理工系 複素関数論– 多変数の微積分から複素解析へ —
章末問題 III の解答ならびに正誤表

[はじめに]

ここには教科書にある問題の比較的詳しい解答のほかに，幾つかの注意や関連問題が含まれています．関連問題は，難易度・精粗まちまちですが，教科書や問題の内容をよりよく理解するのに非常に役立つ筈です．また，この章の内容に関する正誤表が末尾にあります．不手際をお詫びし，ご訂正くださるようお願いします．

解答はもちろん正確を期したものではありますが，それでもまだまだミスプリントや計算間違いがあるかもしれません．発見なさったら，お手数ですが是非とも著者にご一報くださるようお願いします．連絡先は shiba@amath.hiroshima-u.ac.jp です．どうかよろしくお願いします．

1. 定理??の逆は成り立たないことを (例をもって) 示せ．

2. 任意の $t\,(0 \leq t \leq 1)$ に対して $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 2^2 + (8t-4)^2 \neq 0$ であるから，この曲線は正則曲線である．$t = \dfrac{x+1}{2}$ であるから，
$$y = 4\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 4\frac{x+1}{2} = x^2 - 1.$$
すなわち与えられた曲線は放物線の一部分 $(-1 \leq x \leq 1)$ である．曲線としての向きは $x = -1, y = 0$ から $x = 1, y = 0$ へといたるもの．

3. 任意の $t\,(-1 \leq t \leq 1,\ t \neq 0)$ に対して $x'(t)^2 + y'(t)^2 = (2t)^2 + (3t^2)^2 = t^2(4 + 9t^2) \neq 0$ であるから，この曲線は $t = 0$ 以外では正則である．曲線の概形を図示すれば図のようであり，$t = 0$ に対応する原点では曲線の接線は退化してしまう (接ベクトルの長さがどんどん短くなって原点では消えてしまっている．また単位接ベクトルは原点で 180 度回転する．)

4. このままでは $t = -1$ に対応する点がない！したがって，2 つの区間 $(-\infty, -1)$ および $(-1, \infty)$ に分けて考えざるを得ない．議論を明確にするために，前者を C_1，後者を C_2 と名づけよう．

   さらに，$t = 1/s$ とおくと $x(t) = y(s), y(t) = x(s)$ が得られるから，C_2 のうちのさらに一部分
$$C_2' : \begin{cases} x(t) & = & \dfrac{3t}{t^3+1} \\ 2ex]y(t) & = & \dfrac{3t^2}{t^3+1} \end{cases} \qquad -1 < t < 1$$

を考察すれば十分であることが分かる．実際，C_2 の残りの部分 (径数区間 $[1,\infty)$)C_2'' も，また C_1 も，$x=y$ に関して C_2'(のそれぞれ異なる一部分に) 対称である．

曲線 C_2' を詳しく調べる．容易に分かるように，

$$x'(t)=\frac{3(1-2t^3}{(t^3+1)^2},\qquad y'(t)=\frac{3t(2-t^3}{(t^3+1)^2}$$

であるから，曲線 C_2' は正則である．さらに，$-1<t<\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ では $x(t)$ は単調に増加し，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}<t<1$ では $x(t)$ は単調に減少する．また，$-1<t<0$ では $y(t)$ は単調に減少し，$0<t<1$ では $y(t)$ は単調に増加する．一方，

$$x(t)+y(t)+1=\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}>0,\quad -1<t<1$$

であるから，曲線 C_2' は直線 $x+y+1=0$ の原点側にある．さらに，$t\to -1$ とき $x(t)+y(t)+1\to 0$ であることから，直線 $x+y+1=0$ は C_2' の漸近線になっている．

以上のことから，部分曲線 C_2' は図のようであることが分かった．先に考察したように部分曲線 C_2'' と (本来は別の) 曲線 C_1 とが得られる．

これで与えられた曲線の全貌が分かった．(陰関数の形でかけば

$$x^3+y^3=3xy$$

となっていることが容易に確かめられる．)

5. 与えられた曲線においては，

$$x'(t)=-3\cos^2 t\sin t,\qquad y'(t)=3\sin^2 t\cos t$$

であるから，

$$\begin{aligned}\lambda:&=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\\&=\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\\&=3|\sin t\cos t|.\end{aligned}$$

したがって点 $(x(t), y(t))$ での単位接ベクトルは

$$\left(\frac{-3\cos^2 t\sin t}{\lambda},\ \frac{3\sin^2 t\cos t}{\lambda}\right) = (-\mathrm{sgn}(\sin t)\cdot|\cos t|,\ \mathrm{sgn}(\cos t)\cdot|\sin t|)$$

である．ここで記号 $\mathrm{sgn}(A)$ は数 A の符号を表す．

曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt &= 3\int_0^{2\pi}|\cos t\sin t|\,dt\\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t\sin t|\,dt\\ &= 12\left[-\frac{1}{2}\cos^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6\end{aligned}$$

であることが分かる．

[**関連問題**]
上の曲線の概形に単位接ベクトルの変化の様子を描き添えよ．

6. 双曲線関数の定義によって

$$x(t) = a\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \quad y(t) = b\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

であるから，

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

であり，したがってこの曲線は双曲線を表している．径数の範囲に注意すれば，双曲線の 2 つの枝のうち右側 $(x>0)$ の上半分で，点 $(1,0)$ から出発して右上無限の彼方に向かって進むことも容易に見て取れる．

7. $z = x+iy$ とおくとき，グリーンの公式によって

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\int_{\partial G}\bar{z}\,dz &= \frac{1}{2i}\int_{\partial G}(x-iy)\,d(x+iy)\\ &= \frac{1}{2i}\int_{\partial G}(x\,dx+y\,dy) + \frac{1}{2}\int_{\partial G}-y\,dx+x\,dy\\ &= \frac{1}{2}\iint_G dx\,dy\end{aligned}$$

だから，与えられた積分は確かに G の面積を表す.

8. 前問で得られた事実を用いれば，求めるべき面積は

$$\frac{1}{2i}\int_{\partial G}\bar{z}\,dz = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}(a\cos t - ib\sin t)\,d(a\cos t + ib\sin t)$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

9. 前問と同様にすれば (あるいは直接にグリーンの公式から)，求めるべき面積が

$$\int_0^{2\pi} -y\,dx + x\,dy = 3\int_0^{2\pi}(\cos^2 t\sin^4 t + \cos^4 t\sin^2 t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi}(\cos^2 t\sin^2 t)\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(\sin 2t)^2\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{3\pi}{2}.$$

10. 楕円 (の周) は径数表示として

$$z = a\cos t + ib\sin t, \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

を持っている．したがって，

$$\int_\gamma dz/z = \int_0^{2\pi}\frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t}\,dt$$

$$= (b^2 - a^2)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$$

$$+ iab\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$$

と変形できるが，実部は

$$\log\left(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t\right)$$

を原始関数に持つので積分の値は 0 である．また，虚部は，たとえば

$$ab\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$$

x

$$= 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2 + b^2\tan^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t}$$

と変形して

$$\tau = \tan t$$

と変換すれば，求める値が

$$2ab\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{a^2 + b^2\tau^2} = 2\left[\arctan\frac{b}{a}\tau\right]_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi$$

であることを知る．

11. 反時計回りに向きづけられた円周 $\mathrm{K}(a, R)$ を

$$z(t) = a + Re^{it}, \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

と径数表示すれば，計算を要求された積分は

$$\int_{\mathrm{K}(a,R)} |z|^2\,dz = \int_{\mathrm{K}(a,R)} z\bar{z}\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}(a + Re^{it})(a + Re^{-it})(iRe^{it})\,dt$$

$$= iR\int_0^{2\pi}(aRe^{2it} + (a^2 + R^2)e^{it} + aR)\,dt$$

$$= iaR^2\int_0^{2\pi}dt = 2\pi aR^2 i.$$

12. 任意の 2 点 α, β について

$$\int_{\alpha}^{\beta} z^n \, dz = \frac{1}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$$

から明らか.

13. 結果のみを記す：

$$\int_{\mathrm{K}} z \, dz = 0, \qquad \int_{\mathrm{K}} \bar{z} \, dz = 2\pi i, \qquad \int_{\mathrm{K}} |z| \, dz = 0, \qquad \int_{\mathrm{K}} z \, d\bar{z} = -2\pi i.$$

14. 結果のみを記す：

$$\int_{\mathrm{K}} z \, |dz| = 0, \qquad \int_{\mathrm{K}} \bar{z} \, |dz| = 0, \qquad \int_{\mathrm{K}} |z| \; |dz| = 2\pi, \quad \int_{\mathrm{K}} (\mathrm{Re}\, z) \, |dz| = 0.$$

15. 結果のみを記す：

$$\int_{\mathrm{K}} \mathrm{Re}\, z \, dz = \pi i, \quad \int_{\mathrm{K}} (\mathrm{Re}\, z)^2 \, dz = 0, \quad \int_{\mathrm{K}} (\mathrm{Re}\, z)^3 \, dz = \frac{3\pi i}{8}, \quad \mathrm{Re} \int_{\mathrm{K}} z \, dz = 0.$$

16. まず，関数 f が意味をもつこと (定義がうまくなされること) に注意しよう．z を 1 つとめるごとに被積分関数は t の連続関数であるから，積分が可能である．その後で z を動かせば何が起こるか？それを見るためにしばらく z はとめたままにしておく．

$$\mathrm{Im}\, f(z) = \frac{1}{2i}\left(\int_{\mathrm{S}[-1,1]} \frac{dt}{t-z} - \int_{\mathrm{S}[-1,1]} \frac{dt}{t-\bar{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-1} 1 \frac{z-\bar{z}}{|t-z|^2} \, dt = \int_{-1} 1 \frac{\mathrm{Im}\, z}{|t-z|^2} \, dt$$

であるが，たとえば z が上半円周上にあるとき，$\theta := \arg z$ $(0 < \theta < \pi)$ とおくと第 2 余弦定理によって

$$|t-z|^2 = 1 + t^2 - 2t\cos\theta$$

であり，一方で Im $= \sin\theta$ であるから，上の積分は

$$\int_{-1} 1\frac{\sin\theta}{1+t^2-2t\cos\theta}\,dt = \int_{-1} 1\frac{\sin\theta}{(t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,dt$$
$$= \left[\arctan\frac{t-\cos\theta}{\sin\theta}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \arctan\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} - \arctan\frac{-1-\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \arctan\tan\frac{\theta}{2} + \arctan\cot\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

と計算される (ここで $\sin\theta \neq 0$ ならびに半角公式が用いられた)．すなわち上半円周上では

$$\mathrm{Im}\, f = \frac{\pi}{2}.$$

まったく同様に計算して下半円周上では $\theta := \arg z$ $(-\pi < \theta < 0)$ とおくと

$$\mathrm{Im}\, f = -\frac{\pi}{2}$$

であることを知る．

懸案の問題の解決：点 z が動いても，それが上半円周あるいは下半円周に留まる限り，問題はない．しかし直径 S$[-1,1]$ の両端点である $z = \pm 1$ を超えようとすれば，$\sin\theta = 0$ となって明らかに問題が起こる (それは逆正接関数の主値の問題に他ならない)．したがって f の定義域は，例えばこの問題の解決に当たって最も安直に済ませようとするならば，上半平面または下半平面に限ってそれぞれ別々に考えることにするのがよい．たとえこのようにしても，$\theta := \arg z$ の範囲を取り直せば定数の値は変る！

[**関連問題**]
この定義域をもっと拡げることは可能か？上の解答例の最後にある「たとえこのようにしても，$\theta := \arg z$ の範囲を取り直せば定数の値は変る！」を詳しく吟味することによってできるだけ自然な定義を与えよ．

17. 極限値であることを示す典型的な方法は，今の場合に即していえば，

$$\int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{it})dt - 2\pi f(0)$$

が $\varepsilon \to 0$ とすることによっていくらでも小さくできることを示すことである．より正確に，またより示しやすい形で書けば，任意に与えられた正の数 η に対して，正数 ε_0 を十分小さくとれば，$\varepsilon < \varepsilon_0$ であるとき

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{it})dt - f(0)\right| < \eta$$

が成り立つことを示せばよい．

積分の評価に関する基本的な性質によって

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{it})dt - f(0)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{it})dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0)dt\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left\{f(\varepsilon e^{it}) - f(0)\right\}dt\right| \\ &\le \max_{0\le t\le 2\pi}\left|f(\varepsilon e^{it}) - f(0)\right|\end{aligned}$$

であるが，うまく選んだ正数 ε_0 に対しては，この最終項は $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ である ε についてはηよりも小さい．実際，このことは関数 f の連続性によって $0 < |z-0| < \varepsilon_0$ である限り $|f(z) - f(0)| < \eta$ とできることからただちに分かる．

18. 半円周部分の積分は曲線が指数関数を用いて表されることに注意すれば，

$$\int_\Gamma \frac{z}{\bar{z}}dz = \int_{\mathrm{S}[-2,-1]} - \int_{C^+} + \int_{\mathrm{S}[1,2]} - \int_{C^-(0,2)} \frac{z}{\bar{z}}dz$$

$$= \int_{-2}^{-1} dt + \int_1^2 dt + i\int_0^{\pi} e^{3it}dt + 2i\int_{-\pi}^{0} e^{3it}dt = 2 + \frac{1}{3}[e^{3it}]_0^{\pi} + \frac{2}{3}[e^{3it}]_{-\pi}^{0} = 2 + \frac{1}{3}\times(-$$

19. 線分 $\mathrm{S}[0, 2+4i]$ は径数表示

$$\mathrm{S}[0, 2+4i] : x(t) = 2t,\ y(t) = 4t \qquad 0 \le t \le 1$$

をもつから，

$$\int_{\mathrm{S}[0,2+4i]} \mathrm{Im}\, z^2\, dz = 2\int_0^1 x(t)y(t)x'(t)dt + 2i\int_0^1 x(t)y(t)y'(t)dt$$

$$= 32\int_0^1 t^2 dt + 64i\int_0^1 t^2 dt$$

$$= \frac{32}{3}[t^3]_0^1 + \frac{64i}{3}[t^3]_0^1 = \frac{32+64i}{3}$$

線分 $\mathrm{S}[0, 2+4i]$ は径数表示

$$\mathrm{S}[0, 2+4i] : x(t) = 2t,\ y(t) = 4t \qquad 0 \le t \le 1$$

をもつから，

$$\int_{\mathrm{S}[0,2+4i]} \mathrm{Im}\, z^2\, dz = 2\int_0^1 x(t)y(t)x'(t)dt + 2i\int_0^1 x(t)y(t)y'(t)dt$$

$$= 32\int_0^1 t^2 dt + 64i\int_0^1 t^2 dt$$

$$= \frac{32}{3}[t^3]_0^1 + \frac{64i}{3}[t^3]_0^1 = \frac{32+64i}{3}$$

まず，線分 $\mathrm{S}[0, 2]$ は径数表示

$$\mathrm{S}[0, 2] : x(t) = 2t,\ y(t) = 0 \qquad 0 \le t \le 1$$

をもつから，

$$\int_{\mathrm{S}[0,2]} \mathrm{Im}\, z^2\, dz = 2\int_0^1 x(t)y(t)x'(t)dt + 2i\int_0^1 x(t)y(t)y'(t)dt = 0.$$

他方で，次に線分 $\mathrm{S}[2, 2+4i]$ は径数表示

$$\mathrm{S}[2, 2+4i] : x(t) = 2,\ y(t) = 4t \qquad 0 \le t \le 1$$

をもつから，

$$\int_{S[2,2+4i]} \operatorname{Im} z^2\, dz = 2\int_0^1 x(t)y(t)x'(t)dt + 2i\int_0^1 x(t)y(t)y'(t)dt$$

$$= 64i\int_0^1 tdt = \frac{32i}{3}[t^2]_0^1 = 32i.$$

したがって

$$\int_{S[0,2]+S[2,2+4i]} \operatorname{Im} z^2\, dz = 32i.$$

[**関連問題**]
上の 2 つの積分の値が異なることの理由を明らかにせよ．

20. 放物線の径数表示 $\Gamma : x = t,\ y = t^2\ \ (0 \le t \le 2)$ を用いれば，計算すべき線積分は

$$\int_{S[0,2+4i]} \operatorname{Im} z^2\, dz = 2\int_0^1 x(t)y(t)x'(t)dt + 2i\int_0^1 x(t)y(t)y'(t)dt$$

$$= 2\int_0^1 t^3 dt + 4i\int_0^1 t^4 dt$$

$$= \frac{1}{2}[t^4]_0^1 + \frac{4i}{5}[t^5]_0^1 = \frac{5+8i}{10}$$

[**関連問題**]
上の 2 問に登場した 3 つの積分の値の間には何の関係もないか，あるいは何らかの関係を見出すことができるか．