理工系 複素関数論– 多変数の微積分から複素解析へ —
章末問題 I の解答ならびに補遺・正誤表

[はじめに]
　ここには教科書にある問題の比較的詳しい解答のほかに，幾つかの注意や関連問題が含まれています．関連問題は，難易度・精粗まちまちですが，教科書や問題の内容をよりよく理解するのに非常に役立つ筈です．また，この章の内容に関する補遺と正誤表が末尾にあります．不手際をお詫びし，ご訂正くださるようお願いします．]
　解答はもちろん正確を期したものではありますが，それでもまだまだミスプリントや計算間違いがあるかもしれません．発見なさったら，お手数ですが是非とも著者にご一報くださるようお願いします．連絡先は shiba@amath.hiroshima-u.ac.jp です．どうかよろしくお願いします．

1. (x, y) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 (x, y) と球面 $\Sigma : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ 上の点 (ξ, η, ζ) との対応は,

$$(*) \qquad \xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

である．ここで，(x, y) を $(-x, -y)$ で置き換えると，(ξ, η, ζ) は $(-\xi, -\eta, \zeta)$ となる．

2. 実軸に関して対称な 2 点については，前問の $(*)$ において，$(x, y) \to (x, -y)$ とすると，$(\xi, \eta, \zeta) \to (\xi, -\eta, \zeta)$ となる．

また，(x, y) に対して単位円周と対称な点を (x^*, y^*) とすると，

$$\sqrt{x^{*2} + y^{*2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

ここで，$x^* = \alpha x$, $y^* = \alpha y$ $(\alpha > 0)$ とおくと，

$$\sqrt{\alpha^2(x^{*2} + y^{*2})} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$
$$\alpha = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

よって，

$$x^* = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y^* = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

.

点 (x^*, y^*) を立体射影によって引き戻した点を (ξ^*, η^*, ζ^*) とすると,

$$\xi^* = \frac{2x^*}{x^{*2}+y^{*2}+1} = \frac{\dfrac{2x}{x^2+y^2}}{\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+1}$$
$$= \frac{\dfrac{2x}{x^2+y^2}}{\dfrac{1}{x^2+y^2}+1} = \frac{2x}{x^2+y^2+1} = \xi.$$

同様にして, $\eta^* = \eta$, $\zeta^* = -\zeta$.

3. $\delta(x_1, y_2) \geq 0$ は明らか.
$\delta(x_1, x_2) = 0 \iff \mathrm{Tan}^{-1}x_1 - \mathrm{Tan}^{-1}x_2 = 0 \iff x_1 = x_2$.
$\delta(x_1, x_2) = \delta(x_2, x_1)$ は明らか. 最後に,

$$\begin{aligned}\delta(x_1,x_2)+\delta(x_2,x_3) &= |\mathrm{Tan}^{-1}x_1 - \mathrm{Tan}^{-1}x_2| + |\mathrm{Tan}^{-1}x_2 - \mathrm{Tan}^{-1}x_3| \\ &\geq |\mathrm{Tan}^{-1}x_1 - \mathrm{Tan}^{-1}x_3| = \delta(x_1,x_3).\end{aligned}$$

4. 実数 x に対して,

$$\begin{gathered}\delta(+\infty, x) = \delta(x, +\infty) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}x \\ \delta(-\infty, x) = \delta(x, -\infty) = \mathrm{Tan}^{-1}x + \frac{\pi}{2} \\ \delta(-\infty, +\infty) = \delta(+\infty, -\infty) = \pi\end{gathered}$$

と定義すればよい. このとき,

$$\delta(x,+\infty)+\delta(x,-\infty) = \pi = \delta(+\infty,-\infty)$$
$$\begin{aligned}\delta(x,+\infty)+\delta(x,y) &= \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}x\right) + \left|\mathrm{Tan}^{-1}x - \mathrm{Tan}^{-1}y\right| \\ &\geq \frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}y = \delta(y,+\infty)\end{aligned}$$

など.

5. 距離の公理 (脚注 28 参照) のうち，最後のもの (3 角不等式) だけが自明ではない．3 角不等式の成立を幾何学的に確かめるためには，まず，問題において定義された 2 点 P, Q 間の距離はこれら 2 点を $\mathbb{R}^3$ で結ぶ線分の長さ $\overline{PQ}$ に他ならないことに注意する．与えられた 3 点 (そのうちの 1 つが北極であってもよい)Q_1, Q_2, Q_3 を通る平面を考える．この平面の上にある 3 点 Q_1, Q_2, Q_3 は平面内の 3 角不等式の成立によって $\overline{Q_1Q_2} + \overline{Q_2Q_3} \geq \overline{Q_1Q_3}$ を満たすから，距離 χ の定義によって，期待されたとおり $\chi(Q_1, Q_2) + \chi(Q_2, Q_3) \geq \chi(Q_1, Q_3)$ が成り立つ．

   [**関連問題**]
   上の問題では幾何学的に示された 3 角不等式を代数的に示せ．

   [注意] 問題 8 の結果を使えば少しは簡単になるであろうが，ここではこの段階で知られた事実だけを用いて証明することを要求している．

6. $\mathrm{N}(0, 0, 1), \mathrm{S}(0, 0, -1)$ に対して，前問の距離の定義を適用すると，$\chi(\mathrm{N}, \mathrm{S}) = 2$.

7. $\tilde{\chi}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) = \chi(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2)$ による．

8. 定義から，距離 $\tilde{\chi}$ の平方は座標を用いて具体的に

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1} - \frac{2x_2}{x_2^2 + y_2^2 + 1}\right)^2 \\
&\qquad + \left(\frac{2y_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1} - \frac{2y_2}{x_2^2 + y_2^2 + 1}\right)^2 \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{x_1^2 + y_1^2 - 1}{x_1^2 + y_1^2 + 1} - \frac{x_2^2 + y_2^2 - 1}{x_2^2 + y_2^2 + 1}\right)^2
\end{aligned}
$$

   で与えられる．ここで $A = x_1^2 + y_1^2 + 1$, $B = x_2^2 + y_2^2 + 1$ とおくと，各項を通分して纏めたものの分子は

$$
\begin{aligned}
&(2x_1B - 2x_2A)^2 + (2y_1B - 2y_2A)^2 + \{(A-2)B - (B-2)A\} \\
&\quad = 4x_1^2B^2 - 8x_1x_2AB + 4x_2A^2 + 4y_1^2B^2 - 8y_1y_2AB + 4y_2A^2 + 4(A-B)^2 \\
&\quad = 4B^2(x_1^2 + y_1^2 + 1) + 4A^2(x_2^2 + y_2^2 + 1) - 8AB(x_1x_2 + y_1y_2 + 1) \\
&\quad = AB^2A + 4A^2B - 8AB(x_1x_2 + y_1y_2 + 1) \\
&\quad = 4AB\{B + A - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + 1)\} \\
&\quad = 4AB\{x_2^2 + y_2^2 + 1 + x_1^2 + y_1^2 + 1 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) - 2\} \\
&\quad = 4AB\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}.
\end{aligned}
$$

したがって

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) &= \sqrt{\frac{4AB\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{(AB)^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+1}\sqrt{x_2^2+y_2^2+1}}.\end{aligned}$$

P_2 が無限遠点のとき，$\xi_2 = \eta_2 = 0, \zeta_2 = 0$ であるから，

$$\begin{aligned}\chi(z, \infty) &= \sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+(\eta_1-1)^2} = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta_1^2-2\zeta_1+1} \\ &= \sqrt{2(1-\zeta_1)} = \sqrt{2\left(1-\frac{x_1^2+y_1^2-1}{x_1^2+y_1^2+1}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{4}{x_1^2+y_1^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+1}}.\end{aligned}$$

[注意] 上の問題の後半は，$\tilde{\chi}(P_1, P_2)$ において $x_2^2+y_2^2 \to \infty$ としたものに等しい．

9. $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ の無限点列を任意に与えたとき，そこから収束する部分列が取り出せることを示せばよい．教科書本文 5 ページの議論を真似れば容易である．

10. 直線 $x = \alpha \neq 0$ の像は $u = \alpha^2 - y^2, v = 2\alpha y$. これらから y を消去して放物線 $u = \alpha^2 - \left(\dfrac{v}{2\alpha}\right)^2$ が得られる．

同様にして，直線 $y = \beta \neq 0$ の像は $u = x^2 - \beta^2, v = 2x\beta$ であるが，これらから x を消去すれば放物線 $u = \left(\dfrac{v}{2\beta}\right)^2 - \beta^2$ を得る．

こうして得られた 2 つの放物線のそれぞれについて，

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2\alpha^2}{v}, \qquad \frac{dv}{du} = \frac{2\beta^2}{v}$$

であるから，2 つの放物線の交点 $(u, v) = (\alpha^2 - \beta^2, 2\alpha\beta)$ における接線の傾きはそれぞれ，

$$-\frac{2\alpha^2}{2\alpha\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \frac{2\beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$$

である．したがって，$\alpha\beta \neq 0$ のときには像曲線は互いに直交する．

直線 $x = 0$ の像は，半直線 $v = 0\,(u < 0)$ であるが，これは $y = \beta \neq 0$ の像である放物線 $u = \left(\dfrac{v}{2\beta}\right)^2 - \beta^2$ と明らかに直交する．

同様に，直線 $y = 0$ の像は 半直線 $v = 0\,(u > 0)$ であって，これは明らかに $x = \alpha \neq 0$ の像である放物線 $u = \alpha^2 - \left(\dfrac{v}{2\alpha}\right)^2$ に直交する．

したがって，$\alpha^2 + \beta^2 =\neq 0$ である限り，直線 $x = \alpha$ の像と直線 $y = \beta$ の像とは互いに直交する．

[**注意**] $\underline{\alpha = 0, \beta = 0 \text{ のとき}}$ このときには $x = \alpha = 0$ の像は半直線 $v = 0\,(u < 0)$ であり，$y = \beta = 0$ の像は半直線 $v = 0\,(u > 0)$ である．これらは原点で交わっていると考えればそれらの交角は π であると考えるのが自然であろう．

11. $u = x^2 - y^2 > 0$ は $(x - y)(x + y) > 0$ と同値で，一方，$v = 2xy$ には制限がない．したがって，求める集合は $|x| > y > -|x|$.

12. 対応
$$(x, y) \mapsto (u, v), \qquad u = x^2 - y^2,\ v = 2xy$$
は明らかに (平面全体での)C^1 級写像である (偏導関数 u_x, u_y, v_x, v_y がすべて存在して連続である)．右半平面 $\{(x, y) \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ の像は，前問の議論と同様にすれば，$\mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) \in \mathbb{R} \,|\, v = 0, u \leq 0\}$ であることが分かる．この写像は逆写像をもつことを示すために，任意に与えた (u, v) に対して $(x, y) \mapsto (u, v)$ となる (x, y) を実際に見つけよう．これは問題 10 で得た曲線の対応をみればほぼ完全に了解されるが，もっと計算的に調べよう： (u, v) を $u = R\cos\Theta,\ v = R\sin\Theta\,(R > 0,\ -\pi < \Theta < \pi)$ の形で与え，このとき (x, y) も $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\,(r > 0,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2)$ の形で見つかることを示す．容易に分かるように，$r = \sqrt{R},\ \theta = \Theta/2$ ととればよい．したがって，$\{(x, y) \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ と $\mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) \in \mathbb{R} \,|\, v = 0, u \leq 0\}$ とは 1 対 1 に対応する．

さらに
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \quad 2x \quad = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \ -2y \ = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

が成り立つから，定理 1.3 によって，$\{(x,y)\in\mathbb{R}\,|\,x>0\}$ から $\mathbb{R}^2\setminus\{(u,v)\in\mathbb{R}\,|\,v=0,u\leq 0\}$ への写像 $(x,y)\mapsto(u,v)$ は等角写像である．

13. 問題 10 で調べたことを思い出そう．写像 $(x,y)\mapsto(x^2-y^2,2xy)$ による直線 $x=\alpha$ の像は放物線 $u=\alpha^2-\left(\dfrac{v}{2\alpha}\right)^2$ であった．特に $\alpha=1/2$ の像は放物線 $u=\dfrac{1}{4}-v^2$ である．これを u 方向に $1/3$ だけ平行移動して

$$u=x^2-y^2+\frac{3}{4},\qquad v=2xy$$

としたものを考えれば，期待された形

$$(x,y)\mapsto(u,v),\qquad u=1-v^2$$

が得られる．

[**注意**]　この問題では，与えられた式の表示に用いられた座標系 (x,y) と解答例に用いられた座標系 (u,v) との間に混乱がある．しかし，実際にものを考えるときには記号や座標系は一定しているわけではないから，このような状況によく慣れていることは非常に重要なことである．

14. 円周 $x^2+y^2=R^2$ の変換

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

による像を考える．

$$\begin{aligned}u^2+v^2&=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2\\&=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{R^2}\end{aligned}$$

であるから，半径 R の円周の像は半径 $1/R$ の円周に含まれる．

原点から出る 2 本の半直線

$$y=kx,\qquad x\neq 0$$

については，

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{x}{x^2+k^2y^2} &= \frac{1}{x(1+k^2)} \\ v(x,y) &= \frac{-y}{x^2+k^2y^2} &= \frac{-k}{x(1+k^2)} \end{aligned}$$

であるから，像は半直線

$$v = -ku, \quad u \neq 0$$

に含まれる．

上で考察から除外された 2 本の半直線 $x = 0, y \neq 0$ の像は明らかに $u = 0, v \neq 0$ であるから，原点から出る半直線は原点から出る半直線 (の一部分) に写されることが分かった．

> [**注意**] この解答は問われたことには答えているが内容は不十分である．上の議論を少し詳しく見れば容易に分かるように，円周の場合も半直線の場合にも像はそれぞれある円周またはある半直線の全体である．

[**関連問題**]
この注意に述べられたことを確認せよ．

[**関連問題**]
円周を

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t \qquad (0 \leq t < 2\pi)$$

と径数表示したとき，像曲線の径数表示を与え，写像のより具体的な対応を調べよ．また，直前の関連問題の別証明を与えよ．

15. 前問の写像に逆写像があることは，注意に述べられたことあるいはその後の関連問題の答えから容易に分かる．しかし明示できればなおよいであろう．前問で示したように

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$$

であったから，

$$\begin{aligned} x &= u(x^2+y^2) &= \frac{u}{u^2+v^2} \\ y &= -v(x^2+y^2) &= \frac{-v}{u^2+v^2}. \end{aligned}$$

すなわち，問題の写像の逆写像は元の写像と同一の形をしている (言い換えれば 2 階続ければ恒等写像).

16. 前問までに調べたことから，

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v(x,y) = -dfracyx^2+y^2$$

は，$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>0\}$ から $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2>0\}$ の上への 1 対 1 の C^1 級同相写像であるが，さらに

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} &&= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2y\cdot x}{(x^2+y^2)^2} &&= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-2x\cdot(-y)}{(x^2+y^2)^2} &&= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{(-1)\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot(-y)}{(x^2+y^2)^2} &&= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

であるから，定理 1.3 によって，与えられた写像の等角性を知る.

[**関連問題**]
対応

$$u(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2}$$

について，上と同様のことを調べよ．すなわち，定義域・像領域・同相性・微分可能性・等角性などについて検証せよ.

17. ここで与えられた写像が 1 対 1 写像であることは，これまでと同様に，逆写像を作ってみせることによって分かる．C^1 級の同相写像であることも実際に偏微分してみれば分かる．等角性を示すために，球面 Σ の，互いに交わる 2 つの曲線 γ_k $(k=1,2)$

$$\gamma_k:\ \xi = \xi_k(t),\ \eta = \eta_k(t),\ \zeta = \zeta_k(t) \quad (-1<t<1)$$

を考える．これらの曲線は径数の値が 0 のとき交わっているとしてよい： $\xi_1(0)=\xi_2(0)$, $\eta_1(0)=\eta_2(0)$, $\zeta_1(0)=\zeta_2(0)$. これら 2 曲線は球面の上の座標 θ, φ を用いても表せることに注意しよう：

$$\gamma_k:\ \theta = \theta_k(t),\ \varphi = \varphi_k(t) \quad (-1<t<1).$$

これら 2 曲線が交点でなす角の余弦は，教科書 14 ページでも見たように，

$$\frac{\xi_1'(0)\xi_2'(0)+\eta_1'(0)\eta_2'(0)+\zeta_1'(0)\zeta_2'(0)}{\sqrt{\xi_1'(0)^2+\eta_1'(0)^2+\zeta_1'(0)^2}\sqrt{\xi_2'(0)^2+\eta_2'(0)^2+\zeta_2'(0)^2}}$$

である．これを座標 θ,φ を用いて表現するために，

$$\varphi^* := \varphi_1(0) = \varphi_2(0), \qquad \theta^* := \theta_1(0) = \theta_2(0)$$

とおいて，さらに $k=1,2$ について

$$\begin{aligned}
\xi_k'(0) &= -\sin\varphi^*\cos\theta^*\varphi_k'(0) - \cos\varphi^*\sin\theta^*\theta_k'(0)\\
\eta_k'(0) &= -\sin\varphi^*\sin\theta^*\varphi_k'(0) + \cos\varphi^*\cos\theta^*\theta_k'(0)\\
\zeta_k'(0) &= \cos\varphi^*\varphi_k'(0)
\end{aligned}$$

であることに注意すると，求める余弦の値は

$$\frac{\varphi_1'(0)\varphi_2'(0)+\cos^2\varphi^*\theta_1'(0)\theta_2'(0)}{\sqrt{\varphi_1'(0)^2+\cos^2\varphi^*\theta_1'(0)^2}\sqrt{\varphi_2'(0)^2+\cos^2\varphi^*\theta_2'(0)^2}}$$

となる．

一方，(u,v) 平面における像曲線のなす角の余弦は，やはり教科書 14 ページ (*) にあるとおり，

$$\frac{u_1'(0)u_2'(0)+v_1'(0)v_2'(0)}{\sqrt{u_1'(0)^2+v_1'(0)^2}\sqrt{u_1'(0)^2+v_1'(0)^2}}$$

である．これに

$$u_k=\theta_k, \quad v_k=\log\tan\left(\frac{\varphi_k}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

を代入すれば，先ほどと同様

$$\frac{\varphi_1'(0)\varphi_2'(0)+\cos^2\varphi^*\theta_1'(0)\theta_2'(0)}{\sqrt{\varphi_1'(0)^2+\cos^2\varphi^*\theta_1'(0)^2}\sqrt{\varphi_2'(0)^2+\cos^2\varphi^*\theta_2'(0)^2}}$$

を得る．したがってこの写像は等角的である．

[**注意**] この対応はいわゆる Mercator の地図の作り方を与えている．拙著「メルカトールの地図と等角写像」(数学セミナー，1982 年 9 月号) 参照 (コピーの必要な方はご連絡ください．)

[**関連問題**]
上に述べたメルカトール射影と教科書 1．4 節で述べた立体射影との関係を明らかにし，等角性がどのように伝播してゆくかを調べよ (「関数論講義」参照).

[**関連問題**]
上で行った議論では，北極や南極は考察から除外されている．いかにそこに住む人がいないかあっても僅かだからといって，考えないで済ませるわけにはゆかない．この部分について考察せよ．

18. (x, y) が右半平面
$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$
を動くとき，u はすべての実数をとることができ，v は開区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ 内ののすべての値をとることができる．しかもこれらは互いに無関係に定まる．したがって像集合は帯状の
$$S := \left\{(u, v) \mid -\infty < u < +\infty, -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}\right\}$$
であろう．

19. 任意の点 (u, v) に対して，(x, y) は 2 つの曲線 (円と直線)
$$x^2 + y^2 = e^{2u}, \qquad y = (\tan v) \cdot x$$
の第 1 あるいは第 4 象限内にある交点として一意的に定まる．具体的に書けば
$$x = \frac{e^u}{\sqrt{\tan^2 v + 1}}, \qquad y = \frac{e^u \tan v}{\sqrt{\tan^2 v + 1}}.$$

[**関連問題**]
曲座標系を活用すれば上の写像の様子がより鮮明に見えるであろう．

20. 与えられた写像が 1 対 1 同相写像であることは前問までに概ね示した．連続性の検証が残っているが，もとの写像もその逆写像も C^1 級である

ことの検証と併せて，直接に偏微分を実行してみれば分かる．さらに，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right) = \frac{x}{x^2+y^2}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right) = \frac{y}{x^2+y^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, = \frac{-y}{x^2+y^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, = \frac{x}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

であるから，定理 1.3 によって与えられた写像は等角的である．

21. 添え字の列 $(n_k)_{k=1,2,\ldots}$ が指定されているときには脚注 8) とそっくり同じ表現が可能である．

ある部分列が a_* に収束する，というだけなら

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad |a_m - a_*| < \varepsilon.$$

ただし，このとき添え字の列 $(n_k)_{k=1,2,\ldots}$ が取り出されているわけではない．$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ であるような添え字の集合を取り出すためには少しばかり工夫が必要である．たとえば $\varepsilon = 1/k$ として対応する $m = n_k$ を選ぶが，その際に上の条件のほかに $n_k > n_{k-1}$ が成り立つようにする．

[**関連問題**]
数列

$$a_n := \frac{n^2+1}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

からは，どんな部分列を選んでも有限な値に収束させることはできないことを示せ．

[補遺・正誤表] pp. i - vi & 1-21

1. ii ページの最下行,「校正の遅延などで」削除.
2. 5 ページの下から 2 行目, $\widehat{\mathbb{R}}$ を $\hat{\mathbb{R}}$ に取り替える.