frac{2}{3}\pi&-\cos\frac{2}{3}\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2&\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2&1/2\end{bmatrix}$

2.8 $[x\ y]\to\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$．

2.9 $\begin{bmatrix}p'\\q'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p+2q\\p+q\end{bmatrix}$．これを $p,\ q$ について解いて，$\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-p'+2q'\\p'-q'\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p'\\ q'\end{bmatrix}$．よって $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ の逆行列は $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ の逆行列も同様にして $\begin{bmatrix}1/2 & 1/6\\ 0 & 1/3\end{bmatrix}$ と求められる．

2.10 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}$ とする．$BA=\begin{bmatrix}pa+qc & pb+qd\\ ra+sc & rb+sd\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. ゆえに

$$pa+qc=1 \quad ①,\quad pb+qd=0 \quad ②,\quad ra+sc=0 \quad ③,\quad rb+sd=1 \quad ④.$$

①, ②より

$$p(ad-bc)=d,\qquad q(ad-bc)=-b.$$

③, ④より

$$r(ad-bc)=-c,\qquad s(ad-bc)=a.$$

もし $ad-bc=0$ ならば $a=b=c=d=0$ すなわち $A=O$ となり，そもそも $BA=E$ が成り立たない．よって $ad-bc\neq 0$ であり，これを

$$AB=\begin{bmatrix}pa+rb & qa+sb\\ pc+rd & qc+sd\end{bmatrix}$$

に代入すると確かに $AB=E$ となる．

2.11 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ とする．どの成分も 0 でなく，列ベクトルが平行なら $\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{bmatrix}$ $(c\neq 0)$ と表すことができる．したがって A の第 1, 2 行ベクトルはそれぞれ $a_{12}\begin{bmatrix}c & 1\end{bmatrix}$, $a_{22}\begin{bmatrix}c & 1\end{bmatrix}$ となる．ゆえに両者は平行．同様にして行ベクトルが平行ならば列ベクトルも平行であることを示せる．この法則の対偶をとると，列ベクトルが平行でないなら行ベクトルも平行でない．

2.12 (1) 行列式 2, 逆行列 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$ (2) 行列式 4, 逆行列 $\begin{bmatrix}1/2 & -1/4\\ -1/2 & 3/4\end{bmatrix}$

(3) 行列式 0

2.13 $\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{bmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{bmatrix}x_3-x_1\\ y_3-y_1\end{bmatrix}$. これを列ベクトルとする行列 A は

$$A=\begin{bmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1\\ y_2-y_1 & y_3-y_1\end{bmatrix}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\text{三角形 } P_1P_2P_3\text{の面積} &= \frac{1}{2}|A| \text{ の絶対値}\\ &= \frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|\\ &= \frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|.\end{aligned}$$

2.14 (1) $|E|=1\cdot 1-0\cdot 0=1$ (2) $|{}^tA|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=|A|$

(3) $|A^{-1}|=\begin{vmatrix}a_{22}/|A| & -a_{12}/|A|\\ -a_{21}/|A| & a_{11}/|A|\end{vmatrix}=\dfrac{1}{|A|^2}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\dfrac{1}{|A|}$

2.15 問題 2.14 (2) の $|{}^tA| = |A|$ より明らか.

2.16 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ とする． $AB = \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$ なので
$|AB| = (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) = (ad-bc)(ps-qr) = |A||B|$.

2.17 (1) $AB = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $|AB| = -14$. $|A| = -7$, $|B| = 2$ なので成立.

(2) $AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$, $|AB| = 0$. $|A| = 0$, $|B| = 6$ なので成立.

2.18 $|A| = -2$ なので $|A^n| = |A|^n = (-2)^n$.

2章演習問題解答

2.1 (1) $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$．ゆえに $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\cos\theta = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．ゆえに $\theta = \dfrac{5}{6}\pi$.

(2) $\cos\theta = \dfrac{\sin 3}{1\cdot 1} = \sin 3 = \cos(\dfrac{\pi}{2}-3)$．ゆえに $\theta = 3-\dfrac{\pi}{2}$ (注：$0 < 3-\dfrac{\pi}{2} < \pi$).

2.2 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$　原点を中心に縦横とも 2 倍に拡大する写像

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$　直線 $y=x$ に関する対称移動

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$　各点を，その点を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点に移す写像

2.3 (1) 点 (p,q) を点 $(p,0)$ に写像するので $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 直線が x 軸となす角を θ とすると $a=\tan\theta$．問題の線形変換は，角 $-\theta$ だけ回転し，(1) の写像を行い，さらに角 θ だけ回転する一連の写像に等しい．したがって

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix}.$$

2.4 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 3t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7t-2 \\ 2t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ より $y = \dfrac{2}{7}x - \dfrac{3}{7}$．　答．直線 $y = \dfrac{2}{7}x - \dfrac{3}{7}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$　答．3 点 $(3,0)$, $(6,0)$, $(6,3)$ を頂点とする三角形

2.5 任意の直線は，その直線が通る点 (p,q) と方向ベクトル $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ を指定すればよい．このとき直線上の任意の点の位置ベクトルはパラメータ t を用いて $\begin{bmatrix} \alpha t+p \\ \beta t+q \end{bmatrix}$ と表すことができる．線形変換を表す行列を $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすれば，変換によって位置ベクトルが

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha t+p \\ \beta t+q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}\alpha+a_{12}\beta)t+a_{11}p+a_{12}q \\ (a_{21}\alpha+a_{22}\beta)t+a_{21}p+a_{22}q \end{bmatrix}$$

である点に写像される．これは一般に点 $(a_{11}p+a_{12}q, a_{21}p+a_{22}q)$ を通り，方向ベクトル $\begin{bmatrix} a_{11}\alpha+a_{12}\beta \\ a_{21}\alpha+a_{22}\beta \end{bmatrix}$ の直線を表す．ただし，$a_{11}\alpha+a_{12}\beta = a_{21}\alpha+a_{22}\beta = 0$ のときは直線にならず，一点 $(a_{11}p+a_{12}q, a_{21}p+a_{22}q)$ に写像される．

2.6 (1) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+2a_{12} \\ a_{21}+2a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. ゆえに $a_{11} = -2a_{12} - 1$, $a_{21} = -2a_{22} + 4$.

答. s, t を任意の実数として $\begin{bmatrix} -2s-1 & s \\ -2t+4 & t \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} -2s-1 & s \\ -2t+4 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6s-3 \\ -6t+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. ゆえに $s = -\dfrac{5}{6}$, $t = \dfrac{5}{3}$. 答. $\begin{bmatrix} 2/3 & -5/6 \\ 2/3 & 5/3 \end{bmatrix}$

(3) $P(p_x, p_y)$, $Q(q_x, q_y)$, $P'(p'_x, p'_y)$, $Q'(q'_x, q'_y)$ とする．P を P', Q を Q' に写像するには

$$\underbrace{\begin{array}{cc} \boldsymbol{p}' & \boldsymbol{q}' \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} p'_x & q'_x \\ p'_y & q'_y \end{bmatrix}} \end{array}}_{T'} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{array}{cc} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} p_x & q_x \\ p_y & q_y \end{bmatrix}} \end{array}}_{T}$$

を満たす行列 A が存在すればよい．もし行列 T に逆行列が存在する，すなわち $|T| = p_x q_y - q_x p_y \neq 0$ ならば，両辺に右から T^{-1} をかけることができ，$A = T'T^{-1}$ となって必ず A が存在する．$|T| \neq 0$ は定理 2.2 より $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p} \not\parallel \boldsymbol{q}$ に等価なので点 P, Q, O が同一直線上にないことに等しい．

$|T| = 0$ のとき $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ か，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ か，$\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{q}$ のどれかになるが，今は $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{q}$. このとき適当に 0 でない定数 c を定めて $\boldsymbol{q} = c\boldsymbol{p}$ と表せる．すると $\begin{bmatrix} p'_x & q'_x \\ p'_y & q'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p_x + a_{12}p_y & c(a_{11}p_x + a_{12}p_y) \\ a_{21}p_x + a_{22}p_y & c(a_{21}p_x + a_{22}p_y) \end{bmatrix}$ なので $\boldsymbol{q}' = c\boldsymbol{p}'$ であれば A が存在する．

以上をまとめると (i) 点 P, Q と原点 O が同一直線上にない，(ii) $\overrightarrow{OQ} = c\,\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ'} = c\,\overrightarrow{OP'}$ となる，のどちらかの場合に線形変換が存在する．

2.7 楕円上の点はパラメータ θ を用いて $(2\cos\theta, \sin\theta)$ と表すことができる．線形変換によって $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\theta + a\sin\theta \\ 2b\cos\theta + c\sin\theta \end{bmatrix}$ となるので，半径 2 の円上に移されるためには，任意の θ に対して $(2\cos\theta + a\sin\theta)^2 + (2b\cos\theta + c\sin\theta)^2 = 4$ すなわち $4(1+b^2)\cos^2\theta + 4(a+bc)\cos\theta\sin\theta + (a^2+c^2)\sin^2\theta = 4$ でなければならない．したがって $1+b^2 = 1$, $a+bc = 0$, $a^2+c^2 = 4$ なので，$a = b = 0$, $c = \pm 2$.

2.8 (1) $x = 1$, $y = -1$　(2) $x = y = 0$　(3) t を任意の数として $x = t+1$, $y = t$

2.9 (1) 行列式 $= 3$, 逆行列 $= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$　(2) 行列式 $= 0$, 逆行列なし

(3) 行列式 $= -4$, 逆行列 $= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$　(4) 行列式 $= 2$, 逆行列 $= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

2.10 $A^{-1} = A$ より $A^2 = E$. 逆に $A^2 = E$ なら定理 2.3 より $|A| \neq 0$ なので逆行列が存在し $A^{-1} = A$ となる．したがって $A^2 = E$ となる行列を求めればよい．$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると $A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

・ $a+d \neq 0$ のとき: $b=c=0, a=\pm 1, d=\pm 1$. $a+d \neq 0$ を考慮して $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ か $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

・ $a+d=0$ のとき: $a^2+bc=1$ より $a=\pm\sqrt{1-bc}$（ただし $bc \leqq 1$）. したがって $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1-bc} \end{bmatrix}$.

答. $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$, あるいは $bc \leqq 1$ を満たす実数 b, c を用いて $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1-bc} \end{bmatrix}$（複号同順）

2.11 $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ より $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$. したがって面積は $\dfrac{|-5|}{2} = \dfrac{5}{2}$.

2.12 三角形の頂点をそれぞれ P, Q, R とし，それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ とする．2次正方行列 $T=[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}]$ を考えると $S=|T|$ の絶対値/2となる．線形変換により写像された各点の位置ベクトルは $A\boldsymbol{p}, A\boldsymbol{q}, A\boldsymbol{r}$ であり，そのときの三角形の面積は，$T'=[A\boldsymbol{q}-A\boldsymbol{p}\ A\boldsymbol{r}-A\boldsymbol{p}]=AT$ とすると $|T'|$ の絶対値/2 となる．$|T'|=|AT|=|A||T|$ なので，写像後の三角形の面積は $|A|$ の絶対値 $\times S$.

3 章問題解答

3.1 (1) $x=1,\ y=2$ (2) $x=-1,\ y=0$ (3) $x=1+i,\ y=1-i$

3.2 (1) $\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

3.3 (1) $\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\end{bmatrix}$ 答．1 個

(2) $\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&0&-3\end{bmatrix}$ 答．なし

(3) $\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$ 答．無限個

3.4 ③について：行基本変形 I $\sim$ III はどれも変形前に戻ることのできる操作であり，変形前に戻るためには再び行基本変形を用いればよい．すなわち，③の形にたどり着く行列は，③に対して適当な行基本変形を何回か施すことによって得られなければならない．③の形の行列を一般に $\begin{bmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\0&0&0\end{bmatrix}$ $(\alpha\neq0)$ とすると，行基本変形を何回か施した後は一般に $\begin{bmatrix}a\alpha&a\beta&a\gamma\\b\alpha&b\beta&b\gamma\end{bmatrix}$ となる．ただし a,b の少なくとも一方は 0 でない．以上より③の形にたどり着く行列の一般形は，$p\neq0$ として $\begin{bmatrix}p&q&r\\cp&cq&cr\end{bmatrix}$ か $\begin{bmatrix}cp&cq&cr\\p&q&r\end{bmatrix}$ のどちらかである．

④について：同様の考察により④の形にたどり着く行列の一般形は $p\neq0,\ r\neq0$ として $\begin{bmatrix}0&p&q\\0&cp&cq+r\end{bmatrix}$ か $\begin{bmatrix}0&cp&cq+r\\0&p&q\end{bmatrix}$ のどちらかである．

3.5 (1) $\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-1&3\end{bmatrix}$ 答．2 (2) $\begin{bmatrix}i&2&1\\2&-4i&-2i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}i&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 答．1

(3) $\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&2\\0&0\end{bmatrix}$ 答．1 (4) $\begin{bmatrix}1+i&1\\2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+i&1\\0&-1+i\end{bmatrix}$ 答．2

3.6 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ とする．

行基本変形 I によって第 1 行を c 倍 $(c\neq0)$ した行列の行列式は $\begin{vmatrix}ca_{11}&ca_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=c|A|$.

行基本変形 II によって第 1 行の c 倍を第 2 行に加えると $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}+ca_{11}&a_{22}+ca_{12}\end{vmatrix}$
$=a_{11}(a_{22}+ca_{12})-a_{12}(a_{21}+ca_{11})=|A|$.

行基本変形 III によって第 1 行と第 2 行を入れ替えると $\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{11}&a_{12}\end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}=-|A|$.

どの場合も行列式が 0 であるか否かは，行基本変形によって変わらない．

3.7 (1) $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ とすると，仮定より $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$．この等式について，$a_{12}=a_{22}=0$, $a_{12}\neq0$, $a_{22}\neq0$ の 3 通りに場合分けして考える．$a_{12}=a_{22}=0$ の

ときはただちに $|A|=0$ でり，$\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$ となる．$a_{12}\neq 0$ のときは $c=a_{11}/a_{12}$ とおくと $a_{11}=ca_{12}$, $|A|=0$ より $a_{21}=ca_{22}$ なので $\boldsymbol{\alpha}_1=c\boldsymbol{\alpha}_2$ となる．$a_{22}\neq 0$ のときは $c=a_{21}/a_{22}$ とおくと $a_{21}=ca_{22}$, $|A|=0$ より $a_{11}=ca_{12}$ なので $\boldsymbol{\alpha}_1=c\boldsymbol{\alpha}_2$ となる．また特に $c=0$ のとき $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$ となる．

(2) $A\neq O$ なので (1) より ① $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$，② $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，③ $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}_1=c\boldsymbol{\alpha}_2$ $(c\neq 0)$ のどれかになる．①のときは $p=0$, $q=1$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_2$，②のときは $p=1$, $q=0$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1$，③のときは $p=c$, $q=1$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_2$ とすればよい．また逆に $A=\begin{bmatrix}p\boldsymbol{\alpha} & q\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}$ ならば $A\neq O$, $|A|=0$ は明らか.

3.8 定理 3.4 の条件でない場合であるから

- A の階数が 2 未満である
- $|A|=0$ である
- A が正則でない，すなわち A に逆行列が存在しない
- 列ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ が $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$ か $\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$ か $\boldsymbol{\alpha}_1=c\boldsymbol{\alpha}_2$ である

のいずれかが成立すればよい．なお，定理 3.4 の 4 つの条件が等価なので，上の条件もお互い等価である.

3.9 $|{}^tA|=|A|$ より A の第 1, 2 行ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ とすると $\boldsymbol{\beta}_1\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\beta}_2\neq\mathbf{0}$ かつ $\boldsymbol{\beta}_1\neq c\boldsymbol{\beta}_2$.

3.10 (1) $A^n=\begin{bmatrix}1/2^n & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ なので $x_n=x_0/2^n$, $y_n=y_0$.

(2) A による線形変換は角 θ の回転とみなせるので $A^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$. したがって $x_n=x_0\cos n\theta-y_0\sin n\theta$, $y_n=x_0\sin n\theta+y_0\cos n\theta$.

3.11 (1) $\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-2=0$ より $\lambda=-2,\ 1$.

(2) $\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=0$ より $\lambda=1\pm i$.

(3) $\begin{vmatrix}1-\lambda & -i\\ i & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda=0$ より $\lambda=0,\ 2$.

3.12 (1) $\lambda=-2$ の場合: $\begin{bmatrix}4 & -1\\ 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x-y\\ 4x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$

$\lambda=1$ の場合: $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-y\\ 4(x-y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

(2) $\lambda=1\pm i$ に対して $\begin{bmatrix}\mp i & -1\\ 1 & \mp i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mp i(x\mp iy)\\ x\mp iy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}\pm i\\ 1\end{bmatrix}$ (複号同順)

(3) $\lambda=0$ の場合: $\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-iy\\ i(x-iy)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda=2$ の場合: $\begin{bmatrix}-1 & -i\\ i & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(x+iy)\\ i(x+iy)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}$

注：固有ベクトルには定数倍の不定性があり，どれでも正解．他の問題も同様.

3.13 (3.8) より $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$. したがって $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_0 + 2y_0 \\ -x_0 - y_0 \end{bmatrix}$.

ゆえに

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= (3x_0 + 2y_0)\left(\frac{3}{5}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - (x_0 + y_0)\left(\frac{4}{5}\right)^n \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \{(3x_0 + 2y_0)3^n - 2(x_0 + y_0)4^n\}/5^n \\ -(3x_0 + 2y_0)3^n + 3(x_0 + y_0)4^n\}/5^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

答. $x_n = \dfrac{1}{5^n}\{(3x_0 + 2y_0)3^n - 2(x_0 + y_0)4^n\}, \quad y_n = \dfrac{1}{5^n}\{-(3x_0 + 2y_0)3^n + 3(x_0 + y_0)4^n\}$

3.14 (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ とする．$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ より $\lambda = 2,\ 3$.

$\lambda = 2$ のとき $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x-y) \\ -2(x-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 3$ のとき $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+y \\ -2x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ なので $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ とすると $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ より

$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. したがって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= A^n(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2) = \alpha 2^n \boldsymbol{x}_1 + \beta 3^n \boldsymbol{x}_2 \\ &= 3 \cdot 2^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n - 3^n \\ 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

答. $x_n = 3 \cdot 2^n - 3^n, \quad y_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$

(2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ とする．$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$ より $\lambda = \pm i$.

$\lambda = i$ のとき $\begin{bmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1+i)(x-(1-i)y) \\ -(x-(1-i)y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$.

同様に $\lambda = -i$ のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix}$.

ゆえに

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= \frac{1+i}{2} i^n \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1-i}{2}(-i)^n \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^n + (-i)^n \\ \dfrac{1+i}{2} i^n + \dfrac{1-i}{2}(-i)^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{in\pi/2} + e^{-in\pi/2} \\ \dfrac{1+i}{2} e^{in\pi/2} + \dfrac{1-i}{2} e^{-in\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\dfrac{n}{2}\pi \\ \cos\dfrac{n}{2}\pi - \sin\dfrac{n}{2}\pi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

答. $x_n = 2\cos\dfrac{n}{2}\pi, \quad y_n = \cos\dfrac{n}{2}\pi - \sin\dfrac{n}{2}\pi$

3.15 問題 3.14 解答の固有値と固有ベクトルを利用する．

(1) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n - 3^n \\ 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{bmatrix}$$

(2) $P = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1-i \\ -i & 1+i \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^n & 0 \\ 0 & (-i)^n \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1-i \\ -i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i^n + (-i)^n \\ \dfrac{1+i}{2} i^n + \dfrac{1-i}{2}(-i)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\dfrac{n}{2}\pi \\ \cos\dfrac{n}{2}\pi - \sin\dfrac{n}{2}\pi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.16 (1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ より $\lambda = \pm\sqrt{2} - 1$.

$\lambda = \sqrt{2} - 1$ のとき $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}(x - \sqrt{2}y) \\ x - \sqrt{2}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

同様に $\lambda = -\sqrt{2} - 1$ のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$.

したがって $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. また $P^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$ であり,

$$\begin{aligned} A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}-1 \end{bmatrix}^n \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2}(\alpha^n + \beta^n) & 2(\alpha^n - \beta^n) \\ \alpha^n - \beta^n & \sqrt{2}(\alpha^n + \beta^n) \end{bmatrix} \quad (\alpha = \sqrt{2} - 1,\ \beta = -\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

(2) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ より $\lambda = 1,\ 5$.

$\lambda = 1$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

同様に $\lambda = 5$ のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

したがって $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. また $P^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ であり,

$$A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^n \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5^n + 3 & 3(5^n - 1) \\ 5^n - 1 & 3 \cdot 5^n + 1 \end{bmatrix}.$$

注：固有ベクトルに定数倍の不定性があり，さらにその固有ベクトルをどの順で列ベクトルとして並べるかによって P が変わるが，どれでも正解．他の問題も同様.

3.17 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ を数学的帰納法により示す．まず，$n = 1$ のとき与式は成り立つ．さらに $n = k$ のとき与式が成り立つと仮定すると，$n = k + 1$ のとき

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{bmatrix}$$

となる．

3.18 (1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ より $\lambda = 3$ (重根).

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 種類.

$(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ とすると $\begin{bmatrix} x-y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. これより

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -i-\lambda & 2 \\ 1 & i-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$ より $\lambda = \pm 1$.

$\lambda = -1$ のとき $\begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i)(x+(1+i)y) \\ x+(1+i)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}$. 同様にして $\lambda = 1$ のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$. これより

$$P = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & i \\ 4i & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$ より $\lambda = 5$ (重根).

$\begin{bmatrix} 2 & i \\ 4i & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+iy \\ 2i(2x+iy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ の 1 種類.

$(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ とすると $\begin{bmatrix} 2x+iy \\ 2i(2x+iy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$. これより

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -i/2 \\ 2 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & i \\ 4i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

注：問題 3.16 の注にあるように P には一定の自由度があり，上の (2) でも P によって対角に並ぶ固有値の順序が変わり得るが，どれでも正解．他の問題も同様.

3.19 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ より $\lambda = 4$ (重根).

固有ベクトルは $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x-2y) \\ -(x-2y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 種類.

そこで $(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ すなわち $\begin{bmatrix} -2(x-2y) \\ -(x-2y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ となる.

ゆえに

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & n \cdot 4^{n-1} \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4^n + 6n \cdot 4^{n-1} \\ 2 \cdot 4^n + 3n \cdot 4^{n-1} \end{bmatrix}.$$

3.20 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. ゆえに $A = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} P^{-1} = P(\lambda E)P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda E$.

3.21 (1) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0$ より $\lambda = 0,\ 2$.

$\lambda = 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 2$ のとき同様に $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

確かに $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となり $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交する.

(2) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0$ より $\lambda = 0,\ 5$.

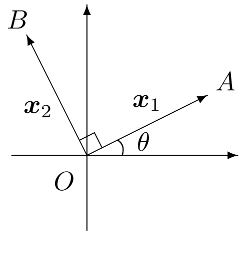
$\lambda = 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ -2(x-2y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 5$ のとき同様に $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

確かに $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となり $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交する.

3.22 P の列ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を図のように平面上の点 A, B の位置ベクトルと考える. まず $|\boldsymbol{x}_1| = 1$ なので OA が x 軸となす角を θ とすると $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ となる. 一方 $|\boldsymbol{x}_2| = 1$, $\boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{x}_2$ なので点 B は点 A を $\pm\pi/2$ だけ回転して得られる. ゆえに

$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/2) & -\sin(\pm\pi/2) \\ \sin(\pm\pi/2) & \cos(\pm\pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mp\sin\theta \\ \pm\cos\theta \end{bmatrix}$.



3.23 ${}^t(PQ)PQ = {}^tQ({}^tPP)Q = {}^tQQ = E$ より明らか.

3.24 問題 3.21 の固有値・固有ベクトルを利用する.

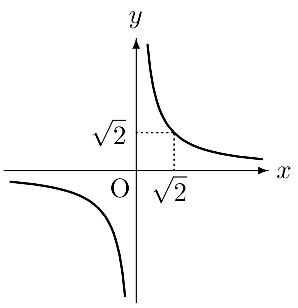
(1) $\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{\boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. ゆえに $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ となり

$$ {}^tPAP = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. $$

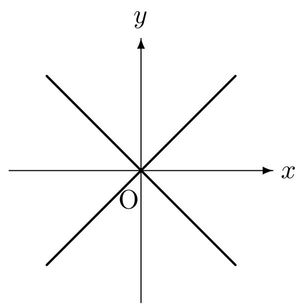
(2) $\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. ゆえに $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ となり

$$ {}^tPAP = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}. $$

3.25 (1) $2xy = 4$ すなわち $xy = 2$.　答. 双曲線
(2) $x^2 - y^2 = 0$. ゆえに $x = \pm y$.　答. 2 直線



(1)



(2)

3.26 たとえば $x^2 = 1$ とすると $x = \pm 1$ となって平行 2 直線が得られる．このとき $a = 1,\ f = -1,$ それ以外 0．その他に $(2x - y)^2 = 4$ ならば $y = 2x \pm 2$ となってやはり得られる．このとき $4x^2 - 4xy + y^2 - 4 = 0$ なので $a = 4,\ b = -2,\ c = 1,\ f = -4,$ それ以外 0.

3.27 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ とすると P.67 の対角化より ${}^tPAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ となる．もし $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ならば ${}^tPAP = O$ より $A = PO{}^tP = O$ となる．これは $a \sim c$ のすべてが 0 になることはないという条件に反する．したがって $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ にはならない.

(1) (3.21) は $\lambda_1\Big(s + \dfrac{d'}{\lambda_1}\Big)^2 + \lambda_2\Big(t + \dfrac{e'}{\lambda_2}\Big)^2 = \underbrace{\dfrac{d'^2}{\lambda_1} + \dfrac{e'^2}{\lambda_2} - f}_{r}$ と書き換えられる.

- $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ r > 0$ か $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ r < 0$ のとき楕円.
- $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ r = 0$ か $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ r = 0$ のとき一点 $\Big(-\dfrac{d'}{\lambda_1}, -\dfrac{e'}{\lambda_2}\Big)$.
- $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ r < 0$ か $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ r > 0$ のとき 点なし.
- $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ r \neq 0$ か $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ r \neq 0$ のとき双曲線.

- $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ r = 0$ か $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ r = 0$ のとき交わる2直線.

(2)
- $d' \neq 0$ のとき (3.21) は $s = -\dfrac{\lambda_2}{2d'}\Big(t + \dfrac{e'}{\lambda_2}\Big)^2 + \dfrac{1}{2d'}\Big(\dfrac{e'^2}{\lambda_2} - f\Big)$ と書き換えられる．したがって放物線.
- $d' = 0$ のとき (3.21) は $\lambda_2\Big(t + \dfrac{e'}{\lambda_2}\Big)^2 = \underbrace{\dfrac{e'^2}{\lambda_2} - f}_{r}$ と書き換えられる.

  $\lambda_2 > 0,\ r > 0$ あるいは $\lambda_2 < 0,\ r < 0$ のとき平行2直線.
  $\lambda_2 > 0,\ r < 0$ あるいは $\lambda_2 < 0,\ r > 0$ のとき点なし.
  $r = 0$ のとき1直線.

(3) (2) と同様にして $r = \dfrac{d'^2}{\lambda_1} - f$ とすると
- $e' \neq 0$ のとき放物線.
- $e' = 0$ のとき
  $\lambda_1 > 0,\ r > 0$ か $\lambda_1 < 0,\ r < 0$ のとき平行2直線.
  $\lambda_1 > 0,\ r < 0$ か $\lambda_1 < 0,\ r > 0$ のとき点なし.
  $r = 0$ のとき1直線.

3.28 (1) $[x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0$ より $\lambda = 0,\ 2$.

単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. そこで

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{bmatrix}$$

とし，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ とすると，

$$[s\ t]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} + \sqrt{2}\,[2\ 0]\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = 2t^2 + 2\sqrt{2}s = 0$$

が得られる．したがって元の方程式が表す図形は，原点を中心に放物線 $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}y^2$ を $\dfrac{\pi}{4}$ だけ右回りに回転したものとなる.

(2) $[x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8\,[\sqrt{3}\ 1]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 64 = 0$ より $\lambda = 4,\ 16$.

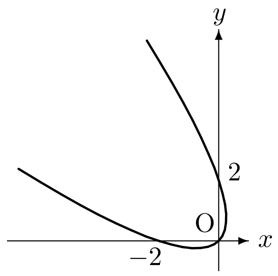
単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$. そこで

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix}$$

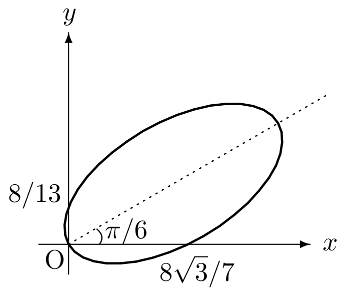
とし，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ とすると，

$$\begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = 4s^2 + 16t^2 - 16s = 0$$

が得られる．したがって元の方程式が表す図形は，原点を中心に楕円 $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ を $\pi/6$ だけ左回りに回転したものとなる．



(1)



(2)

3章演習問題解答

3.1 (1) $\begin{cases} 2x-3y=-2 \\ 7y=7 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x=1/2 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=0 \\ 0=0 \end{cases} \quad \to \quad t$ を任意の数として $\begin{cases} x=t \\ y=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,t \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (1+i)x-(1-i)y=1 \\ 0=2i \end{cases} \quad \to$ 解なし

3.2 (1) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix}$ 　階数 2

(2) 以下では m, n を任意の整数とする.

・$\theta=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ のとき $\begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ 　階数 2

・$\theta\neq\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ のとき $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \cos 2\theta/\cos\theta \end{bmatrix}$

ゆえに $\theta=\dfrac{1}{2}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ のとき階数 1, それ以外のとき 2.

以上をまとめて $\theta=\dfrac{2n+1}{4}$ のとき階数 1, それ以外のとき 2.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^3 & a^5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & a^2(a-1) & a^3(a^2-1) \end{bmatrix}$

ゆえに $a=0,\,1$ のとき階数 1, それ以外のとき 2.

3.3 (1) 行列式 -2, 逆行列 $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

(2) 行列式 a^3-1, 　$a^3-1=0$ すなわち $a=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ のとき逆行列なし, それ以外の場合 $\dfrac{1}{a^3-1}\begin{bmatrix} a^2 & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$.

(3) 行列式 1, 逆行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta+i\cos\theta & \cos\theta+i\sin\theta \end{bmatrix}$.

3.4 (1) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2=0$ より $\lambda=\pm\sqrt{2}$.

$\lambda=\sqrt{2}$ のとき

$$\begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -2-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (2-\sqrt{2})(x-(1+\sqrt{2}/2)y) \\ 2(x-(1+\sqrt{2}/2)y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$. 同様に $\lambda=-\sqrt{2}$ のとき $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$.

したがって $P=\begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (対角化).

(2) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ より $\lambda = 1$ (重根).

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+y) \\ -2(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ の 1 種類. そこで $(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ すなわち

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+y) \\ -2(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$. したがって $P = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (三角化).

(3) $\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1 = 0$ より $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$.
$\lambda = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき

$$\begin{bmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sin\theta(x-iy) \\ \sin\theta(x-iy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$. 同様に $\lambda = \cos\theta - i\sin\theta$ のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

したがって $P = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (対角化).

3.5 (1) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ より $\lambda = 1, 5$.

対応する固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. したがって

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3\cdot 5^n - 1)/2 \\ (3\cdot 5^n + 1)/4 \end{bmatrix}.$$

(2) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$ より $\lambda = \pm 2i$.

対応する固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2(1+i) \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2(1-i) \\ -1 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 2(1+i) & 2(1-i) \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -i & -2(1+i) \\ i & -2(1-i) \end{bmatrix}$. したがって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(1+i) & 2(1-i) \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2i)^n & 0 \\ 0 & (-2i)^n \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -i & -2(1+i) \\ i & -2(1-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(1-5i)(2i)^n + 2(1+5i)(-2i)^n \\ (2+3i)(2i)^n + (2-3i)(-2i)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n(\cos\frac{n}{2}\pi + 5\sin\frac{n}{2}\pi) \\ 2^n(\cos\frac{n}{2}\pi - \frac{3}{2}\sin\frac{n}{2}\pi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(3) $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ より $\lambda = 3$ (重根).

対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ の 1 種類だけ.

$(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ であり $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. したがって

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n + 2n \cdot 3^{n-1} \\ 3^n - 2n \cdot 3^{n-1} \end{bmatrix}.$$

3.6 (1) 第 1 式より $y_n = -\frac{5}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n$ となり，これを第 2 式に代入して

$$-\frac{5}{2}x_{n+2} + \frac{1}{2}x_{n+1} = \frac{3}{5}x_n + \frac{6}{5}\Big(-\frac{5}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n\Big).$$

ゆえに $x_{n+2} - \frac{7}{5}x_{n+1} + \frac{12}{25}x_n = 0$.　ア $-\frac{7}{5}$, イ $\frac{12}{25}$

(2) $x_{n+2} - \alpha x_{n+1} = \beta(x_{n+1} - \alpha x_n)$ とすると

$$x_{n+2} - (\alpha + \beta)x_{n+1} + \alpha\beta x_n = 0.$$

(1) より $\alpha + \beta = \frac{7}{5}$, $\alpha\beta = \frac{12}{25}$ となり $\alpha, \beta = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$.

$$x_{n+2} - \frac{3}{5}x_{n+1} = \frac{4}{5}\Big(x_{n+1} - \frac{3}{5}x_n\Big)$$

より $x_{n+1} - \frac{3}{5}x_n = \Big(\frac{4}{5}\Big)^n\Big(x_1 - \frac{3}{5}x_0\Big)$.

$$x_{n+1} - \gamma\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} = \frac{3}{5}\Big(x_n - \gamma\Big(\frac{4}{5}\Big)^n\Big)$$

とおくと $\gamma = 5x_1 - 3x_0$. したがって

$$\begin{aligned} x_n &= \Big(\frac{3}{5}\Big)^n(x_0 - (5x_1 - 3x_0)) + (5x_1 - 3x_0)\Big(\frac{4}{5}\Big)^n \\ &= (4x_0 - 5x_1)\Big(\frac{3}{5}\Big)^n + (5x_1 - 3x_0)\Big(\frac{4}{5}\Big)^n. \end{aligned}$$

$x_1 = \frac{1}{5}(x_0 - 2y_0)$ より $x_n = (3x_0 + 2y_0)\Big(\frac{3}{5}\Big)^n - 2(x_0 + y_0)\Big(\frac{4}{5}\Big)^n$.

(3) $y_n = -\frac{5}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = -(3x_0 + 2y_0)\Big(\frac{3}{5}\Big)^n + 3(x_0 + y_0)\Big(\frac{4}{5}\Big)^n$

3.7 (1) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ より $\lambda = -1, -2$. 対応する固有ベクトルはそれぞれ

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. したがって $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ より $x = X + 2Y$, $y = X + 3Y$. ゆえに $\dot{x} = \dot{X} + 2\dot{Y}$, $\dot{y} = \dot{X} + 3\dot{Y}$.

したがって $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix}$. ゆえに (1) より $P \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = AP \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$.

両辺に P^{-1} を左からかけて $\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = P^{-1}AP \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$.

(3) ②より $\dot{X} = -X$, $\dot{Y} = -2Y$. したがって $X(t) = Ae^{-t}$, $Y(t) = Be^{-2t}$ (A, B は任意定数). $x = X + 2Y = Ae^{-t} + 2Be^{-2t}$, $y = X + 3Y = Ae^{-t} + 3Be^{-2t}$.

(4) $x(0) = A + 2B = 1$, $y(0) = A + 3B = 2$. これを A, B について解いて $A = -1$, $B = 1$. ゆえに $x = -e^{-t} + 2e^{-2t}$, $y = -e^{-t} + 3e^{-2t}$.

3.8 $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. $\quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ より $\lambda = -4$ (重根).

対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 種類. $(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ より $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = P^{-1}AP \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4X + Y \\ -4Y \end{bmatrix}.$$

$\dot{Y} = -4Y$ より $Y = Be^{-4t}$. $\dot{X} = -4X + Be^{-4t}$ より $X = (A + Bt)e^{-4t}$. ゆえに

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A + Bt)e^{-4t} \\ Be^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B + Bt)e^{-4t} \\ (A + Bt)e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

$x(0) = A + B = 2$, $y(0) = A = -1$ より $B = 3$.
答. $x = (2 + 3t)e^{-4t}$, $y = (-1 + 3t)e^{-4t}$

3.9 (1) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ より $\lambda = -1, 3$. 対応する単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 答. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ より $\lambda = -1, 4$. 対応する単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. 答. $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5 = 0$ より $\lambda = \pm\sqrt{5}$. 対応する単位固有ベクトルはそれぞれ

$\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} + 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} - 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

答. $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \dfrac{-2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \sqrt{5+\sqrt{5}} & \sqrt{5-\sqrt{5}} \\ \sqrt{5-\sqrt{5}} & -\sqrt{5+\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

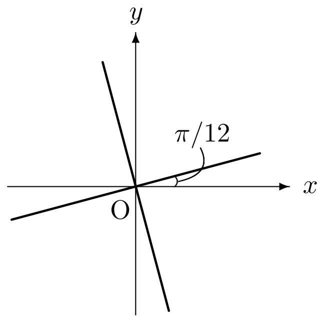
3.10 (1) $[x\ y]\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$ $\quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$ より $\lambda = \pm 2.$

対応する単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ とすると $[s\ t]\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = 0$ となり，$-2s^2 + 2t^2 = 0.$

したがって元の方程式が表す図形は，原点を中心に，交わる 2 直線 $y = \pm x$ を $\pi/3$ だけ左に回転したものとなる．



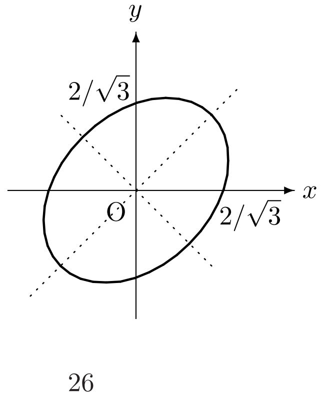
(2) $[x\ y]\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 4 = 0.$ $\quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ より $\lambda = 2,\ 4.$

対応する単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ とすると $[s\ t]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} - 4 = 0$ となり，$2s^2 + 4t^2 = 4.$

したがって元の方程式が表す図形は，原点を中心に楕円 $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ を $\pi/4$ だけ左に回転したものとなる．



(3) $[x\ y]\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+[3\ 3]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+4=0.$ $\qquad \begin{vmatrix}1-\lambda & 1/2\\ 1/2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+\dfrac{3}{4}=0$ より

$\lambda=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$. 対応する単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$.

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4)\\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4)\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}$ とすると

$$[s\ t]\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 3/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}[0\ 6]\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}+4=0$$

となり，$\dfrac{s^2}{2}+\dfrac{3}{2}t^2+3\sqrt{2}t+4=0$. ゆえに $s^2+3(t+\sqrt{2})^2=-2$ となり，点なし.

(4) $[x\ \ y]\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}-2\sqrt{5}\,[2\ \ 1]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0.$ $\qquad \begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-25=0$ より

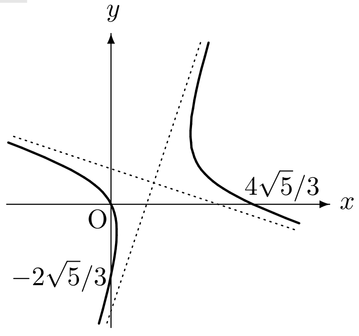
$\lambda=\pm 5$. 対応する単位固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$.

$$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\qquad(\theta=-\arctan 2)$$

$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}$ とすると

$$[s\ t]\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}-2[0\ 5]\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}=0$$

となり，$-5s^2+5t^2-10t=0$.
したがって元の方程式が表す図形は，原点を中心に双曲線 $x^2-(y-1)^2=-1$ を $\arctan 2$ だけ右に回転したものとなる.



3.11 (1) $\begin{bmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & d^2+bc\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a^2+ad & ab+bd\\ ac+cd & d^2+ad\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & r\end{bmatrix}=O$ より $r=ad-bc=|A|$.

(2) $|A^n|=|A|^n=0$ より $|A|=0$. したがって (1) より $A^2=(a+d)A$ ①.
ゆえに $A^n=(a+d)A^{n-1}=(a+d)^2A^{n-2}=\cdots=(a+d)^{n-1}A=O$.
最後の等式より $a+d=0$ か $A=O$. ゆえに①より $A^2=O$.

3.12 A が正則なので

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ -b_1 a_{21} + b_2 a_{11} \end{bmatrix}.$$

したがって公式が成立する.

4 章問題解答

4.1 (1) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

答. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

(2) 与式 $\to \begin{bmatrix} 2 & i & -1 & 5 \\ 1+i & 1 & 1 & 1+2i \\ 0 & -2 & 2i & -2i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & i & -1 & 5 \\ 1+i & 1 & 1 & 1+2i \\ 0 & 1 & -i & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & i & -1 & 5 \\ 1+i & 0 & 1+i & 1+i \\ 0 & 1 & -i & i \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 2 & i & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & i & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i & i \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

答. $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$

(3) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ゆえに $\begin{cases} x_1 - 3x_3 - 7x_4 = -2 \\ x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$

答. s, t を任意の数として $x_1 = 3s + 7t - 2$, $x_2 = -s - 5t + 1$, $x_3 = s$, $x_4 = t$

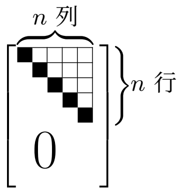
(4) 与式 $\to \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 答. 解なし

4.2 (1) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 階数 3

(2) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 階数 3

(3) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & -2n+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 階数 2（ただし $n \geqq 2$）

4.3
行数が m なので $r \leqq m$ は明らか．したがって $m \leqq n$ ならば $r \leqq n$.
一方，$n < m$ のとき，階段行列に変形して最も階数が大きい場合は図のように $r = n$ となる場合．よってやはり $r \leqq n$.



4.4 (1) 与式 $\to \begin{cases} 5y + 5z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = y + 2z \\ y = -z \end{cases}$

答. t を任意の数として $x = t$, $y = -t$, $z = t$

(2) 与式 $\to \begin{cases} x - y - 4z + u = 0 \\ 3y + 13z - 5u = 0 \\ 3y + 5z - 4u = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x - y - 4z + u = 0 \\ 3y + 13z - 5u = 0 \\ -8z + u = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = y + 4z - u \\ y = (-13z + 5u)/3 \\ z = u/8 \end{cases}$

答. t を任意の数として $x = 5t$, $y = 9t$, $z = t$, $u = 8t$

4.5 たとえば $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$ の場合，$c_1 \neq 0, c_2 = c_3 = \cdots = c_r = 0$ とすれば $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ が成立するので線形従属になる．また $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2$ の場合，$c_1 = -c_2 \neq 0, c_3 = c_4 = \cdots = c_r = 0$ とすると同様に線形従属であることがわかる．

4.6 (1) $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ より，$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_2 - 2c_3 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} c_1 + 3c_3 = 0 \\ c_2 - 2c_3 = 0 \\ 3c_2 - c_3 = 0 \end{cases}$

$\to \begin{cases} c_1 + 3c_3 = 0 \\ c_2 - 2c_3 = 0 \\ 5c_3 = 0 \end{cases} \to c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 答．線形独立

(2) $c_1 \begin{bmatrix} 1 & i & -i \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2i & 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1+i \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ より

$$\begin{cases} c_1 + 2ic_2 - c_3 - 2c_4 = 0 \\ ic_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 = 0 \\ -ic_1 + c_2 + (1+i)c_3 + 3c_4 = 0 \end{cases}$$

となる．すると定理 4.3 より $c_1 \sim c_4$ に非自明解が存在する．答．線形従属

(3) $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ とすると

$$c_1 = 0, \quad c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0, \quad \cdots, \quad c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0$$

となり，$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ が導かれる．答．線形独立

4.7 (a) 最初の 1 個だけ:
$x + 2y - 3z = -3$ より，s, t を任意の数として $x = -2s + 3t, y = s, z = t$ と表される無限個の解が存在する．$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ より $\operatorname{rank} A' = 1, \operatorname{rank} A = 1, n = 3$ であり定理 4.4 の (ii) の場合にあてはまる．

(b) 最初から 2 個の連立:
$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ より t を任意の数として $x = t - 3, y = t, z = t$ と表される無限個の解が存在する．$\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A = 2, n = 3$ であり (ii) の場合にあてはまる．

(c) 最初から 3 個の連立:
$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 10 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ より $x = -2, y = z = 1$ の一意解が存在する．
$\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A = 3, n = 3$ であり (iii) の場合にあてはまる．

(d) 最初から 4 個の連立:
$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 10 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ より $x=-2,\ y=z=1$ の一意解が存在する．

$\mathrm{rank}\,A' = \mathrm{rank}\,A = 3,\ n=3$ であり (iii) の場合にあてはまる．

(e) 最初から 5 個の連立:

$$A' = \begin{bmatrix}1&2&-3&-3\\-1&-1&2&3\\3&-1&1&-6\\2&3&2&1\\2&1&-5&3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&-3&-3\\0&1&-1&0\\0&-7&10&3\\0&-1&8&7\\0&-3&1&9\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&-3&-3\\0&1&-1&0\\0&0&3&3\\0&0&7&7\\0&0&-2&9\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&-3&-3\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&-2&9\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&11\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ より解なし．$\mathrm{rank}\,A' = 4,\ \mathrm{rank}\,A = 3$ であり (i) の場合にあてはまる．

4.8 (1) $$\begin{bmatrix}1&2&1&0\\-1&1&-2&0\\2&1&1&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&3&-1&0\\0&-3&-1&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&3&-1&0\\0&0&-2&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&3&-1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$ より $x=y=z=0$ の一意解．$\mathrm{rank}\,A=3,\ n=3$ で定理 4.5 の (i) の場合にあてはまる．

(2) $$\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\2&0&1&0\\-1&1&-2&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&0\\0&-2&3&0\\0&2&-3&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&0\\0&-2&3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&0\\0&1&-3/2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1&0&1/2&0\\0&1&-3/2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ より t を任意の数として $x=-\dfrac{t}{2},\ y=\dfrac{3}{2}t,\ z=t$ と表される無限個の解が存在する．$\mathrm{rank}\,A=2,\ n=3$ で定理 4.5 の (ii) の場合にあてはまる．

4.9 (1) $$PA = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&b&c\\2d&2e&2f\\g&h&i\end{bmatrix},$$

$$QA = \begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a-2g&b-2h&c-2i\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix},$$

$$RA = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d&e&f\\a&b&c\\g&h&i\end{bmatrix}.$$

(2) $$RQP = \begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&-2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$RQPA$ によって得られる行列の第 1 行は A の第 2 行の 2 倍であり，第 2 行は A の (第 1 行 − 第 3 行 × 2) であり，第 3 行は A の第 3 行と同じである．

(3) $P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad Q^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$R^n =$ R (n が奇数), E (n が偶数).

4.10 省略.

4.11 (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{答.} \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

答. 逆行列なし

(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 6 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -6 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{答.} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -5 \\ 6 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(4)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

答. 逆行列なし

4.12 逆行列を作る課程を並べる．ただしそのための行基本変形はひと通りではない．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{を第 2 行に}]{\substack{\text{第 2 行} \\ -\text{第 1 行}\times 2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行}\times 1/3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を第 1 行に}]{\text{第 1 行}+\text{第 2 行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad \text{したがって} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A = E.$$

答. たとえば $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \left(= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right)$

4.13 (1) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

(2) A^{-1}: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 　ゆえに $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

同様に $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

(3) $(AB)^{-1}$: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. 　よって $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

一方，$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = (AB)^{-1}$.

4 章演習問題解答

4.1 (1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 3 & -4 \\ 5 & -5 & -4 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

答. $x = 2,\ y = -1,\ z = 2$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i & 2 & 1+2i \\ 2 & 1 & -i & 2+i & 2-i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i & 2 & 1+2i \\ 0 & 1+2i & -2+i & -2+i & -5i \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i & 2 & 1+2i \\ 0 & 1 & i & i & -2-i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i & 1 & 2 \\ 0 & 1 & i & i & -2-i \end{bmatrix}$

答. s, t を任意の数として $x = is - t + 2,\ y = -is - it - 2 - i,\ z = s,\ u = t$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & -5 & 21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 　答. $x = 2,\ y = 2,\ z = -1$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 10 & -2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 　答. 解なし

4.2 (1) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 　答. 3

(2) 与式 $\to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 　答. 3

(3) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 　答. 2 （ただし $n \geqq 2$）

(4) 与式 $\to \begin{bmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ ①

(i) $a+b+c=0$ のとき $a=-b-c$ より ① $\to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & -b-c & b \\ b & c & -b-c \end{bmatrix}$ ②

(i–1) $c \neq 0$ のとき ② $\to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & -b-c & b \\ 0 & \dfrac{1}{c}(b^2+bc+c^2) & -\dfrac{1}{c}(b^2+bc+c^2) \end{bmatrix}$

$b^2+bc+c^2 = \left(b+\dfrac{c}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}c^2 > 0$ より 2 階

(i–2) $c=0$ のとき ② $\to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & b \\ b & 0 & -b \end{bmatrix} \to \begin{cases} 2\text{ 階} & (b \neq 0) \\ 0\text{ 階} & (b=0) \end{cases}$

(ii) $a+b+c \neq 0$ のとき ① $\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & c-b & a-b \end{bmatrix}$ ③

(ii–1) $a \neq c$ のとき ③ $\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & 0 & \dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(a-c)} \end{bmatrix} \to 3$ 階

(ii–2) $a=c$ のとき ③ $\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-c \\ 0 & c-b & c-b \end{bmatrix} \to \begin{cases} 3\text{ 階} & (b \neq c) \\ 1\text{ 階} & (b=c) \end{cases}$

答. $a+b+c=0$ のとき：$a=b=c=0$ なら 0 階，それ以外なら 2 階
$a+b+c \neq 0$ のとき：$a=b=c$ なら 1 階，それ以外なら 3 階

4.3 $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$ を書き換えると $A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$ となる．これを $c_1 \sim c_n$ に関する連立一次方程式とみなすと，一意解が存在するための必要十分条件は定理 4.5 より $\operatorname{rank} A = n$ であり，このとき $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ が一意解となる．

4.4 (1) 演習問題 4.3 より行列 A を $\begin{bmatrix} i & 1+i & 1+i \\ 1 & i & 2-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$ とし，A の階数を調べる．

$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1-i \\ 0 & -1+2i & 1 \\ 0 & -2i & -1-i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1-i \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & -2i & -1-i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1-i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -3-i \end{bmatrix}$ より
$\operatorname{rank} A = 3$. 答. 線形独立

(2) (1) と同様に $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.　$\operatorname{rank} A = 2 < 3$. 答. 線形従属

(3) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}}_{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) \end{bmatrix}$

$a=b$ か $b=c$ か $c=a$ なら $\mathrm{rank}\, A < 3$, $a \neq b$ かつ $b \neq c$ かつ $c \neq a$ なら $\mathrm{rank}\, A = 3$.

答. a, b, c が互いにすべて異なるなら線形独立，そうでなければ線形従属

4.5 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 9 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1-i & i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1-i & 0 & 1 & 0 \\ 1+i & 1-i & -2+i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1-i & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+i & -1 & -1-i & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1+i & -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & i & i & 0 \\ 0 & 1+i & -1 & -1-i & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1+i & -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & i & i & 0 \\ 0 & 0 & -i & -2i & 1-i & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2-3i & 2 & 2+i \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1+i & i \end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix} 2-3i & 2 & 2+i \\ -i & 1 & 1 \\ 2 & 1+i & i \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 答. $\begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.6 以下の Q はすべて n 次正方行列である.

I' ：第 i 列を c $(\neq 0)$ 倍するための行列

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

II' ：第 i 列の c 倍を第 j 列に加えるための行列

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & i & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & c & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (i<j), \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & j & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ j \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & c & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (i>j)$$

III$'$：第 i 列と第 j 列を入れ替えるための行列

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

4.7 (1) $P = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ とする．

左辺 $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+d-g & 2b+e-h & 2c+f-i \\ a+2d-g & b+2e-h & c+2f-i \\ a-d+2g & b-e+2h & c-f+2i \end{bmatrix}$,

右辺 $= \begin{bmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{bmatrix}$

各成分を比べて $\begin{cases} a+d-g=0, \ e-h=0, \ c-f+i=0 \\ a+d-g=0, \ b-h=0, \ c-f-i=0. \\ a-d+g=0, \ b-e=0, \ c-f-i=0 \end{cases}$

ゆえに $a=0$, $d=g$, $b=e=h$, $c=f$, $i=0$.

答. p, q, r を任意の数として $P = \begin{bmatrix} 0 & q & r \\ p & q & r \\ p & q & 0 \end{bmatrix}$

(2) P の逆行列を求める． $\begin{bmatrix} 0 & q & r & 1 & 0 & 0 \\ p & q & r & 0 & 1 & 0 \\ p & q & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & q & r & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ p & q & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & q & r & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & r & 0 & 1 & -1 \\ p & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & r & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

P^{-1} が存在するには $p \neq 0$, $q \neq 0$, $r \neq 0$. このとき $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/p & 1/p & 0 \\ 1/q & -1/q & 1/q \\ 0 & 1/r & -1/r \end{bmatrix}$.

(1) より $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. よって $(P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$.

$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots A(PP^{-1})AP = P^{-1}A^nP$.

ゆえに $A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2^n & 3^n-2^n & 2^n-3^n \\ 2^n-1 & 3^n-2^n+1 & 2^n-3^n \\ 2^n-1 & -2^n+1 & 2^n \end{bmatrix}$.

4.8 (1) $k=1$ のときは明らか． $k>1$ のとき $A^{k-1} \cdot A = E$. したがって $A^{-1} = A^{k-1}$ となり A^{-1} が存在するので正則.

(2) もし A が正則なら A^{-1} が存在する．すると,
$(A^{-k})A^k = (A^{-1}(\cdots(A^{-1}(A^{-1}A)A)\cdots)A) = E = O$ となり矛盾．ゆえに A は正則でない.

4.9 (1) <u>A_1 による写像の場合</u>

(a) x 軸上の任意の点は $(p,0,0)$ と表すことができる．$A_1\begin{bmatrix}p\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\-p\\p\end{bmatrix}$.

答．直線 $x=-y=z$

(b) 平面 $x=c$ 上の点は (c,q,r) と表すことができる．$A_1\begin{bmatrix}c\\q\\r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c+q+r\\-c+q\\c-q+r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p'\\q'\\r'\end{bmatrix}$

とする．すると $p'-2q'-r'=2c$ となる． 答．平面 $x-2y-z=2c$

(c) 平面 $z=c$ 上の点は (p,q,c) と表すことができる．$A_1\begin{bmatrix}p\\q\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p+q+c\\-p+q\\p-q+c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p'\\q'\\r'\end{bmatrix}$

とする．すると $r'=-q'+c$ となる． 答．平面 $y+z=c$

<u>A_2 による写像の場合</u>

A_1 による場合と同様にして，(a) 直線 $2x=y=2z$, (b) 平面 $x-y+z=0$, (c) 平面 $x-y+z=0$. **注**：(b), (c) の平面は同じであり，(a) の直線もその平面上にある．

(2) 任意の点 $P'(p',q',r')$ に対して $\begin{bmatrix}p'\\q'\\r'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}$ ① を満たす $P(p,q,r)$ が存在するなら，写像によって得られた点全体が空間全部をおおう．

A が正則のときは $\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}p'\\q'\\r'\end{bmatrix}$ とできるので必ず P が存在する．一方 A が正則でないとき，①を満たす P が存在しないような P' が必ず存在する．その理由は以下の通り．まず，A が正則でないので $\operatorname{rank}A<3$ である．ゆえに $BA=\begin{bmatrix}*&*&*\\*&*&*\\0&0&0\end{bmatrix}$ となるような，行基本変形を表す 3 次正則行列 B が存在する (P.88, $*$ は適当な数)．このとき①を p, q, r に関する連立一次方程式とみなして拡大係数行列 $A'=\begin{bmatrix}&p'\\A&q'\\&r'\end{bmatrix}$ を考える．$\begin{bmatrix}p'\\q'\\r'\end{bmatrix}=B^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ を満たす p', q', r' を考えると，B による行基本変形により $BA'=\begin{bmatrix}*&*&*&0\\*&*&*&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ となる．したがってこの P' に対しては①を満たす P が存在しない．

5 章問題解答

5.1 (1) $1\cdot 2+2\cdot 1=4$.

(2) $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 1}{3}+\dfrac{1\cdot 3+3\cdot 1}{2}+\dfrac{2\cdot 3+3\cdot 2}{1}=\dfrac{49}{3}$.

(3) i_1 をある数に定めたとき $i_2\sim i_n$ の与え方は $(n-1)!$ 通りある．したがって

$(n-1)!\displaystyle\sum_{i_1=1}^{n} i_1=\dfrac{(n+1)!}{2}$.

5.2 (1) -1 (2) 1 (3) -1 (4) -1

(5) 1 と n, 2 と $n-1$, $\cdots$ と互換を数えると全部で $\lfloor n/2\rfloor$ 個ある．($\lfloor x\rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す．) したがって与式の符号は $(-1)^{\lfloor n/2\rfloor}$.（あるいは $n=4m$ か $4m+1$ のとき 1, それ以外 -1.）

5.3 順列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ に対し，たとえば以下の互換を順に行えば，目的とする順列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ は左の数から確定していく．

$$\begin{aligned}&\text{左から 1 番目の数と } j_1 \text{ の互換} \to \text{左から 2 番目の数と } j_2 \text{ の互換} \to \cdots\\ &\quad\to \text{左から } n-1 \text{ 番目の数と } j_{n-1} \text{ の互換}\end{aligned}$$

ただし k 回目の手順で左から k 番目の数と j_k が等しいときはその互換を行わない．

5.4 (1) $3\cdot 1-2i\cdot i=5$ (2) $1\cdot 1\cdot 2-2\cdot 1\cdot(-2)=6$

(3) $1\cdot 1\cdot 1+i\cdot i\cdot i+2\cdot 2\cdot 2-(1\cdot i\cdot 2+i\cdot 2\cdot 1+2\cdot 1\cdot i)=9-7i$

(4) $a_{12}=a_{13}=a_{14}=a_{34}=0$ なので行列式の定義で残る項を並べると

$$\begin{aligned}&\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,2\,3\,4\end{pmatrix}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,2\,4\end{pmatrix}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}\\ &\quad+\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,4\,2\,3\end{pmatrix}a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}+\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,4\,3\,2\end{pmatrix}a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}\\ =&6-2-8-2=-6\end{aligned}$$

(5) (4) と同様に $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,2\,4\end{pmatrix}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,4\,2\end{pmatrix}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=-48+8=-40$

5.5 (1) 和の一つの項あたり $n-1$ 回のかけ算を要する．全部で $n!$ 個の項があるので $(n-1)\cdot n!$ 回.

(2) $n=2$ のとき 2 回, $n=3$ のとき $2\cdot 3!=12$ 回, $n=4$ のとき $3\cdot 4!=72$ 回.

n が大きいとき $\log_{10}(n-1)\cdot n!\sim\log_{10}(n-1)+n\log_{10}n-0.43n\sim(n+1)\log_{10}n-0.43n$.

したがって $n=100$ のとき約 159 桁, $n=1000$ のとき約 2573 桁.

5.6 まず，元の行列 A については $|A|=9+2+4+2-12+3=8$.

(1) $\begin{vmatrix}1&6&-1\\2&9&1\\1&-6&3\end{vmatrix}=27+6+12+6-36+9=24=3\,|A|$

(2) $\begin{vmatrix}-1&2&-1\\1&3&1\\2&-2&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&2&-1\\1&3&1\\-1&-2&3\end{vmatrix}=-9+4+2-2-6+6+18-2+2+4-6-3=8=|A|$

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3+12-2-4-2-9 = -8 = -|A|$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9+4+2+2-12+3 = 8 = |A|$

5.7 (i) $\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda|A|$ など.

(ii) $\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (b_{11}+c_{11})a_{22} - a_{12}(b_{21}+c_{21}) = (b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21}) + (c_{11}a_{22} - a_{12}c_{21}) = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ など.

(iii) $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -|A|$

(iv) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A|$

5.8 (1) 与式 $= \begin{vmatrix} 11 & 12 & 1 \\ 14 & 15 & 1 \\ 17 & 18 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 14 & 1 & 1 \\ 15 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 0 \\ 14 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

(2) 与式 $= \begin{vmatrix} 64 & 66 & 1 \\ 55 & 62 & 6 \\ 52 & 60 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 63 & 2 & 1 \\ 55 & 7 & 6 \\ 52 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 64 & 1 & 1 \\ 55 & 1 & 6 \\ 52 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & 1 & 5 \\ -12 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot(-12) - 1\cdot(-9)\cdot 6 = -6$

(3) 与式 $= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 \\ 0 & 0 & 1-a^4 & 0 \\ 0 & 1-a^4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}(1-a^4)^3 = (a^4-1)^3$

(4) 与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^3-a^3 \\ 1 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c^3-a^3) - (c-a)(b^3-a^3)$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

5.9 (1) 与式 $= |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_4| = |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4| = |A|$

(2) 与式 $= \dfrac{i}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot i\cdot|\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3| = |A|$

(3) 与式 $= |\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1| = 0 \neq |A|$

(4) 与式 $= \dfrac{1}{4}|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\ 2\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4\ 2\boldsymbol{a}_3| = |\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_3|$
$= |\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_3| = |A|$

答. (1), (2), (4)

5.10 (1) $AB = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & -5 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |A| = 3, \quad |B| = 3, \quad |AB| = 9$

(2) $AB = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 \\ 11 & 14 & 10 \\ 10 & 11 & 8 \end{bmatrix}, \quad |A| = -5, \quad |B| = -8, \quad |AB| = 40$

(3) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 10 & 0 & -17 & -8 \\ 1 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & -9 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad |A| = -4, \quad |B| = -3, \quad |AB| = 12$

5.11 $|A| = -3$ である.

(1) $|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -3$

(2) $|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -3$

5.12 (1) 与式 $= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & 1 & -8 \\ 3 & -4 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & -11 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 11 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -11 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 11 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ 3 & -11 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 11 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -11 & 6 \end{vmatrix}$

$= 2\begin{vmatrix} 13 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 13 & -1 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} = -8$

(2) 与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 11 & 12 & 6 & 12 \\ 7 & 8 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 1 & 17 & -10 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & 12 & -2 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -2$

(3) 与式 $= \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -7 \\ 7 & 7 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 4 \\ 7 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & -6 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$

$= 12\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} + 16\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 7 & 7 & -4 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} - 42\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 7 & -6 & -4 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 12 \cdot 244 + 16 \cdot (-327) - 42 \cdot (-55) = 6$

(4) 与式 $= \begin{vmatrix} 8 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 4 & 12 \\ -8 & -3 & -3 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 11 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 11 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 11 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 12 & 0 & 21 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -3$

5.13 (1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

5.14 (1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0$

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ \lambda b_x & \lambda b_y & \lambda b_z \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ など

(4) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x + c_x & b_y + c_y & b_z + c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

5.15 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ の x 成分は

$$a_y \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \text{ の } z \text{ 成分} - a_z \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \text{ の } y \text{ 成分} = a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z)$$

であり，$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ の x 成分は

$$(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_x - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_x = (a_y c_y + a_z c_z) b_x - (a_y b_y + a_z b_z) c_x$$

であるので両者は等しい．他の成分についても同様に等式が成り立つ．

5.16 (1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 23$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

5.17 定理 5.3 (iii′) の行列式の基本的性質より明らか．

5.18 (1) 行基本変形より 与式 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ となり，

階数は3．

行列式は $-12 + 12 + 3 - 2 - 12 + 18 = 7$．

(2) 与式 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり，階数は2．

行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = -50 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$．

(3) 与式 $\to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -5 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & 5 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり，階数は3.

行列式は $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -4 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 14 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 14 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -15 & 5 \end{vmatrix} =$

$2\begin{vmatrix} -4 & 14 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

(4) 与式 $\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ と

なり，階数は4.

行列式は $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 6.$

5.19 (1) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & -10 & 0 \\ 0 & 13 & -9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 13 & -9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

答. $x = y = z = 0$（一意解），$\operatorname{rank} A = 3$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

答. t を任意の数として $x = -t,\ y = 0,\ z = t$（無限個の解），$\operatorname{rank} A = 2$

5.20 (1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1,$

$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7,\ \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 9,\ \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$

$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 8,\ \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -10,\ \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3,$

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\quad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,\quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 8 & -3 \\ 9 & -10 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$

(2) $|A| = \begin{vmatrix} 0 & i & -2i \\ 1 & 0 & -1+i \\ -i & 1 & i \end{vmatrix} = -i,$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1+i \\ 1 & i \end{vmatrix} = 1-i, \quad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1+i \\ -i & i \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} i & -2i \\ 1 & i \end{vmatrix} = 1-2i, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -2i \\ -i & i \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} i & -2i \\ 0 & -1+i \end{vmatrix} = -1-i, \quad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -2i \\ 1 & -1+i \end{vmatrix} = -2i, \quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -i,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-i}\begin{bmatrix} 1-i & 1-2i & -1-i \\ 1 & 2 & -2i \\ 1 & 1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 2+i & 1-i \\ i & 2i & 2 \\ i & i & 1 \end{bmatrix}.$$

5.21 (1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad x = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad y = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$ 答. $x = y = 1$

(2) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad x = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{3},$

$y = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}, \quad z = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 1.$ 答. $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = 1$

(3) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-i \\ 1 & i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i, \quad x = \frac{1}{-i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-i \\ 2i & i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i,$

$y = \frac{1}{-i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-i \\ 1 & 2i & i \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2-i, \quad z = \frac{1}{-i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 2i \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2+i.$

答. $x = 2i$, $y = -2-i$, $z = 2+i$

5.22 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ 答. 線形独立

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$ 答. 線形従属

5.23 $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ としたときの c_1, c_2, c_3 を求めればよい．$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

なので $A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

答. $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

5.24 数学的帰納法を用いる．まず $(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2)$ は明らか．次に，ある k に対し $i, j \leqq k$ を満たす任意の相異なる i, j で $(\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}'_j) = 0$ であるとする．このとき

$$\boldsymbol{x}'_{k+1} = \boldsymbol{x}_{k+1} - \frac{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_{k+1})}{(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_1)}\boldsymbol{x}'_1 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{x}'_k, \boldsymbol{x}_{k+1})}{(\boldsymbol{x}'_k, \boldsymbol{x}'_k)}\boldsymbol{x}'_k$$

であるので，$i \leqq k$ を満たす任意の $\boldsymbol{x}'_i$ と内積をとると，仮定より

$$(\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}'_{k+1}) = (\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}_{k+1}) - \frac{(\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}_{k+1})}{(\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}'_i)}(\boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}'_i) = 0$$

となる．

5.25 (1) $\boldsymbol{x}'_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_1) = 2$, $(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2) = 2$, $\boldsymbol{x}'_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_3) = 1$, $(\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}'_2) = 1$, $(\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}_3) = 1$, $\boldsymbol{x}'_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{bmatrix}$.

答. $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{bmatrix}$

(2) (1) の直交基底のベクトルを並べて $A' = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\1 & 0 & 1/2\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ とする．

$A'^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ より $A'^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\1\\-1\end{bmatrix}$, $A'^{-1}\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\2\\-3\end{bmatrix}$.

答. $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'_1 + \boldsymbol{x}'_2 - \boldsymbol{x}'_3, \quad \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'_1 + 2\boldsymbol{x}'_2 - 3\boldsymbol{x}'_3$

5.26 (1) $|\boldsymbol{x}'_1| = \sqrt{2}$, $|\boldsymbol{x}'_2| = 1$, $|\boldsymbol{x}'_3| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より

$\boldsymbol{x}''_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}''_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}''_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{x}'_1 = \sqrt{2}\boldsymbol{x}''_1$, $\boldsymbol{x}'_2 = \boldsymbol{x}''_2$, $\boldsymbol{x}'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}''_3$ の関係を問題 5.25 (2) の答に代入すればよい．

答. $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}''_1 + \boldsymbol{x}''_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}''_3, \quad \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}''_1 + 2\boldsymbol{x}''_2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}''_3$

5.27 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$ とする.

$\boldsymbol{x}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$, $(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_1) = 2$, $(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2) = 1$. ゆえに $\boldsymbol{x}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2i \\ i \end{bmatrix}$.

$(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_3) = 2$, $(\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}'_2) = \frac{3}{2}$, $(\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{x}_3) = 1$. ゆえに $\boldsymbol{x}'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2i \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}$.

さらに $|\boldsymbol{x}'_1| = \sqrt{2}$, $|\boldsymbol{x}'_2| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $|\boldsymbol{x}'_3| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

答. $\boldsymbol{x}''_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}''_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2i \\ i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}''_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}$

5 章演習問題解答

5.1 (1) 与式 $=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 8\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 8\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-9$

(2) 与式 $=\begin{vmatrix}1 & -2-i & -2\\ 0 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1-2i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2-i\\ 2 & 0\end{vmatrix}=4+2i$

(3) 与式 $=\begin{vmatrix}-7 & -2 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 0 & 2\\ 5 & 4 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7 & -2 & 0\\ 4 & 5 & 2\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7 & -2 & 0\\ -6 & -3 & 0\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7 & -2\\ -6 & -3\end{vmatrix}=9$

(4) 与式 $=\begin{vmatrix}0 & -2 & 0 & 4 & 3\\ -7 & 4 & 0 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -3 & 0 & 2\\ 7 & -3 & 0 & -2 & 0\\ 2 & 2 & -2 & -4 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -2 & 0 & 4 & 3\\ -7 & 4 & 0 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -3 & 0 & 2\\ 7 & -3 & 0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -2 & 0 & 4 & 3\\ -7 & 4 & 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -3 & 0 & 2\\ 7 & -3 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0\end{vmatrix}$

$=-2\begin{vmatrix}0 & -2 & 4 & 3\\ -7 & 4 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ 7 & -3 & -2 & 0\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}0 & -2 & 4 & 3\\ -7 & -3 & -1 & 14\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 7 & 4 & -2 & -14\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-2 & 4 & 3\\ -3 & -1 & 14\\ 4 & -2 & -14\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-2 & 4 & 3\\ -3 & -1 & 14\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}$

$=-2\begin{vmatrix}-2 & -2 & 3\\ -3 & -10 & 14\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -10 & 14\end{vmatrix}=-4$

5.2 (1) 順列 $(1\,2\,\cdots\,n)$ から $(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)$ を得る一連の互換の順序を逆にして $(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)$ に適用すると $(1\,2\,\cdots\,n)$ を得る．

(2) (1) を用いると

$$\text{左辺}=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}i_1\,i_2\,\cdots\,i_n\\ 1\;\;2\;\;\cdots\;\;n\end{pmatrix}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1\;\;2\;\;\cdots\;\;n\\ j_1\,j_2\,\cdots\,j_n\end{pmatrix}$$

この式は，$(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)$ から $(1\,2\,\cdots\,n)$ を得てさらに $(1\,2\,\cdots\,n)$ から $(j_1\,j_2\,\cdots\,j_n)$ を得るのに要する互換の回数の偶奇性を表している．結局 $(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)$ から $(j_1\,j_2\,\cdots\,j_n)$ を得ているので右辺に等しい．

5.3 (1) 与式 $=\begin{vmatrix}a+b+c & b & c\\ 2(a+b+c) & b+c & c+a\\ 0 & b^2-c^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 2 & b+c & c+a\\ 0 & b^2-c^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 0 & c-b & a-c\\ 0 & b^2-c^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}=(a+b+c)\{(c-b)(c-a)(c+a)-(a-c)(b-c)(b+c)\}$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(2) 与式 $=\dfrac{1}{a^3b^3c^3}\begin{vmatrix}a^2 & b^2 & c^2\\ a & b & c\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{a^3b^3c^3}\begin{vmatrix}0 & b^2-a^2 & c^2-a^2\\ 0 & b-a & c-a\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$=\dfrac{1}{a^3b^3c^3}\{(b^2-a^2)(c-a)-(c^2-a^2)(b-a)\}=-\dfrac{1}{a^3b^3c^3}(a-b)(b-c)(c-a)$

(3) 与式 $= \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ b-a & 0 & a-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^3 \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (a-b)^3 \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3(a+3b)$$

(4) 与式 $= \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & a & b & b \\ 0 & -b & a & b \\ 0 & -b & -b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & b & b \\ -b & a & b & b \\ -b & -b & a & b \\ -b & -b & -b & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & b \\ -b & a & b \\ -b & -b & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & b \\ 1 & -b & a & b \\ 1 & -b & -b & a \end{vmatrix}$

$$= a\left(\begin{vmatrix} a & b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & b \\ -b & a & b \\ -b & -b & a \end{vmatrix} \right) - b^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b-a & b-a \\ 1 & -b & a+b & 2b \\ 1 & -b & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= a\left(a \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & -b & a \end{vmatrix} \right) + b^2 \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & a+b & 2b \\ 1 & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= a\left(a^3 + ab^2 - b^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & b-a \\ 1 & -b & a+b \end{vmatrix} \right) + b^2 \begin{vmatrix} 0 & b-a & -2a \\ 0 & a+b & b-a \\ 1 & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= a\left(a^3 + ab^2 + b^2 \begin{vmatrix} 1 & b-a \\ 1 & a+b \end{vmatrix} \right) + b^2 \begin{vmatrix} b-a & -2a \\ a+b & b-a \end{vmatrix}$$

$$= a(a^3 + 3ab^2) + b^2(3a^2 + b^2) = a^4 + 6a^2b^2 + b^4$$

5.4 (1) $\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1') = 6$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2) = 2$, $\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{5}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_3) = -3$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_2') = \dfrac{25}{3}$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_3) = 5$, $\boldsymbol{x}_3' = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{3}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

答. $\dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{bmatrix}$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1') = 4$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2) = 3+i$, $\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} i \\ 1-i \\ -1 \end{bmatrix} - \dfrac{3+i}{4} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{bmatrix} = -\dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_3) = 2$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_2') = \dfrac{3}{2}$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_3) = -\dfrac{3}{2}(1+i)$,

$\boldsymbol{x}_3' = \begin{bmatrix} 1+2i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{bmatrix} - \dfrac{1+i}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}$.

答. $\dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{bmatrix}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1') = 2$, $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2) = -1$, $\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_3) = -2$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_2') = \dfrac{5}{2}$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_3) = 0$, $\boldsymbol{x}_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_4) = 3$, $(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_4) = \dfrac{3}{2}$, $(\boldsymbol{x}_3', \boldsymbol{x}_3') = 2$, $(\boldsymbol{x}_3', \boldsymbol{x}_4) = 1$,

$\boldsymbol{x}_4' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \dfrac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \dfrac{3}{10}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

答. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

5.5 (1)

$${}^t\!AA = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1 \\ {}^t\boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 & {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_n \\ {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1 & {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}^t\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_1 & {}^t\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$$

$\{\boldsymbol{x}_i\}$ は実の正規直交基底なので ${}^t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j = \delta_{ij}$. したがって上式より ${}^t\!AA = E$.

(2)

$$|{}^t\!AA| = |{}^t\!A||A| = |A|^2 = |E| = 1$$

したがって $|A| = \pm 1$.

5.6 • $|A| \neq 0$ のとき P.120 より

$$|\tilde{A}A| = |\tilde{A}||A| = \begin{vmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |A| \end{vmatrix} = |A|^n$$

ゆえに $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$.

• $|A| = 0$ のとき同じく P.120 より $\tilde{A}A = O$. もし $|\tilde{A}| \neq 0$ ならば $\tilde{A}$ に逆行列が存在し, $A = \tilde{A}^{-1}O = O$. $A \neq O$ のときは矛盾するので $|\tilde{A}| = 0$. また $A = O$ のときは $\tilde{A}$ の定義より明らかに $\tilde{A} = O$ となり, やはり $|\tilde{A}| = 0$.

以上をまとめると $|A| \neq 0, = 0$ のどちらの場合も $|\tilde{A}| = |A|^{n-1} = |A^{n-1}|$.

5.7 (1)

$$E(E + xA + (xA)^2 + \cdots + (xA)^{m-1}) = E + xA + (xA)^2 + \cdots + (xA)^{m-1}$$
$$xA(E + xA + (xA)^2 + \cdots + (xA)^{m-1}) = xA + (xA)^2 + (xA)^3 + \cdots + (xA)^m$$

したがって

$$(E - xA)(E + xA + (xA)^2 + \cdots + (xA)^{m-1}) = E - (xA)^m = E - x^m A^m = E.$$

上式の最後の変形で $A^m = O$ を用いた.

(2) $|E - xA|$, $|E + xA + (xA)^2 + \cdots + (xA)^{m-1}|$ はどちらも x の多項式である.（x の負べきは含まれない.）前者を k 次，後者を l 次の多項式とする $(0 \leqq k,\ 0 \leqq l)$．すると積 $|E - xA||E + xA + (xA)^2 + \cdots + (xA)^{m-1}|$ は x の $(k+l)$ 次多項式となる．ところが，(1) より

$$|E - xA||E + xA + (xA)^2 + \cdots + (xA)^{m-1}| = |E| = 1$$

なので，$k = l = 0$．すると $|E - xA|$ は x によらない定数となるので $x = 0$ の場合を考えて

$$|E - xA| = |E| = 1.$$

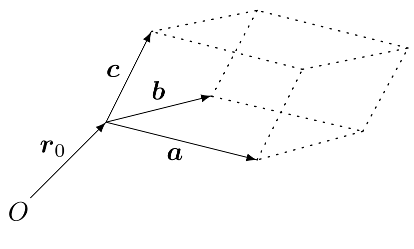
5.8 (1) 点 $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ に平行な向きの直線を考える．$\boldsymbol{d}$ は向きを与えるベクトルなので $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$ である．この直線上の任意の点の位置ベクトルはパラメータ t を用いて $\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{d}$ で表される．与えられた線形変換によってこの点は

$$A(\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{d}) = A\boldsymbol{r}_0 + tA\boldsymbol{d}$$

の点に写像される．このとき $A\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ とすると A が正則なので $\boldsymbol{d} = A^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ となり仮定に矛盾する．よって $A\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$ であり，上式は点 $A\boldsymbol{r}_0$ を通りベクトル $A\boldsymbol{d}$ に平行な直線に対するパラメータ表示である．したがって直線は直線に写像される.

(2) (1) より $\boldsymbol{d}$ に平行な直線は写像後 $A\boldsymbol{d}$ に平行となるので，平行な 2 直線は写像後も平行である.

(3) 写像前の平行六面体を次図に示す.



この平行六面体の中の任意の点の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_0 + t_1\boldsymbol{a} + t_2\boldsymbol{b} + t_3\boldsymbol{c} \qquad (0 \leqq t_1, t_2, t_3 \leqq 1)$$

によって表される．この点は線形変換により

$$\boldsymbol{r}_0' + t_1\boldsymbol{a}' + t_2\boldsymbol{b}' + t_3\boldsymbol{c}'$$

に写像される．ただし

$$\boldsymbol{r}_0' = A\boldsymbol{r}_0, \quad \boldsymbol{a}' = A\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b}' = A\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c}' = A\boldsymbol{c}$$

である．このことから写像後も平行六面体であることがわかる．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を列ベクトルとして並べた行列 $[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]$ と，$\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ を列ベクトルとして並べた行列 $[\boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{c}']$ は

$$[\boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{c}'] = [A\boldsymbol{a}\,A\boldsymbol{b}\,A\boldsymbol{c}] = A[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]$$

の関係がある．また写像前後の平行六面体の体積はそれぞれ行列式 $|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}|$, $|\boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{c}'|$ の絶対値に等しく，上の関係より

$$|\boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{c}'| = |A|\,|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}|$$

であるので，両者の体積比は $|A|$ の絶対値に等しい．

5.9 まず一般の行列の微分について考えておくと見通しがよい．行列 A の行列式の定義 (5.2) は，定理 5.2 (iv) より行と列の添え字を入れ替えても成立するので

$$|A| = \sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

となる．いま a_{ij} が x に依存しているとする．両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} |A|' &= \sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \frac{d}{dx}(a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}) \\ &= \sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} a'_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} + \sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} a_{i_1 1} a'_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \\ &\qquad + \cdots + \sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a'_{i_n n} \end{aligned}$$

となる．最右辺の k 番目の和は

$$\sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} a_{i_1 1} \cdots a_{i_{k-1} k-1} a'_{i_k k} a_{i_{k+1} k+1} \cdots a_{i_n n}$$

であり，元の行列式の第 k 列の成分 $a_{i_k k}$ をすべてその微分 $a'_{i_k k}$ に置き換えたものに等しい．したがって $|A|$ の微分を列ベクトルで表現すると

$$|A|' = |\boldsymbol{a}'_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}'_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n| + \cdots + |\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}'_n|$$

となる.（もちろん列の代わりに行でも同様のことが成立する.）

(1) $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$ とすると $W = |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}''|$ と表せる．上に示した微分公式より

$$W' = |\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'''|.$$

定理 5.4(v) の行列式の基本的性質より同じ列を含む行列式は 0 なので

$$W' = |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'''|.$$

続けて微分を行うと

$$W'' = |\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}'''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}^{(4)}| = |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}'''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}^{(4)}|.$$

(2) $W''' = |\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}'''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'''\,\boldsymbol{f}'''| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}^{(4)}| + |\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}^{(4)}| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}^{(4)}| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}^{(5)}|$
$= |\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}'''| + 2|\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}''\,\boldsymbol{f}^{(4)}| + |\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{f}'\,\boldsymbol{f}^{(5)}|$

成分で表すと

$$W''' = \begin{vmatrix} f_1' & f_1'' & f_1''' \\ f_2' & f_2'' & f_2''' \\ f_3' & f_3'' & f_3''' \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} f_1 & f_1'' & f_1^{(4)} \\ f_2 & f_2'' & f_2^{(4)} \\ f_3 & f_3'' & f_3^{(4)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1^{(5)} \\ f_2 & f_2' & f_2^{(5)} \\ f_3 & f_3' & f_3^{(5)} \end{vmatrix}.$$

5.10 (1) 左辺の行列式を D と書くことにする．D を行列式の定義に当てはめると

$$D = \sum_{(i_1\,i_2\,\cdots\,i_n)\in S_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} x_{i_2} x_{i_3}^2 \cdots x_{i_n}^{n-1}$$

となるので，D は次数が $1+2+\cdots+(n-1) = n(n-1)/2$ の単項式の和である．また，$x_1 = x_2$ とすると，D の第 1 列と第 2 列が等しくなり $D = 0$ となるので

$$D = (x_1 - x_2)(x_1 \sim x_n \text{ の多項式})$$

と因数分解できる．同様にして $x_i = x_j\ (i \neq j)$ とするとやはり $D = 0$ となるので

$$D = c \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$$

と因数分解できる．上式で $1 \leqq i < j \leqq n$ の条件を満たす i, j の組は ${}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ 個あるので $\displaystyle\prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$ は $n(n-1)/2$ 次の多項式となる．したがって c は定数である．

D 中のひとつの項 $x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$ に注目する．この項は

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j) =& (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n) \\ & \times (x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n) \\ & \cdots \\ & \times (x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

の中ですべての (　) の中の右側の変数を選んだときに作られる．したがって
$c = (-1)^{n(n-1)/2}$ であることがわかる．

(2) 曲線を表す式に点の座標 (x_i, y_i) を代入すると次の連立 1 次方程式が成り立つ．

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_1 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_1 x_2^2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_1 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

これを行列で表すと

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

となる．$|A|\ (= |{}^tA|)$ はヴァンデルモンドの行列式であり，(1) の結果より $x_1 \sim x_n$ が全て異なるなら $|A| \neq 0$ である．したがって A には逆行列が存在し，

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

となるので，$a_0 \sim a_{n-1}$ は $x_1 \sim x_n$, $y_1 \sim y_n$ から一意的に定まる．

5.11 (1) 第 1 行で余因子展開すると次式のようになる．

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 3 & 4 & 1 & & & \\ & 3 & 4 & 1 & & \\ & & 3 & 4 & 1 & \\ & & & \cdots\cdots & & \\ & & & 3 & 4 & 1 \\ & & & & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{D_n} = 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & & & \\ 3 & 4 & 1 & & \\ & 3 & 4 & 1 & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & 3 & 4 & 1 \\ & & & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{D_{n-1}} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 4 & 1 & & \\ & 3 & 4 & 1 & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & 3 & 4 & 1 \\ & & & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

さらに右辺第 2 項の行列式を第 1 行で余因子展開する．

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 4 & 1 & & \\ & 3 & 4 & 1 & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & 3 & 4 & 1 \\ & & & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & & \\ 3 & 4 & 1 & \\ & \cdots\cdots & & \\ & 3 & 4 & 1 \\ & & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{D_{n-2}} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ & 4 & 1 & \\ & \cdots\cdots & & \\ & 3 & 4 & 1 \\ & & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

この式の右辺第 2 項の行列式の値は，第 1 列の成分がすべて 0 なので 0 となる．したがって

$$D_n = 4D_{n-1} - 3D_{n-2}.$$

ア $= 4$，イ $= -3$

(2) $D_n - 4D_{n-1} + 3D_{n-2} = 0$ より

$$D_n - 3D_{n-1} = D_{n-1} - 3D_{n-2}.$$

したがって

$$D_n - 3D_{n-1} = D_2 - 3D_1 = 13 - 3 \cdot 4 = 1.$$

これより

$$D_n + \frac{1}{2} = 3\Big(D_{n-1} + \frac{1}{2}\Big).$$

ゆえに

$$D_n = 3^{n-1}\Big(D_1 + \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1).$$

6章問題解答

6.1 問題で与えられた行列を A と表す.

(1)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

ゆえに固有値は$\lambda = -2,\ 1,\ 2$.

・$\lambda = -2$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+y) \\ 2(x+y) \\ -x+2y+3z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

ゆえに $y = -x,\ z = x$. したがって固有ベクトルは$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda = 1$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2y \\ 2x-y \\ -x+2y \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

ゆえに $x = y = 0$. したがって固有ベクトルは$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda = 2$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x-y) \\ 2(x-y) \\ -x+2y-z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

ゆえに $x = y = z$. したがって固有ベクトルは$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(2)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2+1) = 0$$

ゆえに固有値は$\lambda = 1,\ \pm i$.

・$\lambda = 1$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(y-2z) \\ -2z \\ y-2z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

ゆえに $y=z=0$．したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$．

・$\lambda=\pm i$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\mp i & 2 & -4\\ 0 & 1\mp i & -2\\ 0 & 1 & -1\mp i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1\mp i)x+2y-4z\\(1\mp i)y-2z\\y-(1\pm i)z\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ゆえに $x=2z,\ y=(1\pm i)z$．したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix}2\\1\pm i\\1\end{bmatrix}$（複号同順）．

(3)

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 0 & -2\\ 0 & -\lambda & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & -2 & -2\\ 0 & -\lambda & 0 & -1\\ 1 & 0 & -\lambda & -1\\ 1 & 0 & -\lambda & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & -2 & -2\\ 0 & -\lambda & 0 & -1\\ 1 & 0 & -\lambda & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & -2\\ 0 & -\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

ゆえに固有値は $\lambda=-1,\ 0,\ 1,\ 2$．

・$\lambda=-1$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(2x-y-u)\\y+z-u\\x+2z-u\\x+2z-u\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ゆえに $x=y=u,\ z=0$．したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$．

・$\lambda=0$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x-2y-2u\\z-u\\x+z-u\\x+2z-2u\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ゆえに $x=0,\ y=-u,\ z=u$．したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$．

・$\lambda = 1$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x-y-u) \\ -y+z-u \\ x-u \\ x+2z-3u \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x = z = u$, $y = 0$. したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda = 2$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y-2u \\ -2y+z-u \\ x-z-u \\ x+2z-4u \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x = 2u$, $y = 0$, $z = u$. したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6.2 問題 6.1 で求めた固有ベクトルを並べて P を作る.

(1)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

確かに対角化できる.

(2)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & i & 1-i \\ 0 & -i & 1+i \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & i & 1-i \\ 0 & -i & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & i & 1-i \\ 0 & -i & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2i & 2i \\ 0 & -1-i & -1+i \\ 0 & -i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

確かに対角化できる.

(3)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

確かに対角化できる．

6.3 問題の行列はどれも 3 次なので，線形独立な固有ベクトルが 3 つ存在するかどうかを調べればよい．

(1)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

ゆえに固有値は $\lambda = 0, 1, 2$. 異なる固有値が 3 つ存在するので，定理6.3 より対角化できる．

(2)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0$$

ゆえに固有値は $\lambda = -1$（単根），1（重根）．

・$\lambda = -1$ のとき

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - 3z \\ 2(x+y+z) \\ 2(x+y+z) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x = -4z$, $y = 3z$. 固有ベクトルは $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda = 1$ のとき

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + y - 3z \\ 2(x+z) \\ 2(x+y) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $y = z = -x$. したがって固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ の 1 種類.

対角化できない.

(3)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0$$

ゆえに固有値は $\lambda=-2$（単根），1（重根）.

・$\lambda=-2$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y+3z \\ -x+4y+3z \\ x-y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x=y$, $z=-x$. 固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

・$\lambda=1$ のとき

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y+3z \\ -x+y+3z \\ x-y-3z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ゆえに $x=y+3z$. したがって固有ベクトルは一般に $\begin{bmatrix} s+3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となるので，線形独立な $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の2種類を作ることができる. ゆえに対角化できる.

6.4 (ii) より

$$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i, \quad A\boldsymbol{x}_i' = \lambda_i \boldsymbol{x}_i' + \boldsymbol{x}_i, \quad A\boldsymbol{x}_i'' = \lambda_i \boldsymbol{x}_i'' + \boldsymbol{x}_i', \quad \cdots$$

であることに注意すると，次式が得られる.

$$\begin{aligned} AP &= A[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_1'\ \boldsymbol{x}_1''\ \cdots \vdots\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_2'\ \boldsymbol{x}_2''\ \cdots \vdots\ \cdots\cdots \vdots\ \boldsymbol{x}_r\ \boldsymbol{x}_r'\ \boldsymbol{x}_r''\ \cdots] \\ &= [\lambda_1\boldsymbol{x}_1\ \ \lambda_1\boldsymbol{x}_1'+\boldsymbol{x}_1\ \ \lambda_1\boldsymbol{x}_1''+\boldsymbol{x}_1'\ \ \cdots \vdots\ \lambda_1\boldsymbol{x}_2\ \ \lambda_2\boldsymbol{x}_2'+\boldsymbol{x}_2\ \ \lambda_2\boldsymbol{x}_2''+\boldsymbol{x}_2'\ \ \cdots \vdots \\ &\qquad \vdots\ \cdots\cdots \vdots\ \lambda_r\boldsymbol{x}_r\ \ \lambda_r\boldsymbol{x}_r'+\boldsymbol{x}_r\ \ \lambda_r\boldsymbol{x}_r''+\boldsymbol{x}_r'\ \ \cdots] \end{aligned}$$

さらに (6.6) の右辺の行列を J とすると，$PJ=$ 上式右辺 となることも明らか. したがって $AP=PJ$. P を正則としているので $P^{-1}AP=J$.

6.5 (1)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -8 \\ 1 & -\lambda & 6 \\ 1 & -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^3$$

ゆえに固有値は $\lambda=2$（3重根）. 固有ベクトルを求める.

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x-y+4z) \\ x-2y+6z \\ x-y+4z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$x=-2z,\ y=2z$ なので，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$ の 1 種類のみ．そこで P.142 (ii) の手続きを用いる．$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$ より

$$\begin{bmatrix}-2(x'-y'+4z')\\x'-2y'+6z'\\x'-y'+4z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$$

ゆえに $x'=-2z',\ y'=2z'-1$．これよりたとえば $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$ とする．次に $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}''=\boldsymbol{x}'$ より

$$\begin{bmatrix}-2(x''-y''+4z'')\\x''-2y''+6z''\\x''-y''+4z''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$$

ゆえに $x''=-2z''+1,\ y''=2z''$．これよりたとえば $\boldsymbol{x}''=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$．以上より次式が得られる．

$$P=[\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}'\,\boldsymbol{x}'']=\begin{bmatrix}-2&-2&-1\\2&1&2\\1&1&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

(2)

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}i-\lambda&-1+i&0\\0&1-\lambda&0\\1&4-3i&i-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-i)^2=0$$

ゆえに固有値は $\lambda_1=i$（重根），$\lambda_2=1$（単根）．

λ_1 の固有ベクトルを求める．

$$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{x_1}=\begin{bmatrix}0&-1+i&0\\0&1-i&0\\1&4-3i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1+i)y\\(1-i)y\\x+(4-3i)y\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$x=y=0$ なので，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ の 1 種類のみ．そこで P.141 (i) の手続きを用いる．

$$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{x}_1'=\begin{bmatrix}(-1+i)y'\\(1-i)y'\\x'+(4-3i)y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

より $x'=1,\ y'=0$．これよりたとえば $\boldsymbol{x}_1'=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

λ_2 の固有ベクトルを求める．

$$(A-\lambda_2E)\boldsymbol{x_2}=\begin{bmatrix}-1+i&-1+i&0\\0&0&0\\1&4-3i&-1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1+i)(x+y)\\0\\x+(4-3i)y+(-1+i)z\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

ゆえに $y = -x$, $z = -3x$．固有ベクトルは $\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$．

以上より次式が得られる．

$$P = [\boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{x}_1'\, \boldsymbol{x}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$$

ゆえに固有値は $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$．

それぞれの固有ベクトルを求める．

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 4z \\ 2(y+z) \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

ゆえに $x = 2y$, $z = -y$ となり，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$．

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(y+2z) \\ y+2z \\ -z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

ゆえに $y = z = 0$ となり，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$．

$$(A - \lambda_3 E)\boldsymbol{x_3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 2y + 4z \\ 2z \\ -2z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

ゆえに $x = 2y$, $z = 0$ となり，$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$．

以上より次式が得られる．

$$P = [\boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{x}_2\, \boldsymbol{x}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{（対角化）}$$

(4)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^3 = 0$$

ゆえに固有値は $\lambda = 2$（3 重根）.
固有ベクトルを求める.

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + z \\ 2(x - y + z) \\ x - y + z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$x = y - z$ より固有ベクトルは一般に

$$\begin{bmatrix} s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

したがって線形独立な固有ベクトルは 2 種類しか作れない．そこで，P.142 (iii) の手順を用いる．改めて (6.7) を考える．

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

として (6.7) に代入すると次式が得られる．

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0} \quad &\rightarrow \quad \begin{bmatrix} x - y + z \\ 2(x - y + z) \\ x - y + z \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \\ (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_1 \quad &\rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' - y' + z' \\ 2(x' - y' + z') \\ x' - y' + z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \\ (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}, \quad &\rightarrow \quad \begin{bmatrix} u - v + w \\ 2(u - v + w) \\ u - v + w \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$x - y + z = 0, \qquad x' - y' + z' = x = y/2 = z, \qquad u - v + w = 0.$$

この条件を満たす線形独立な $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2$ の例として

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

がある．以上より次式が得られる．

$$P = [\boldsymbol{x}_1 \, \boldsymbol{x}_1' \, \boldsymbol{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6.6 どの問題も数学的帰納法で示す．

(1) $n=1$ のとき与式が成立する．$n=k$ のとき成立すると仮定する．$n=k+1$ のとき

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{k+1} \end{bmatrix}.$$

よって帰納法が成立する．

(2) $n=1$ のとき与式が成立する．$n=k$ のとき成立すると仮定する．$n=k+1$ のとき

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k & \sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & a\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} + b^k & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{k+1} \end{bmatrix}.$$

$(1,2)$ 成分を整理する．

$$a\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} + b^k = b^k + ab^{k-1} + a^2 b^{k-2} + \cdots + a^{k-1}b + a^k = \sum_{i=0}^{k} a^i b^{k-i}$$

よって帰納法が成立する．

(3) $n=2$ のとき

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{2} = \begin{bmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$$

となり，与式が成立する．$n=k$ のとき成立すると仮定する．$n=k+1$ のとき

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k & \sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} & \sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-i} a^i b^j c^{k-i-j-2} \\ 0 & b^k & \sum_{i=0}^{k-1} b^i c^{k-i-1} \\ 0 & 0 & c^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & a\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} + b^k & a\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-i} a^i b^j c^{k-i-j-2} + \sum_{i=0}^{k-1} b^i c^{k-i-1} \\ 0 & b^{k+1} & b\sum_{i=0}^{k-1} b^i c^{k-i-1} + c^k \\ 0 & 0 & c^{k+1} \end{bmatrix}.$$

$(1,2)$, $(2,3)$ 成分については，(2) より

$$a\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1} + b^k = \sum_{i=0}^{k} a^i b^{k-i}, \qquad b\sum_{i=0}^{k-1} b^i c^{k-i-1} + c^k = \sum_{i=0}^{k} b^i c^{k-i}$$

が成立する．$(1,3)$ 成分については

$$
\begin{aligned}
&a\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-i}a^ib^jc^{k-i-j-2}+\sum_{i=0}^{k-1}b^ic^{k-i-1}\\
&=\sum_{j=0}^{k-1}b^jc^{k-j-1}+\sum_{j=0}^{k-2}ab^jc^{k-j-2}+\sum_{j=0}^{k-3}a^2b^jc^{k-j-3}\\
&\qquad\qquad+\cdots+\sum_{j=0}^{1}a^{k-2}b^jc^{1-j}+\sum_{j=0}^{0}a^{k-1}b^jc^{-j}\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i}a^ib^jc^{k-i-j-1}.
\end{aligned}
$$

よって帰納法が成立する．

6.7 (1)

$$
P=\begin{bmatrix}-2&-2&-1\\2&1&2\\1&1&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&-3\\0&-1&2\\1&0&2\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}.
$$

問題 6.6 (3) より

$$
(P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}2^n & \sum_{i=0}^{n-1}2^{n-1} & \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2-i}2^{n-2}\\ 0 & 2^n & \sum_{i=0}^{n-1}2^{n-1}\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3}\\0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{bmatrix}\quad(n\geqq 2).
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{bmatrix}&=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}-2&-2&-1\\2&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3}\\0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&-3\\0&-1&2\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}(n^2+7n+4)2^{n-2}\\-(n^2+5n+4)2^{n-2}\\-(n^2+7n+8)2^{n-3}\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

上の解は $n\geqq 0$ で成立する．

(2)

$$
P=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&-1\\1&0&-3\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&-3&1\\1&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}i&1&0\\0&i&0\\0&0&1\end{bmatrix}.
$$

問題 6.6 (2) より

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} i^n & \sum_{j=0}^{n-1} i^{n-1} & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^n & n\,i^{n-1} & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (n \geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^n & n\,i^{n-1} & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2\,i^n - 3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

上の解は $n \geqq 0$ で成立する．

(3)

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

問題 6.6 (1) より

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (n \geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1)^n - 4 \\ (-1)^n - 2 \\ (-1)^{n+1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

上の解は $n \geqq 1$ で成立する．

注：解の表式が $n = 0$ で成立しないのは，固有値に 0 が含まれているからである．

(4)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

問題 6.6 (2) より

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} 2^n & \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & n\,2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \qquad (n \geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & n\,2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (n+2)2^{n-1} \\ (n-1)2^n \\ (n-2)2^{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

上の解は $n \geqq 0$ で成立する．

6.8 列ベクトルの直行性，すなわち，$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$ を利用する．

(1)

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + a_{12}\Big)$$

より $a_{12} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$．これより $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = 1$ は明らか．

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{13} + a_{23}) = 0, \qquad (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_{13} + a_{23}) = 0, \\ &(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3) = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{aligned}$$

より $a_{13} = a_{23} = 0,\ a_{33} = \pm 1$．

注：$a_{13} \sim a_{33}$ については $\boldsymbol{x}_3 = \pm \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ からも求められる．

(2)

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{3}\,a_{12} - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = 0, \qquad (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = a_{12}^2 + a_{22}^2 + \frac{1}{3} = 1$$

よって $a_{12} = \dfrac{1}{3},\ a_{22} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,a_{13} + a_{33}) = 0, \qquad (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \frac{1}{3}(a_{13} \pm \sqrt{5}\,a_{23} - \sqrt{3}\,a_{33}) = 0, \\ &(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3) = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{aligned}$$

よって $(a_{13}, a_{23}, a_{33}) = \Big(\mp\dfrac{\sqrt{5}}{6}, \dfrac{2}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{15}}{6}\Big)$ もしくは $\Big(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{6}, -\dfrac{2}{3}, \mp\dfrac{\sqrt{15}}{6}\Big)$（複号同順）

6.9 直交行列を P とすると ${}^tP = P^{-1}$ となるので，(6.9) とは逆の順に P と ${}^tP$ をかけてもやはり

$$P\,{}^tP = E \tag{a}$$

となる．P を

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$$

と行ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_n$ で表し，(a) の両辺の (i, j) 成分を比較すると

$$\boldsymbol{x}_i{}^t\boldsymbol{x}_j = \delta_{ij}$$

が得られる．これは実の横ベクトルの内積に等しいので，$\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_n$ は正規直交基底である．

6.10 A, B をそれぞれ直交行列とし，$C = AB$ とする．

$${}^tCC = {}^t(AB)(AB) = ({}^tB{}^tA)(AB) = {}^tB({}^tAA)B = {}^tBB = E$$

よって C も直交行列である．

6.11 問題で与えられた行列を A とする．

(1)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

固有値は $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$ の 3 つでありすべて実数である（定理 6.9 (i) の確認）．次に固有ベクトルを求める．

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - y + z \\ -x + 3y + z \\ x + y + z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y + z \\ -x + z \\ x + y - 2z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$(A - \lambda_3 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x - y + z \\ -x - y + z \\ x + y - 3z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$．確かに $i \neq j$ のとき $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = 0$ である（定理 6.9 (ii) の確認）．

(2)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+5) = 0$$

よって$\lambda_1 = -5$（単根），$\lambda_2 = 1$（重根）の 2 つであり，どちらも実数である（定理 6.9 (i) の確認）．次に固有ベクトルを求める．

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x+2y-z \\ 2(x+y+z) \\ -x+2y+5z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$．

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2y-z \\ 2(x-2y+z) \\ -x+2y-z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって $x-2y+z=0$ より s, t を任意の数として$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} s \\ t \\ -s+2t \end{bmatrix}$．確かに $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ である（定理 6.9 (ii) の確認）．

(3)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda+3) = 0$$

よって$\lambda_1 = -3$（単根），$\lambda_2 = 1$（3 重根）の 2 つであり，どちらも実数である（定理 6.9 (i) の確認）．次に固有ベクトルを求める．

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+y-z+u \\ x+3y+z-u \\ -x+y+3z+u \\ x-y+z+3u \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$．

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y-z+u \\ x-y+z-u \\ -x+y-z+u \\ x-y+z-u \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって $x-y+z-u=0$ より $r,\ s,\ t$ を任意の数として $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ r-s+t \end{bmatrix}$．確かに $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=0$ である（定理 6.9 (ii) の確認）．

6.12 (1) 固有値が全て異なるので固有ベクトルは互いに直交しており，それらを単位ベクトルにして並べるだけでよい．

$$P=\begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_2|} & \dfrac{\boldsymbol{x}_3}{|\boldsymbol{x}_3|} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2=1$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} s \\ t \\ -s+2t \end{bmatrix}$ なので，線形独立なものとして改めて

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

を選び，グラム–シュミットの直交化法 (P.126〜127) を適用する．なお，$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が直交していることは問題 6.11 で既に示されている．

$$\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_1,\qquad \boldsymbol{x}_2'=\boldsymbol{x}_2-\frac{\overbrace{(\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_2)}^{0}}{(\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_1')}\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_2,$$

$$\boldsymbol{x}_3'=\boldsymbol{x}_3-\frac{\overbrace{(\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_3)}^{0}}{(\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_1')}\boldsymbol{x}_1'-\frac{(\boldsymbol{x}_2',\boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{x}_2',\boldsymbol{x}_2')}\boldsymbol{x}_2'=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}-\frac{-2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに (5.21) のように $\boldsymbol{x}_1'\sim\boldsymbol{x}_3'$ を単位ベクトルにして並べて P を作る．

$$P=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(3) $\lambda_2=1$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ r-s+t \end{bmatrix}$ なので，改めて線形独立なものとして

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_4=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を選び，グラム–シュミットの直交化法を適用する．なお，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_2 \sim \boldsymbol{x}_4$ が直交していることは問題 6.11 で既に示されている．

$$\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_1, \qquad \boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{x}_2 - \frac{\overbrace{(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2)}^{0}}{(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1')}\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_2,$$

$$\boldsymbol{x}_3' = \boldsymbol{x}_3 - \frac{\overbrace{(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_3)}^{0}}{(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1')}\boldsymbol{x}_1' - \frac{(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_2')}\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_4' &= \boldsymbol{x}_4 - \frac{\overbrace{(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_4)}^{0}}{(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1')}\boldsymbol{x}_1' - \frac{(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_4)}{(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_2')}\boldsymbol{x}_2' - \frac{(\boldsymbol{x}_3', \boldsymbol{x}_4)}{(\boldsymbol{x}_3', \boldsymbol{x}_3')}\boldsymbol{x}_3' \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1/2}{3/2}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

さらに (5.21) のように $\boldsymbol{x}_1' \sim \boldsymbol{x}_4'$ を単位ベクトルにして並べて P を作る．

$$P = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 & 2/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \\ -1/2 & 0 & 0 & 3/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

6.13 (1) 与式を実対称行列によって表す．

$$[x\ y\ z]\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}} -4 = 0$$

A の固有値は $\lambda_1 = 2$（重根），$\lambda_2 = 4$（単根）である．λ_1 に対する固有ベクトルとして線形独立な $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を選ぶ．λ_2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_3$ は互いに直交しているので，単位ベクトルにして並べて直交行列 P を作る．

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r} = P\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}'}$ とすると，

$${}^t\boldsymbol{r}'({}^tPAP)\boldsymbol{r}' - 4 = 0.$$

よって

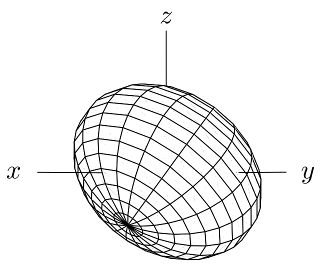
$$[x'\ y'\ z']\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}-4=0.$$

ゆえに

$$\frac{(x')^2}{2}+\frac{(y')^2}{2}+(z')^2=1. \tag{a}$$

この式は楕円面を表す.

答. 原点を中心に x', y', z' 軸をそれぞれ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ の方向に回転する線形写像によって (a) の楕円面を写像すると与式の曲面が得られる.



(2) 与式を実対称行列によって表す.

$$\underbrace{[x\ y\ z]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}}+2\underbrace{[-3\ 3\ 0]}_{{}^t\boldsymbol{b}}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$$

A の固有値は $\lambda_1=0$（重根）, $\lambda_2=3$（単根）である. λ_1 に対する固有ベクトルとして線形独立な $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ を選ぶ. λ_2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{x}_1\sim\boldsymbol{x}_3$ をグラム–シュミットの直交化法によって正規直交化すると

$$\boldsymbol{x}''_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}''_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}''_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

よって

$$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{r}=P\boldsymbol{r}'$ とすると,

$${}^t\boldsymbol{r}'({}^tPAP)\boldsymbol{r}'+2({}^t\boldsymbol{b}P)\boldsymbol{r}'=0.$$

よって

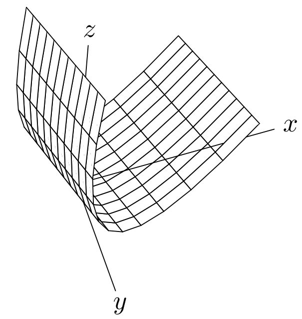
$$[x'\ y'\ z']\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}+2[-3\sqrt{2}\ 0\ 0]\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=0.$$

ゆえに

$$3(z')^2 - 6\sqrt{2}x' = 0 \quad \to \quad x' = \frac{1}{2\sqrt{2}}(z')^2. \tag{b}$$

この式は放物柱を表す.

答. 原点を中心に x', y', z' 軸をそれぞれ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ の方向に回転する線形写像によって (b) の放物柱を写像すると与式の曲面が得られる.



(3) 与式を実対称行列によって表す.

$$\underbrace{[x\ y\ z]\begin{bmatrix}2 & -2 & 5\\-2 & 2 & -5\\5 & -5 & -1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}} + 2\underbrace{[-3\ 3\ -3]}_{{}^t\boldsymbol{b}}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} - 6 = 0$$

A の固有値は $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 9$ である. $\lambda_1 \sim \lambda_3$ に対する固有ベクトルは, それぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$. $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_3$ は互いに直交しているので単位ベクトルにして並べて直交行列 P を作る.

$$P = \begin{bmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3}\\-2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r} = P\boldsymbol{r}'$ とすると,

$${}^t\boldsymbol{r}'({}^tPAP)\boldsymbol{r}' + 2({}^t\boldsymbol{b}P)\boldsymbol{r}' - 6 = 0.$$

よって

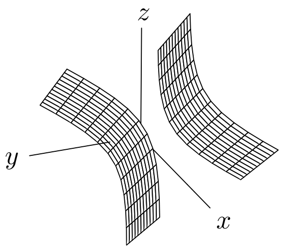
$$[x'\ y'\ z']\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix} + 2[0\ 0\ \ -3\sqrt{3}]\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix} - 6 = 0.$$

ゆえに

$$-6(x')^2 + 9(z')^2 - 6\sqrt{3}z' - 6 = 0 \quad \to \quad \left(z' - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{2}{3}(x')^2 = 1. \tag{c}$$

この式は, $(z')^2 - \dfrac{2}{3}(x')^2 = 1$ によって表される双曲柱を z' 軸正方向に $1/\sqrt{3}$ だけ平行移動した図形を表す.

答. 原点を中心に x', y', z' 軸をそれぞれ $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ の方向に回転する線形写像によって (c) の双曲柱を写像すると与式の曲面が得られる．



注：たとえば (1) の問題で固有ベクトル $\boldsymbol{x}_3$ を $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ とする代わりに $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ と符号を変えることも可能である．このときに (a) の式は変わらないが，$x'y'z'$ 空間から xyz 空間への線形写像は単なる回転だけでなく，原点に関する対称移動も必要となる．もちろん結果の図は変わらない．さらに，固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_3$ の順序を変えて P を定義しても対称移動が必要となることがある．他の問題も同様.

6.14 与えられた行列を A とする．

(1) $|A - \lambda E| = \lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$ より $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{7}i}{2}$.
$\lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{3+\sqrt{7}i}{2} + \dfrac{3-\sqrt{7}i}{2} = 3$. 一方，$\mathrm{tr}\, A = 1 + 2 = 3$.
$\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}\,\dfrac{3-\sqrt{7}i}{2} = 4$. 一方，$|A| = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 4$.
確かに定理 6.11 が成立する．

(2) $|A - \lambda E| = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$ より $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.
$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + 2 + 3 = 5$. 一方，$\mathrm{tr}\, A = 1 + 1 + 3 = 5$.
$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \cdot 2 \cdot 3 = 0$. 一方，$|A| = 3 + 2 + 4 + 1 - 12 + 2 = 0$.
確かに定理 6.11 が成立する．

6.15 行列 A, B の (i, j) 成分をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とする．

(1)
$$\mathrm{tr}\,(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}), \qquad \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}.$$
よって等式が成り立つ.

(2) AB の (i, i) 成分は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$, BA の (i, i) 成分は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}$. よって
$$\mathrm{tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}, \qquad \mathrm{tr}\,(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}.$$
$\mathrm{tr}\,(AB)$ の方の和をとる変数 i, j をそれぞれ j, i に書き換えれば，それが $\mathrm{tr}\,(BA)$ に等しいことは明らか.

6.16 エルミート行列は $H^* = H$ を満たすので $HH^* = H^*H$ が明らかに成り立つ．よって H は正規行列である．

ユニタリ行列は $U^*U = E$ なので $U^* = U^{-1}$ であり，UU^*, U^*U ともに単位行列 E に等しい．よって U は正規行列である．

6.17 ユニタリ行列 U の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とする．

$$U^* = {}^t\overline{U} = {}^t[\overline{\boldsymbol{x}_1}\ \overline{\boldsymbol{x}_2}\ \cdots\ \overline{\boldsymbol{x}_n}] = \begin{bmatrix} {}^t\overline{\boldsymbol{x}_1} \\ {}^t\overline{\boldsymbol{x}_2} \\ \vdots \\ {}^t\overline{\boldsymbol{x}_n} \end{bmatrix}$$

よって U^*U の (i,j) 成分は ${}^t\overline{\boldsymbol{x}_i}\,\boldsymbol{x}_j = (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)$ となり，これが E の (i,j) 成分に等しいので $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$ となる．したがって $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_n$ は正規直交基底をなす．

6.18 U の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とすると

$$AU = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \text{\huge 0} \\ & \text{\huge 0} & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

より

$$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$$

となる．またユニタリ行列の定義より $|U| \neq 0$ は明らかなので，$\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ である．したがって $\boldsymbol{x}_i$ は A の固有値 λ_i に対する固有ベクトルである．

6.19 (1) A の (i,j) 成分を a_{ij} とすると ${}^tA = -A$ より $a_{ji} = -a_{ij}$．特に $i = j$ のとき $a_{ii} = -a_{ii}$ より $a_{ii} = 0$． 答. $a_{ji} = -a_{ij}$ であり，特に $a_{ii} = 0$．

(2) $A^* = {}^t\overline{A} = {}^tA = -A$．よって $AA^* = A^*A = -A^2$．

6.20 (1) 成分がすべて実数なので $A^* = {}^t\overline{A} = {}^tA$．これが $-A$ に等しいので A は交代行列である．

(2) A の (i,j) 成分を a_{ij} とすると $A^* = -A$ より $\overline{a_{ji}} = -a_{ij}$．特に $i = j$ のとき $\overline{a_{ii}} = -a_{ii}$，すなわち $a_{ii} + \overline{a_{ii}} = 0$．任意の複素数 $z = x + iy$ に対し $z + \overline{z} = 0$ は，$x = 0$ つまり z が純虚数を意味するので，a_{ii} も純虚数である． 答. $\overline{a_{ji}} = -a_{ij}$ であり，特に a_{ii} は純虚数.

(3) $A^* = -A$ より $AA^* = A^*A = -A^2$．

6.21 与えられた行列を A とする．対角化するためのユニタリ行列 U を作るには，まず A の固有ベクトルを求め（問題 6.18），それら固有ベクトルから正規直交基底をなすベクトルを作り（問題 6.17），それらを列ベクトルする行列を作ればよい．

(1) A の固有値は $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$．固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$．

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = {}^t\overline{\boldsymbol{x}_1}\,\boldsymbol{x}_2 = [1\ \ -i] \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = 0$$

より $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ は直交する．それぞれを単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} U^*AU &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ i(1+i) & -i(1-i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \quad \text{（確かに対角化できる）} \end{aligned}$$

(2) A の固有値は $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$. 固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1+i \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1-i \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$. $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ より $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ は直交する．それぞれを単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -1-i \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} U^*AU &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & \sqrt{2} \\ -1+i & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -1-i \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-i & \sqrt{2} \\ -1+i & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (1+\sqrt{2})(1+i) & -(1-\sqrt{2})(1+i) \\ \sqrt{2}(1+\sqrt{2}) & \sqrt{2}(1-\sqrt{2}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{（確かに対角化できる）} \end{aligned}$$

(3) A の固有値は $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+\sqrt{2}i$, $\lambda_3 = 1-\sqrt{2}i$. 固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \\ -1 \end{bmatrix}$. $i \neq j$ のとき $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = 0$ なので $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_j$ は直交する．それぞれを単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} U^*AU &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2}i & -1 \\ 1 & \sqrt{2}i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2}i & -1 \\ 1 & \sqrt{2}i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1+\sqrt{2}i & 1-\sqrt{2}i \\ 0 & \sqrt{2}i(1+\sqrt{2}i) & -\sqrt{2}i(1-\sqrt{2}i) \\ \sqrt{2} & -(1+\sqrt{2}i) & -(1-\sqrt{2}i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2}i \end{bmatrix} \quad \text{（確かに対角化できる）} \end{aligned}$$

6章演習問題解答

6.1 与えられた行列を A とする．

(1)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

より，固有値は$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$.

$(A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x-2y \\ x+3y+z \\ x+3y+z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_1 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$.

$(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -x-2y \\ x+y+z \\ x+3y-z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_2 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$(A-\lambda_3 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2(x+y) \\ x+z \\ x+3y-2z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_3 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(2)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2+1) = 0$$

より，固有値は$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i$.

$(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -x+2y+2z \\ x+y-2z \\ 2y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_1 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -(1+i)x+2y+2z \\ x+(1-i)y-2z \\ 2y-iz \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_2 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1+3i \\ -1 \\ 2i \end{bmatrix}$.

$(A-\lambda_3 E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -(1-i)x+2y+2z \\ x+(1+i)y-2z \\ 2y+iz \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より λ_3 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1-3i \\ -1 \\ -2i \end{bmatrix}$.

注：$A,\ E$ が実行列でかつ $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ なので $\overline{(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x}} = (A-\lambda_3 E)\overline{\boldsymbol{x}}$. したがって $\boldsymbol{x}$ が λ_2 の固有ベクトルなら $\overline{\boldsymbol{x}}$ が λ_3 の固有ベクトルになる．このことは，実行列の共役な複素固有値について常に成り立つ．

(3)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

より，固有値は $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=1,\ \lambda_4=2$.

$$(A-\lambda_1E)\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\u\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}x+y+u\\x+3y+3u\\-2x+3z\\-(x+y+u)\end{bmatrix}=\mathbf{0} \text{ より } \lambda_1 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

$$(A-\lambda_2E)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}y+u\\x+2y+3u\\-2(x-z)\\-(x+y+2u)\end{bmatrix}=\mathbf{0} \text{ より } \lambda_2 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

$$(A-\lambda_3E)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-x+y+u\\x+y+3u\\-2x+z\\-(x+y+3u)\end{bmatrix}=\mathbf{0} \text{ より } \lambda_3 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{bmatrix}1\\2\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

$$(A-\lambda_4E)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2x+y+u\\x+3u\\-2x\\-(x+y+4u)\end{bmatrix}=\mathbf{0} \text{ より } \lambda_4 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

6.2 問題で与えられた行列を A とする．

(1) $|A-\lambda E|=-(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$ より固有値は $\lambda_1=1$（重根），$\lambda_2=2$（単根）.

$$(A-\lambda_1E)\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}x+y+z\\y\\-(x+4y+z)\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

より $y=0,\ z=-x$ なので，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ の 1 種類しかない．これは P.141 の 3 次正方行列のジョルダンの標準形の (i) に相当する．そこで，$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_1$ とおき，たとえば $\boldsymbol{x}_1'=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ を得る．また，$(A-\lambda_2E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ より $\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$．以上より

$$P=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&-1\\-1&0&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

(2) $|A-\lambda E|=-(\lambda-1)^3=0$ より固有値は $\lambda=1$（3 重根）.

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2y\\y-z\\y-z\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

より $y=z=0$ なので，固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ の 1 種類しかない．これは P.142 の 3 次正方行列のジョルダンの標準形の (ii) に相当する．そこで，$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_1$ とお

き，たとえば $\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ を得る．さらに，$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}'$ より $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ を得る．以上より

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) $|A-\lambda E| = (\lambda-1)^3(\lambda-2) = 0$ より固有値は $\lambda_1 = 1$（3 重根），$\lambda_2 = 2$（単根）．

$$(A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} y+z \\ x-y-z+u \\ -(x-y-z+u) \\ x+u \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

より $u=-x,\ z=-y$ なので，固有ベクトルの一般形は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ -t \\ -s \end{bmatrix}$ となる．よって線形独立なベクトルは 2 種類しか作れない．A は 4 次正方行列であるが，これは P.142 の 3 次正方行列のジョルダンの標準形の (iii) に相当する．そこで改めて線形独立な $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2$ を以下の条件を満たすように作る．

$$(A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ u_1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}_1} = \mathbf{0}, \qquad (A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \\ u_1' \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}_1'} = \boldsymbol{x}_1, \qquad (A-\lambda_1 E)\underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}_2} = \mathbf{0}.$$

これより

$$\begin{aligned}
&x_1 + u_1 = 0, \qquad y_1 + z_1 = 0, \\
&x_1' + u_1' = u_1, \qquad y_1' + z_1' = x_1, \qquad x_1' - y_1' - z_1' + u_1' = y_1 = -z_1, \\
&x_2 + u_2 = 0, \qquad y_2 + z_2 = 0
\end{aligned}$$

となるので，たとえば

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

を得る．また，$(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ より，λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を得る．

したがって

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.3 問題で与えられた行列を A とする．

(1) A の固有値は $\lambda_1 = 3$（重根），$\lambda_2 = -3$（単根）．λ_1 に対する固有ベクトルの一般形は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} s \\ -s+2t \\ t \end{bmatrix}$．これよりたとえば $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 2 種類が作れる．両者が直交するように

$$\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_1 \qquad \boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{x}_2 - \frac{(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2)}{(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1')}\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする．また，λ_2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$．$\boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2'$, $\boldsymbol{x}_3$ を単位ベクトルにして列ベクトルとして並べれば直交行列 U ができる．

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

(2) A の固有値は $\lambda_1 = -1$（重根），$\lambda_2 = 5$（単根）．λ_1 に対する固有ベクトルの一般形は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ -s-2t \end{bmatrix}$．これよりたとえば $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ の 2 種類が作れる．両者が直交するように

$$\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_1 \qquad \boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{x}_2 - \frac{(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2)}{(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1')}\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

とする．また，λ_2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$．$\boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2'$, $\boldsymbol{x}_3$ を単位ベクトルにして列ベクトルとして並べれば直交行列 U ができる．

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

6.4 (1)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{p}_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{p}_n}$$

A の固有値は $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ の 3 つ．したがって A は対角化できる．それぞ

れに対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$．これより次式が得られる．

$$P=\begin{bmatrix}2&2&1\\2&1&0\\5&3&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\2&3&-2\\-1&-4&2\end{bmatrix},$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad (P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}(-1)^n&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad(n\geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_n&=A^n\boldsymbol{p}_0=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}\boldsymbol{p}_0\\&=\begin{bmatrix}2&2&1\\2&1&0\\5&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&1\\2&3&-2\\-1&-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\\&=\boxed{\begin{bmatrix}-2(-1)^n-3\\-2(-1)^n\\-5(-1)^n-3\end{bmatrix}}.\end{aligned}$$

注：上式は $n\geqq 1$ で成り立つが，$n=0$ では成り立たない．

(2)

$$\boldsymbol{p}_{n+1}=\underbrace{\begin{bmatrix}-3&1&3\\2&2&-3\\-1&1&1\end{bmatrix}}_{A}\boldsymbol{p}_n$$

A の固有値は $\lambda_1=1$（重根），$\lambda_2=-2$（単根）の 2 つ．λ_1 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ の 1 種類のみ．そこで A をジョルダンの標準形に変形する．$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_1$ とおき $\boldsymbol{x}_1'=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ を得る．さらに，λ_2 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix}5\\-1\\2\end{bmatrix}$．以上より次式が得られる．

$$P=\begin{bmatrix}1&0&5\\1&1&-1\\1&0&2\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&0&5\\3&3&-6\\1&0&-1\end{bmatrix},$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix},\qquad (P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{bmatrix}\quad(n\geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_n&=A^n\boldsymbol{p}_0=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}\boldsymbol{p}_0\\&=\begin{bmatrix}1&0&5\\1&1&-1\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&0&5\\3&3&-6\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\quad=\boxed{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5(-2)^n+3n+1\\-(-2)^n+3n+4\\2(-2)^n+3n+1\end{bmatrix}}.\end{aligned}$$

(3)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ u_{n+1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{p}_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{p}_n}$$

A の固有値は $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 3$ の 4 つ．したがって A は対角化できる．それぞれに対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$．これより次式が得られる．

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad (P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \quad (n \geqq 1).$$

したがって

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_n &= A^n \boldsymbol{p}_0 = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \boldsymbol{p}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(-1)^n - 2^{n+1} + 3^{n+1} \\ 4(-1)^n - 2^n + 3^{n+1} \\ -4(-1)^n + 2^n \\ -2 \cdot 3^{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6.5 (1) 式の両辺を 2 倍しておく．

$$[x\ y\ z] \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}} + 2 = 0$$

A の固有値は $\lambda_1 = -\sqrt{2},\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \sqrt{2}$. A を対角化する直交行列 P により $\boldsymbol{r} = P \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}'}$ とすると

$${}^t\boldsymbol{r}'\,{}^tPAP\boldsymbol{r}' + 2 = {}^t\boldsymbol{r}' \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}' + 2 = 0.$$

ゆえに

$$-\sqrt{2}({x'}^2 - {z'}^2) + 2 = 0 \quad \to \quad \frac{{x'}^2}{\sqrt{2}} - \frac{{z'}^2}{\sqrt{2}} = 1.$$

これは P.157 の 2 次曲面の分類 (10) に相当する． 答．双曲柱

(2)

$$ {}^t\boldsymbol{r} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{r} + 2 \underbrace{[3\ 3/2\ 0]}_{{}^t\boldsymbol{b}} \boldsymbol{r} = 0$$

A の固有値は $\lambda_1 = -3$（単根），$\lambda_2 = 3$（重根）．λ_1 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\lambda_2$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ の 2 種類．$\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が直交していない（$\boldsymbol{x}_1$ とはどちらも直交）ので，

$$\boldsymbol{x}_3' = \boldsymbol{x}_3 - \frac{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2)}\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3'$ を単位ベクトルにして並べて P を作る．

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r} = P\boldsymbol{r}'$ より

$${}^t\boldsymbol{r}'{}^tPAP\boldsymbol{r}' + 2{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{r}' = {}^t\boldsymbol{r}' \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{r}' + [0\ 3\sqrt{2}\ 3\sqrt{3}]\boldsymbol{r}' = 0.$$

ゆえに

$$-3{x'}^2 + 3{y'}^2 + 3{z'}^2 + 3\sqrt{2}y' + 3\sqrt{3}z' = 0 \quad \to \quad -{x'}^2 + \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(z' + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

これは P.156 の 2 次曲面の分類 (2) に相当する． 答．1 葉双曲面

(3)

$$ {}^t\boldsymbol{r} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{r} + 2 \underbrace{[6\ 6\ 6]}_{{}^t\boldsymbol{b}} \boldsymbol{r} + 18 = 0$$

A の固有値は $-6, 0, 6$．それぞれの固有値に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$．

これらを単位ベクトルにして並べて P を作る.

$$P=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r}=P\boldsymbol{r}'$ より

$${}^t\boldsymbol{r}'{}^tPAP\boldsymbol{r}'+2{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{r}'+18={}^t\boldsymbol{r}'\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\boldsymbol{r}'+[0\ 0\ 12\sqrt{3}]\boldsymbol{r}'+18=0.$$

ゆえに

$$-6x'^2+6z'^2+12\sqrt{3}z'+18=0 \quad\rightarrow\quad -x'^2+(z'+\sqrt{3})^2=0.$$

これは P.157 の 2 次曲面の分類 (13) に相当する.　答. 交わる 2 平面

(4)

$${}^t\boldsymbol{r}\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 8 \end{bmatrix}}_{A}\boldsymbol{r}+2\underbrace{[3/2\ 3/2\ 0]}_{{}^t\boldsymbol{b}}\boldsymbol{r}+1=0$$

A の固有値は 3, 6, 9. それぞれの固有値に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
これらを単位ベクトルにして並べて P を作る.

$$P=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r}=P\boldsymbol{r}'$ より

$${}^t\boldsymbol{r}'{}^tPAP\boldsymbol{r}'+2{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{r}'+1={}^t\boldsymbol{r}'\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\boldsymbol{r}'+[3\sqrt{2}\ 0\ 0]\boldsymbol{r}'+1=0.$$

ゆえに

$$3x'^2+6y'^2+9z'^2+3\sqrt{2}x'+1=0 \quad\rightarrow\quad \left(x'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2y'^2+3z'^2=\frac{1}{6}.$$

これは P.157 の 2 次曲面の分類 (1) に相当する.　答. 楕円面

6.6 問題で与えられた n 次正方行列 A を改めて A_n と書くことにする. また $|A_n-\lambda E|$ を λ に関する n 次多項式とみなしたとき, λ^{n-1} の係数を $(-1)^{n-1}p_n$, λ^{n-2} の係数を $(-1)^{n-2}q_n$ と

する．このとき

$$|A_{n+1}-\lambda E| = \underbrace{\begin{vmatrix} a-\lambda & b & & & \\ c & a-\lambda & b & & \\ & c & a-\lambda & b & \\ & & c & a-\lambda & b \\ & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{vmatrix}}_{\text{第 1 行で余因子展開}}$$

$$=(a-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} a-\lambda & b & & \\ c & a-\lambda & b & \\ & c & a-\lambda & b \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{vmatrix}}_{|A_n-\lambda E|} - b\underbrace{\begin{vmatrix} c & b & & \\ & a-\lambda & b & \\ & c & a-\lambda & b \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{vmatrix}}_{\text{第 1 行で余因子展開}}$$

$$=(a-\lambda)|A_n-\lambda E| - bc\underbrace{\begin{vmatrix} a-\lambda & b & \\ c & a-\lambda & b \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{vmatrix}}_{|A_{n-1}-\lambda E|}$$

$$=(a-\lambda)|A_n-\lambda E| - bc\,|A_{n-1}-\lambda E|$$

となる（行列式中で空白の部分の成分はすべて 0 とする）．ゆえに

$$\begin{aligned}&(-1)^{n+1}\lambda^{n+1}+(-1)^n p_{n+1}\lambda^n+(-1)^{n-1}q_{n+1}\lambda^{n-1}+\cdots\\ =&(a-\lambda)\bigl((-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}p_n\lambda^{n-1}+(-1)^{n-2}q_n\lambda^{n-2}+\cdots\bigr)\\ &\quad -bc\bigl((-1)^{n-1}\lambda^{n-1}+(-1)^{n-2}p_{n-1}\lambda^{n-2}+(-1)^{n-3}q_{n-1}\lambda^{n-3}+\cdots\bigr).\end{aligned}$$

両辺の λ^n, λ^{n-1} の係数をそれぞれ比較すると

$$\begin{aligned}(-1)^n p_{n+1} &= (-1)^n a-(-1)^{n-1}p_n,\\ (-1)^{n-1}q_{n+1} &= (-1)^{n-1}ap_n-(-1)^{n-2}q_n-(-1)^{n-1}bc.\end{aligned}$$

よって

$$p_{n+1}-p_n = a, \tag{a}$$

$$q_{n+1}-q_n = ap_n-bc. \tag{b}$$

さらに $n=1$ のとき $|A_1|=a-\lambda$ より $p_1=a$, $q_1=0$．(a) より

$$p_n=(p_n-p_{n-1})+(p_{n-1}-p_{n-2})+\cdots+(p_2-p_1)+p_1=na.$$

(b) より

$$\begin{aligned}q_n&=(q_n-q_{n-1})+(q_{n-1}-q_{n-2})+\cdots+(q_2-q_1)+q_1\\ &=\sum_{i=1}^{n-1}(ap_i-bc)=\sum_{i=1}^{n-1}(a^2i-bc)=\frac{n(n-1)}{2}a^2-(n-1)bc.\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}|A_n-\lambda E|&=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)\\ &=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\Bigl(\sum_{1\leqq i\leqq n}\lambda_i\Bigr)\lambda^{n-1}+(-1)^{n-2}\Bigl(\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\lambda_i\lambda_j\Bigr)\lambda^{n-2}+\cdots\end{aligned}$$

より

$$p_n = \sum_{1 \leqq i \leqq n} \lambda_i, \qquad q_n = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \lambda_i \lambda_j.$$

p_n より $\displaystyle\sum_{1 \leqq i \leqq n} \lambda_i = na = \operatorname{tr} A$ が得られ，定理 6.11 の前半の確認となっている．また q_n より

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \lambda_i \lambda_j = \frac{n(n-1)}{2} a^2 - (n-1)bc$$

が得られる．さらに

$$\sum_{1 \leqq i \leqq n} \lambda_i^2 = \Big(\sum_{1 \leqq i \leqq n} \lambda_i \Big)^2 - 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \lambda_i \lambda_j = na^2 + 2(n-1)bc$$

となる．

6.7 (1) 行列式 $|A|$ が 0 であることと A が正則でないことは同値である．また，$|A|$ は A の固有値の積に等しいので，$|A|$ が 0 であることと，固有値に 0 が含まれることは同値である．

(2) A が正則なので (1) より $\lambda \neq 0$ である．$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると $\boldsymbol{x} = \lambda A^{-1} \boldsymbol{x}$ となる．さらに両辺を λ で割ると $A^{-1}\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$ が得られる．したがって λ^{-1} は A^{-1} の固有値である．

6.8 問題で与えられた行列を A とする．

(1) A の固有値は $-i$, $+i$ で，それぞれに対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$．これらは互いに直交するので，単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U^* A U = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

(2) A の固有値は 1, $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$ で，それぞれに対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2}i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2}i \end{bmatrix}$．これらは互いに直交するので，単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad U^* A U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(3) A の固有値は $\lambda_1 = -1$（重根），$\lambda_2 = 1$（重根）．λ_1 に対する固有ベクトルの一般形は s, t を任意の数として $\begin{bmatrix} s \\ t \\ is \\ -it \end{bmatrix}$ なので，直交する 2 つの固有ベクトルとして例えば

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}$ をとる．また，λ_2 に対する固有ベクトルの一般形は $\begin{bmatrix} s \\ t \\ -is \\ it \end{bmatrix}$ なので，直交する 2 つの固有ベクトルとして例えば $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$ をとる．$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ と $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ 同士も直交するので，すべてを単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & i \end{bmatrix}, \qquad U^*AU = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) A の固有値は $\lambda_1 = -\sqrt{2}i$（重根），$\lambda_2 = \sqrt{2}i$（重根）．λ_1 に対する固有ベクトルの一般形は s, t を任意の数として $\begin{bmatrix} s \\ t \\ s - i\sqrt{2}t \\ -i\sqrt{2}s - t \end{bmatrix}$ なので，直交する 2 つの固有ベクトルとして例えば $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2}i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ をとる．λ_2 に対する固有ベクトルは，A が実行列で $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ なので $\boldsymbol{x}_3 = \overline{\boldsymbol{x}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4 = \overline{\boldsymbol{x}_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$（演習問題 6.1 (2) の解答の注を参照のこと）．$\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_4$ は互いに直交するので，すべてを単位ベクトルにして並べてユニタリ行列 U を作る．

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}i & 0 & -\sqrt{2}i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2}i & 0 & \sqrt{2}i & 0 \end{bmatrix}, \qquad U^*AU = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

6.9 ユニタリ行列 U の固有値，固有ベクトルをそれぞれ λ, $\boldsymbol{x}$ とすると，$U\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である．$U^*U = {}^t\overline{U}U = E$ より

$$(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{x}) = {}^t(\overline{U\boldsymbol{x}})\,U\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,{}^t\overline{U}U\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}E\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2.$$

一方

$$(\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = {}^t(\overline{\lambda\boldsymbol{x}})\lambda\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\lambda\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = |\lambda|^2|\boldsymbol{x}|^2.$$

$(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x})$, $|\boldsymbol{x}| \neq 0$ より $|\lambda|^2 = 1$，したがって $|\lambda| = 1$.

6.10 (1) A の固有値は -3, -1, 2 で，対応する固有ベクトルはそれぞれ $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

よって

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3X + Y + Z \\ -5X - Y \\ 3X + 2Y + Z \end{bmatrix}$$

成分同士の等式を考えれば次式も明らか.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\dot{X} + \dot{Y} + \dot{Z} \\ -5\dot{X} - \dot{Y} \\ 3\dot{X} + 2\dot{Y} + \dot{Z} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}$$

(1) の式にこの関係を代入する.

$$P \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = AP \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = P^{-1}AP \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

(3)

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \\ Z(0) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ゆえに $X(0) = 0$, $Y(0) = -2$, $Z(0) = 3$.

②より

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

ゆえに $\dot{X} = -3X$, $\dot{Y} = -Y$, $\dot{Z} = 2Z$. これより a, b, c を任意定数として

$$X(t) = ae^{-3t}, \qquad Y(t) = be^{-t}, \qquad Z(t) = ce^{2t}.$$

また，$X(0) = a = 0$, $Y(0) = b = -2$, $Z(0) = c = 3$.

以上より $X(t) = 0$, $Y(t) = -2e^{-t}$, $Z(t) = 3e^{2t}$

(4)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^{-t} \\ 3e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 3e^{2t} \\ 2e^{-t} \\ -4e^{-t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$$

$x(t) = -2e^{-t} + 3e^{2t}$, $y(t) = 2e^{-t}$, $z(t) = -4e^{-t} + 3e^{2t}$

6.11 連立微分方程式を行列で表すと

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2&1&0\\2&1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

となる．A の固有値は $\lambda_1=2$（重根），$\lambda_2=1$（単根）．λ_1 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ の 1 種類．そこで P.141 の 3 次正方行列のジョルダンの標準形への変形手続き (i) を用いる．

$$(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_1$$

とおき，たとえば $\boldsymbol{x}_1'=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ を得る．一方，λ_2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$．以上より $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2$ を並べて P を作る．

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\2&-1&2\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

ここで前問のように

$$\begin{bmatrix}X(t)\\Y(t)\\Z(t)\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}$$

とおく．すると $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ に関して以下の連立微分方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\\dot{Y}\\\dot{Z}\end{bmatrix}=P^{-1}AP\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}$$

つまり

$$\text{(a)}\quad \dot{X}=2X+Y,\qquad \text{(b)}\quad \dot{Y}=2Y,\qquad \text{(c)}\quad \dot{Z}=Z$$

が得られる．(b), (c) を先に解いて $Y(t)=be^{2t}$, $Z(t)=ce^{t}$ が得られ，(a) に Y を代入して $\dot{X}=2X+be^{2t}$ となる．ゆえに問題のヒントより $X(t)=(a+bt)e^{2t}$ となる．ただし，a, b, c は任意定数である．また，

$$\begin{bmatrix}X(0)\\Y(0)\\Z(0)\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x(0)\\y(0)\\z(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\2&0&-1\\2&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\4\\5\end{bmatrix}$$

より $X(0)=a=-3$, $Y(0)=b=4$, $Z(0)=c=5$ となる．以上より

$$X(t)=(4t-3)e^{2t},\qquad Y(t)=4e^{2t},\qquad Z(t)=5e^{t}$$

が得られる．よって

$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}X(t)\\Y(t)\\Z(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\2&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(4t-3)e^{2t}\\4e^{2t}\\5e^{t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(4t-3)e^{2t}+5e^{t}\\4e^{2t}-5e^{t}\\(8t-10)e^{2t}+10e^{t}\end{bmatrix}.$$

答．$x(t)=(4t-3)e^{2t}+5e^{t}$, $y(t)=4e^{2t}-5e^{t}$, $z(t)=(8t-10)e^{2t}+10e^{t}$

付録 B 問題解答

B.1 (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{a}=(1+1)\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}$.

(2) $0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a}=(0+0)\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}$．両辺に $-(0\boldsymbol{a})$ を加えると $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(3) $(1+(-1))\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}$. ゆえに $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}$. (2) より $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ なので $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

(4) $\lambda(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0})=\lambda\boldsymbol{0}+\lambda\boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ なので $\lambda\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{0}+\lambda\boldsymbol{0}$. 両辺に $-(\lambda\boldsymbol{0})$ を加えて $\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{0}$.

B.2 ベクトル空間の公理 (P.177~178) の V を n 次実正方行列全体の集合，$\boldsymbol{K}$ を $\boldsymbol{R}$ とする．また，V の任意の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は任意の n 次実正方行列 A, B と読み替えればよい．n 次の零行列 O は，任意の行列 A に対して $A+O=A$ となるので，ベクトル空間では零ベクトルである．すると以下のようにすべての公理が成り立つ.

(i) $A+B=B+A$. (問題 1.5 (1))

(ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$. (問題 1.5 (2))

(iii) $A+O=A$. (上記)

(iv) $A+B=O$ となる B は $B=-A$ であり確かに V 中に存在する.

(v) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$. (問題 1.5 (4))

(vi) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$. (問題 1.5 (5))

(vii) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$. (問題 1.5 (3))

(viii) $1A=A$. (明らか)

B.3 P_n の任意の元を $\boldsymbol{a}=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ などと表す．公理の (i), (ii) は明らか．また任意の $\boldsymbol{a}$ に対し $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$ なので 0 が零ベクトル $\boldsymbol{0}$ である．また，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ となるような $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}=-a_0-a_1x-\cdots-a_nx^n$ であり，(iv) が成り立つ．(v)~(viii) は明らか.

B.4 W は V の部分集合なので，公理の中で登場する等式の左右辺の演算結果が W に含まれることを確認すれば，等式が成立すること自体は自明である．W が部分空間であるための 2 つの条件をもう一度記す.

（ア） $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in W$ ならば $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in W$,
（イ） $\lambda\in\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{a}\in W$ ならば $\lambda\boldsymbol{a}\in W$.

以下，公理 (i)~(viii) についてひとつずつ確かめる.

(i) (ア) が成立するなら $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の順序を変えた $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\in W$ も当然成り立つ.

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\in W$ ならば，(ア) よりまず $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in W$ であり，さらに $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}\in W$ となる．$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\in W$ も同様.

(iii) (イ) について $\lambda=0$ を選ぶと $0\boldsymbol{a}\in W$ となる．$0\boldsymbol{a}$ は V の元 $\boldsymbol{0}$ に等しいので（問題 B.1 (2)），W の任意の元 $\boldsymbol{a}$ に対しても $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ となる.

(iv) (イ) について $\lambda=-1$ を選ぶと $(-1)\boldsymbol{a}\in W$ となる．$(-1)\boldsymbol{a}$ は V の元 $-\boldsymbol{a}$ に等しいので（問題 B.1 (3)），$\boldsymbol{a}\in W$ なら $-\boldsymbol{a}\in W$ となる.

(v) $\lambda, \mu\in\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{a}\in W$ なら (イ) より $\lambda\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{a}\in W$ であり，(ア) より $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}\in W$．さらに $\lambda+\mu\in\boldsymbol{K}$ なので $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}\in W$.

(vi) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ なら (ア) より $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$．よって (イ) より $\lambda \in \boldsymbol{K}$ なら $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \in W$．また (イ) より $\lambda\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b} \in W$ なので (ア) より $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \in W$．

(vii) $\lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$ なら $\lambda\mu \in \boldsymbol{K}$．よって $\boldsymbol{a} \in W$ なら $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} \in W$．また (イ) より $\mu\boldsymbol{a} \in W$ であり，さらに (イ) より $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) \in W$．

(viii) $1 \in \boldsymbol{K}$ であるので $\boldsymbol{a} \in W$ なら (イ) より $1\boldsymbol{a} \in W$．

B.5 $\{\mathbf{0}\}$ の任意の元は $\mathbf{0}$ しかない．また，$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $(\mathbf{0}+\mathbf{0})+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $(\lambda+\mu)\mathbf{0}=\mathbf{0}$ 等，公理に現れる等式の左右辺の演算結果は常に $\mathbf{0}$ となり等式が成立する．よって $\{\mathbf{0}\}$ は部分空間である．

B.6 $P_1 \sim P_3$ が部分空間になることは明らか．P_0 すなわち定数だけの集合 $\{a_0; a_0 \in \boldsymbol{R}\}$ も部分空間になる．さらにたとえば P_4 の元のうち x の 1 次の項がないもの，すなわち $a_0+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ で表される元全体の集合も部分空間をなす．なぜなら，$\mathbf{0}=0$ はこのうちに含まれており，元同士の和やスカラー倍によっても 1 次の項が生まれないからである．

B.7 (1) S の任意の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in S$, $\lambda\boldsymbol{a} \in S$ であり，零元 $\mathbf{0}$ が 0 であることも容易にわかる．公理のすべての条件が成立することは問題 B.3 の 1 変数の場合を参考にすればたやすいので省略する．

(2) $c_1(x^2-1)+c_2(x^2+xy)+c_3(xy+1)=0$ とする．x, y の同じ次数の項でまとめ直すと

$$(c_1+c_2)x^2+(c_2+c_3)xy+(-c_1+c_3)=0$$

となる．この等式が任意の x, y で成立するには，すべての係数が 0，すなわち

$$c_1+c_2=0, \qquad c_2+c_3=0, \qquad -c_1+c_3=0$$

が必要十分条件である．これより $c_1=c_3=-c_2$ が満たされればよいので，たとえば $(c_1,c_2,c_3)=(1,-1,1)$ でもよい．ゆえに線形従属である．

B.8 (1) 等式 $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\mathbf{0}$ を考えると，基底の定義よりこの場合でも $c_1 \sim c_n$ が一意に存在する．明らかに $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ はこの等式を満たし，一意性より等式を満たすものはそれ以外に存在しない．よって $\boldsymbol{a}_1 \sim \boldsymbol{a}_n$ は線形独立である．

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ に対し

$$\boldsymbol{\alpha}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n \qquad ①$$

と表したとき，$c_1 \sim c_n$ が一意であることを示せばよい．今，同じ $\boldsymbol{\alpha}$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha}=c_1'\boldsymbol{a}_1+c_2'\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n'\boldsymbol{a}_n \qquad ②$$

というように別の線形結合で表せたとする．ところが ① − ② より

$$(c_1-c_1')\boldsymbol{a}_1+(c_2-c_2')\boldsymbol{a}_2+\cdots+(c_n-c_n')\boldsymbol{a}_n=\mathbf{0}$$

となり，$\boldsymbol{a}_1 \sim \boldsymbol{a}_n$ が線形独立なので $c_1=c_1'$, $c_2=c_2'$, $\cdots$, $c_n=c_n'$ しかありえない．よって $c_1 \sim c_n$ は任意のベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ に対して一意に定まる．

B.9 $p(x) \sim p'''(x)$ は以下で与えられる．

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad p'(x) = 1 + 2x + 3x^2, \qquad p''(x) = 2 + 6x, \qquad p'''(x) = 6.$$

P_3 の任意の元を $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ と表すとき

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &= c_0p(x) + c_1p'(x) + c_2p''(x) + c_3p'''(x) \\ &= (c_0 + c_1 + 2c_2 + 6c_3) + (c_0 + 2c_1 + 6c_2)x + (c_0 + 3c_1)x^2 + c_0x^3 \end{aligned}$$

より

$$c_0 + c_1 + 2c_2 + 6c_3 = a_0, \qquad c_0 + 2c_1 + 6c_2 = a_1, \qquad c_0 + 3c_1 = a_2, \qquad c_0 = a_3$$

が得られる．これを $c_0 \sim c_3$ について解くと

$$\begin{aligned} &c_0 = a_3, \qquad c_1 = (a_2 - a_3)/3, \qquad c_2 = (3a_1 - 2a_2 - a_3)/18, \\ &c_3 = (9a_0 - 3a_1 - a_2 - 5a_3)/54 \end{aligned}$$

となり，$a_0 \sim a_3$ から $c_0 \sim c_3$ が一意的に定まる．よって $p(x) \sim p'''(x)$ は P_3 の基底である．

B.10
$$\begin{aligned} &a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + b_1x + b_2y + c \\ &\quad = c_1(x^2 - xy) + c_2(xy - y^2) + c_3(y^2 - x) + c_4(x - y) + c_5(y - 1) + c_6 \end{aligned}$$

とおく．両辺の同じべきの項を比較すると以下が得られる．

$$\begin{aligned} &a_1 = c_1, \qquad a_2 = c_2 - c_1, \qquad a_3 = c_3 - c_2, \\ &b_1 = c_4 - c_3, \qquad b_2 = c_5 - c_4, \qquad c = c_6 - c_5. \end{aligned}$$

これを $c_1 \sim c_6$ について解くと

$$\begin{aligned} &c_1 = a_1, \qquad c_2 = a_1 + a_2, \qquad c_3 = a_1 + a_2 + a_3, \qquad c_4 = a_1 + a_2 + a_3 + b_1, \\ &c_5 = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2, \qquad c_6 = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + c \end{aligned}$$

となり，a_i, b_i, c から $c_1 \sim c_6$ が一意に定まる．よって基底になる．

B.11 基底をなすベクトルの個数を数えればよい．
$\boldsymbol{R}^n$ の場合：第 i 成分が 1 で，それ以外の成分がすべて 0 のベクトルを $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して考える．任意の元はこれらの線形結合で一意に表せるので，これらが基底をなす．したがって $\boldsymbol{R}^n$ の次元は n．

P_n の場合：任意の元は $1, x, x^2, \cdots, x^n$ の線形結合で一意に表せるので，これらが基底をなす．したがって P_n の次元は $n+1$．

B.12 線形写像 $f : V \to W$ に対し，定義より $f(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda f(\boldsymbol{a})$ が成り立つ．$\lambda = 0$ のとき $f(0\boldsymbol{a}) = 0f(\boldsymbol{a})$．問題 B.1 (2) より $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \in V$, $0f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0} \in W$．よって $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$．また，$\lambda = -1$ のとき $f((-1)\boldsymbol{a}) = (-1)f(\boldsymbol{a})$．問題 B.1 (3) より $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$, $(-1)f(\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a})$．よって $f(-\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a})$．

B.13 線形写像の定義より

$$f(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r)=f(\lambda_1\boldsymbol{a}_1)+f(\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r)=\lambda_1 f(\boldsymbol{a}_1)+f(\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r).$$

同様に

$$f(\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r)=\lambda_2 f(\boldsymbol{a}_2)+f(\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r).$$

以下同様に展開すると，与式が成り立つことがわかる．

B.14 P_n の任意の元は $\boldsymbol{a}=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ と表すことができる．f によって写像すると

$$f(\boldsymbol{a})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dx}=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$$

となり，$f(\boldsymbol{a})\in P_{n-1}$ となる．さらに，

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{d(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{dx}=\frac{d\boldsymbol{a}}{dx}+\frac{d\boldsymbol{b}}{dx}=f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b}),$$
$$f(\lambda\boldsymbol{a})=\frac{d(\lambda\boldsymbol{a})}{dx}=\lambda\frac{d\boldsymbol{a}}{dx}=\lambda f(\boldsymbol{a})$$

が成り立つので，確かに f は P_n から P_{n-1} への線形写像である．

B.15 P.179 の部分空間の定義より，(i) $f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\in \operatorname{Im} f$ ならば $f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})\in\operatorname{Im} f$，(ii) $\lambda\in\boldsymbol{K}$, $f(\boldsymbol{a})\in\operatorname{Im} f$ ならば $\lambda f(\boldsymbol{a})\in\operatorname{Im} f$ の 2 つが示されればよい．
(i) について：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ より，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in V$ となる．ゆえに $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\in\operatorname{Im} f$．さらに f は線形写像なので $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})$．よって $f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})\in\operatorname{Im} f$.
(ii) について：$\boldsymbol{a}\in V$ より $\lambda\boldsymbol{a}\in V$ となる．ゆえに $f(\lambda\boldsymbol{a})\in\operatorname{Im} f$．さらに f は線形写像なので $f(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda f(\boldsymbol{a})$．よって $\lambda f(\boldsymbol{a})\in\operatorname{Im} f$.

B.16 (1) $f(\boldsymbol{a})=f(\boldsymbol{b})$ なら $f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})=f(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ となる．そこで $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を求める．

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x+y\\ -x+z\\ y+z\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

より s を任意定数として $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$．よって $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}$ となるような $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を求めればよい．たとえば $s=1$ として，$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$.

(2) $f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} x+y\\ -x+z\\ y+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}$ とおく．すると $p+q=r$ となるので $p+q\neq r$ ならばこの等式を満たす x, y, z は存在しない．たとえば $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{R}^3$ に含まれるが $\operatorname{Im} f$ には含まれない．したがって $\operatorname{Im} f\neq\boldsymbol{R}^3$.

(3) 任意の x, y, z に対して $x+y=p$, $-x+z=q$ とすると

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} p \\ q \\ p+q \end{bmatrix} = p\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} + q\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}}$$

と表すことができる．これは $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の線形結合であり，$f(\boldsymbol{x})$ が定まれば p, q は一意に定まる．したがって $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が $\mathrm{Im}\, f$ の基底であり，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ となる．

B.17 問題 B.7 の多項式に $y=1$ を代入すると

$$a_1x^2 + (a_2+b_1)x + (a_3+b_2+c)$$

となる．これは x の 2 次多項式である．さらに a_i, b_i, c を自由に与えて得られる多項式全体の集合は P_2 に等しい．従って問題 B.11 より $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$ である．

B.18 $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ ならば，f は線形写像なので $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$．よって $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathrm{Ker}\, f$ ならば $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in \mathrm{Ker}\, f$．また，$f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ すなわち $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}\, f$ ならば $f(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ なので $\lambda\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}\, f$．したがって $\mathrm{Ker}\, f$ は部分空間の定義を満たす．

B.19 問題 B.14：

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} = 0$$

より $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$．したがって $\mathrm{Ker}\, f = \{a_0;\ a_0$ は任意の実数$\} = P_0$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

問題 B.16：

$f(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たすのは $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$（問題 B.16 (1) 解答を参照）．したがって

$\mathrm{Ker}\, f = \left\{s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\ s \text{ は任意の実数}\right\}$. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $\mathrm{Ker}\, f$ の基底になるので $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

問題 B.17：

$y=1$ を代入して得られる多項式は

$$a_1x^2 + (a_2+b_1)x + (a_3+b_2+c).$$

この多項式が x によらず 0 となるのは

$$a_1 = a_2+b_1 = a_3+b_2+c = 0,$$

すなわち

$$a_1 = 0, \qquad b_1 = -a_2, \qquad c = -a_3 - b_2.$$

これを S の元に代入すると $a_2(xy-x) + a_3(y^2-1) + b_2(y-1)$．ゆえに

$$\mathrm{Ker}\, f = \{a_2(xy-x) + a_3(y^2-1) + b_2(y-1);\ a_2, a_3, b_2 \text{ は任意の実数}\}.$$

明らかに $xy-x$, y^2-1, $y-1$ が $\mathrm{Ker}\, f$ の基底になるので $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3$.

B.20 問題 B.14：

$V = P_n$, $\dim V = n+1$．$\mathrm{Im}\, f = P_{n-1}$ なので $\dim(\mathrm{Im}\, f) = n$ であり，問題 B.19 より $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$．よって定理 B.2 が成立する．

問題 B.16：

$V = \boldsymbol{R}^3$, $\dim V = 3$．問題 B.16 (3) より $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ であり，問題 B.19 より $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$．よって定理 B.2 が成立する．

問題 B.17：

$V = S$, $\dim V = 6$．問題 B.17 より $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$ であり，問題 B.19 より $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3$．よって定理 B.2 が成立する．

B.21 $V = \boldsymbol{R}^4$, $\dim V = 4$．$\boldsymbol{R}^4$ の任意の元 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix}$ を f で写像する．

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+u \\ -(x+2y+u) \\ 2(x+2y+u) \end{bmatrix} = (x+2y+u) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

よって

$$\mathrm{Im}\, f = \{t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} ; t \text{ は任意の実数 } \}$$

であり，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 1$．

一方，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ とおくと上式より $x+2y+u=0$ となる．したがって $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の一般形は $\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ -r-2s \end{bmatrix}$．ゆえに

$$\mathrm{Ker}\, f = \{r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; r, s, t \text{ は任意の実数 } \}$$

であり，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3$．ゆえに $\dim V = \dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 4$.

B.22 $V = P_n$, $\dim V = n+1$.

- $k \leqq n$ のとき：
  $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in P_n$ に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{d^k}{dx^k}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\ &= k! a_k + (k+1)! a_{k+1} x + \cdots + n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}. \end{aligned}$$

よって $\dim(\mathrm{Im}\, f) = n - k + 1$．$f(\boldsymbol{x}) = 0$ とおくと $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$．ゆえに

$$\mathrm{Ker}\, f = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1};\ a_0 \sim a_{k-1}\text{は任意の実数}\}.$$

ゆえに $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = k$．よって定理 B.2 が成り立つ．

- $k > n$ のとき：
  $f(\boldsymbol{x}) = 0$．$\mathrm{Im}\, f = \{0\}$ なので $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 0$．また $\mathrm{Ker}\, f = V = P_n$ より $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = n + 1$．よって定理 B.2 が成り立つ．