理工系 複素関数論– 多変数の微積分から複素解析へ —

章末問題 IV の解答ならびに補遺・正誤表

[**はじめに**]

ここには教科書にある問題の比較的詳しい解答のほかに，幾つかの注意や関連問題が含まれています．関連問題は，難易度・精粗まちまちですが，教科書や問題の内容をよりよく理解するのに非常に役立つ筈です．また，この章の内容に関する補遺と正誤表が末尾にあります．不手際をお詫びし，ご訂正くださるようお願いします．]

解答はもちろん正確を期したものではありますが，それでもまだまだミスプリントや計算間違いがあるかもしれません．発見なさったら，お手数ですが是非とも著者にご一報くださるようお願いします．連絡先は shiba@amath.hiroshima-u.ac.jp です．どうかよろしくお願いします．

[章末問題解答と補充]

1. 任意の複素数 z_0 と任意に与えられた正数 ε に対して，$\delta := \varepsilon$ をとれば，$|z_0 - z| < \delta$ を満たす任意の複素数 z について

$$|f_1(z_0) - f_1(z)| = |\bar{z}_0 - \bar{z}| = |z_0 - z| < \delta = \varepsilon$$

が成り立つ．すなわち，関数 f_1 は平面上の任意の点で連続である．

与えられた関数は $z \neq 0$ で定義されている．任意の複素数 $z_0 \neq 0$ と任意に与えられた正数 ε に対して，

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}|z_0|$$

を満たす数 δ がとれる．このとき，複素数 z が不等式 $|z_0 - z| < \delta$ を満たすならば，

$$\begin{aligned}|z| &\geq |z_0| - |z_0 - z| > |z_0| - \delta \\ &> |z_0| - \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}|z_0| = \frac{2}{2+\varepsilon}|z_0| > 0\end{aligned}$$

が成り立つ (3 角不等式) から，z もまた 0 ではない．したがって，このような複素数 z については

$$|f_2(z_0) - f_2(z)| = \left|\frac{\bar{z}_0(z - z_0) - z_0(\bar{z} - \bar{z}_0)}{z_0 z}\right| \leq \frac{2|z - z_0|}{|z|}$$

$$\leq 2\delta\,\frac{2+\varepsilon}{2|z_0|} < \varepsilon$$

が成り立つ．すなわち，関数 f_2 は平面上の任意の点 $z_0 \neq 0$ で連続である．

一方で $z \neq 0$ について，$z = re^{it}\,(r, t \in \mathbb{R},\, r > 0,\, 0 \leq t < 2\pi)$ と書くとき，

$$\frac{\bar{z}}{z} = e^{-2it}$$

であるから，$\lim_{|z|\to 0} f_2(z)$ は存在せず，関数 f_2 は $z = 0$ に連続に拡張することができない．

2. 与えられた関数は $z \neq 0$ で定義されている．さらに $z \neq 0$ のときは，関数 f_3 は連続関数の商として連続である．

   また，$z = re^{it}\,(r, t \in \mathbb{R},\, r > 0,\, 0 \leq t < 2\pi)$ と書くとき，

$$\lim_{z\to 0} f_3(z) = \lim_{|z|\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z} = \lim_{r\to 0} re^{-3it} = 0$$

   であるから，$f_3(0) = 0$ とおくことによって関数 f_3 は $z = 0$ で連続な関数になる．

   点 $x = \xi,\, y = \eta$ における連続性について調べる．まず，指数関数および正弦関数の (それぞれ原点における) 連続性によって，任意に与えられた正数 ε に対してある正数 δ が存在して，$|x - \xi| < \delta,\, |y - \eta| < \delta$ ならば

$$|e^x - e^\xi| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \qquad \left|\sin\frac{y-\eta}{2}\right| < \frac{\varepsilon e^\xi}{2\sqrt{2}e^\varepsilon}$$

   が成り立つ．

   2 点 $(\xi,\, \eta),\, (x,\, y)$ の距離 $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ が正数 δ よりも小さければ，$|x - \xi| < \delta,\, |y - \eta| < \delta$ であるから，上に得た 2 つの不等式が成り立ち，したがって

$$\begin{aligned} & \sqrt{(e^x\cos y - e^\xi\cos\eta)^2 + (e^x\sin y - e^\xi\sin\eta)^2} \\ = \;& e^\xi\sqrt{(1 - e^{x-\xi})^2 + 4e^{x-\xi}\sin^2\frac{y-\eta}{2}} \\ \leq \;& e^\xi\sqrt{\left(\frac{\varepsilon e^{-\xi}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4e^{x-\xi}\left(\frac{\varepsilon e^{-\xi}}{2\sqrt{2}e^\varepsilon}\right)^2} \end{aligned}$$

   が成り立つが，ここでさらに δ が ε よりも小さくとられていたとすれば，最後の式は $\leq \varepsilon$ となる．したがって，与えられた写像は平面 $\mathbb{R}^2$ から平面 $\mathbb{R}^2$ への連続写像である．

また，

$$\sqrt{\{e^x\cos y\}^2+\{e^x\sin y\}^2}=e^x$$

は $x\to\infty$ ときいくらでも大きくなるから，与えられた写像は非有界である．

[注意]　問題に「関数」とあるのは (間違いではないが) 余り適切ではない；「写像」と呼ぶ方がより正確である．

3. 簡単な計算から

$$1-|f(z)|^2=1-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}$$

が分かる．したがって

$$|z|<1\Leftrightarrow|f(z)|<1,$$

特に f は単位円板 $\mathbb{D}$ からそれ自身の <u>中への</u> 写像である．

写像 f は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ の中への <u>1 対 1</u> 写像である：　実際，$z_1,z_2\in\mathbb{D}$ に対して $f(z_1)=f(z_2)$ であったとすれば，

$$(1-|a|^2)(z_1-z_2)=0$$

すなわち $z_1=z_2$ が得られる．

写像 f は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ の <u>上への</u> 写像である：　実際，任意の $w\in\mathbb{D}$ に対して，

$$z:=\frac{w+a}{1+\bar{a}w}$$

は不等式 $|z|<1$ と方程式 $f(z)=w$ を満たすことが容易に確かめられる．(不等式については先ほど示した不等式から分かる．)

最後に，商の微分法により

$$f'(z)=\frac{(1-\bar{a}z)+\bar{a}(z-a)}{(1-\bar{a}z)^2}=\frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}\neq 0\quad(z\in\mathbb{D})$$

であるから，f は単位円板 $\mathbb{D}$ 上では等角写像である．

4. 関数 u は明らかに全平面で 2 回連続的微分可能であり,

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = 2 - 2 = 0$$

が成り立つから，関数 u は全平面で調和である．
任意に固定した点 (ξ,η) は原点と直線分で結べる．それを

$$\begin{cases} x(t) = \xi t \\ y(t) = \eta t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

と表示すれば

$$v(\xi,\eta) - v(0,0) = \int_{(0,0)}^{(\xi,\eta)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x(t),y(t))y'(t)\right) dt$$

$$= \int_0^1 (2\eta t\cdot\xi + 2\xi t\cdot\eta)\,dt = [2\xi\eta t^2]_0^1 = 2\xi\eta$$

したがって，u の共役調和関数 v は $v(x,y) = 2xy + \mathrm{const.}$.

5. 集合 $\mathbb{C}^*$ が領域であることを示すためには，それが開集合であってしかも連結であることをいえばよい．開集合であることはその補集合 $\{0\}$ が閉集合であることに注意するか，あるいは直接に，任意の点 $z(\neq 0)$ に対して実数 ε を $0 < \varepsilon < |z|$ が成り立つようにとれば $\mathbb{D}(z,\varepsilon) \subset \mathbb{C}^*$ であることをみればよい．連結性を示すために，たとえば点 $z^* = 1$ と $-z^*$ とを考える．容易に分かるように，点 z^* と直線分で結べる $\mathbb{C}^*$ の点の全体は $X_1 := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ であり，点 $-z^*$ と直線分で結べる $\mathbb{C}^*$ の点の全体は $X_2 := \mathbb{C} \setminus [0, -\infty)$ である．$X_1 \cup X_2 = \mathbb{C}^*$ であって，さらに 2 点 $z^*, -z^*$ は半円周によって $\mathbb{C}^*$ 内で結べる．したがって，$\mathbb{C}^*$ は弧状連結である．先ほど示したように $\mathbb{C}^*$ は開集合であるから，それは連結集合である．よって $\mathbb{C}^*$ は領域である．

関数
$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 3y - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$$
は明らかに $\mathbb{C}^*$ で 2 回連続的微分可能であり,
$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x + \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -2y + 3 - \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2 + y\frac{y^2-3x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -2 + y\frac{3x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$
が成り立つ．これより直ちに $\mathbb{C}^*$ 上での等式 $\Delta u = 0$ が得られる．

また，共役調和関数 v は，任意に固定した点 $(\xi,\eta) \in \mathbb{C}^*$ と点 $z^* = 1$ とを結ぶ適当な曲線 γ に沿う線積分を考えれば得られるが，細部に拘らなければむしろ不定積分のまま計算して
$$\begin{aligned}
v(x,y) &= \int_\gamma -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy \\
&= \int_\gamma \left(2y - 3 + \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}\right)dx + \left(2x + \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right)dy \\
&= 2\int_\gamma ydx + xdy - 3\int_\gamma dx \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy \\
&= 2xy - 3x - \frac{x}{2(x^2+y^2)} + \text{const.}
\end{aligned}$$
が分かる．

実際，関数
$$v(x,y) = 2xy - 3x - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+y^2} + \text{const.}$$

は，$\mathbb{C}^*$ で調和であって，関係式

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

を満たすことが直接的に確かめられる．

[**関連問題**]
上の確認を行え．

[**注意**]　最後の段階では，その形から

$$\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy = d\left(\frac{A(x,y)}{x^2+y^2}\right)$$

と予想して，

$$\begin{cases} (x^2+y^2)A_x - 2xA &= x^2-y^2 \\ (x^2+y^2)A_y - 2yA &= 2xy \end{cases}$$

から $A(x,y) = -x$ を得る．

[**関連問題**]
これを行え．

[**関連問題**]
直交座標 (x,y) の代わりに極座標 (r,θ) で考え，$(1,0)$ から任意の点 (R,Θ) までの積分路 γ として 2 つの曲線

$$\gamma_1 : \begin{cases} r(t) &= (1-t)+tR \\ \theta(t) &= 0 \end{cases} \qquad (0 \le t \le 1)$$

および

$$\gamma_2 : \begin{cases} r(t) &= R \\ \theta(t) &= t\Theta \end{cases} \qquad (0 \le t \le 1)$$

の和 $\gamma_1 + \gamma_2$ を考えて，積分を計算することもできる．

[**関連問題**]
X_1, X_2 の各々では，任意の点がそれぞれ点 $z^* = 1$ あるいは $-z^* = -1$ と直線分で結べるから，前問のように X_1, X_2 での共役調和関数 v_1, v_2 が得られる．こうして得られた関数 v_1, v_2 の $(X_1 \cap X_2$ での$)$ 関係を調べよ．

与えられた関数 u を実部とする $\mathbb{C}^*$ 上の正則関数は，上の結果から，$z = x + iy$ とおいてさらに c を実定数として

$$\begin{aligned}
f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\
&= \left(x^2 - y^2 + 3y - \frac{y}{2(x^2+y^2)}\right) \\
&\qquad + i\left(2xy - 3x - \frac{x}{2(x^2+y^2)}\right) + ic \\
&= z^2 - 3iz - i\frac{\bar{z}}{2|z|^2} \\
&= z^2 - 3iz - \frac{1}{2z}.
\end{aligned}$$

6. 極座標 (r, θ) への変換公式が $r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \arctan \dfrac{y}{x}$ で与えられることといわゆる鎖の法則 (合成関数の微分法) とから，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2z}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\
\frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2\bar{z}}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}\right).
\end{aligned}$$

[注意] この表示は複素座標 z を含んでいる点ではいささか不自然であるが，ヴィルティンガー微分作用素の結果を簡明に表示する目的には適っている；例えば問題 8 の解答例における考察を見よ．(実際には，極座標だけでの表示は上の議論の最初の部分で済んでいる．)

[**関連問題**]
上に得た 2 つの等式は互いに複素共役になっている．これは偶然か？

[**関連問題**]
関係式

$$r^2 = z\bar{z}, \qquad \theta = \frac{1}{2i}(\log z - \log \bar{z})$$

と，形式的な合成微分公式の適用

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}}$$

によって，同様の関係式を示せ．

7. ここでは例題４．４の結果を利用して考える．

$$\begin{aligned}\Delta &= 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{2\bar{z}}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right\}\\
&= 4\frac{1}{2\bar{z}}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left\{\frac{1}{2\bar{z}}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{|z|^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+ir\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}-i\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right\}\\
&= \frac{1}{r^2}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right\}\end{aligned}$$

[**関連問題**]
上の最終項は

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

と書くこともできる．これを示せ．

[**関連問題**]
例題４．４を用いることなくラプラシアンの定義に直接従っておなじ結果を示せ．

8. 前問から，任意の C^2 級関数 u について

$$\Delta u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r\frac{\partial u}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

であるが，関数 u が変数 θ を含まなければ，上の条件は

$$\frac{\partial u}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0$$

と書ける．この微分方程式を解くと，適当な実定数 a, b によって u が

$$u(r) = a \log r + b$$

と書けることが分かる．

関数 u を一旦直交座標 (x, y) を用いて

$$u(x, y) = \frac{a}{2} \log(x^2 + y^2) + b$$

と表し，さらに積分路を半径方向と偏角方向に分解して考えれば，

$$v(x, y) = \int -\frac{ay}{x^2 + y^2}dx + \frac{ax}{x^2 + y^2}dy = a \arctan \frac{y}{x} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

したがって，u の共役調和関数は $a\theta + c\,(c \in \mathbb{R})$ である．

[**関連問題**]
上の積分を遂行せよ．

[注意] 上に得た共役調和関数は $\mathbb{C}^*$ 全体では多価である．

[**関連問題**]
後に現れる極座標を用いたコーシー・リーマン方程式を使えば，もっと簡明な計算が可能であろう．

9. まず，$z \neq 1$ では $1 - 2r\cos\theta + r^2 \neq 0$ であることに注意しよう．関数

$$u(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

について，そのラプラシアンを計算するために，

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

に登場するすべての項を個別に計算する：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{-4r + 2(1 + r^2)\cos\theta}{(1 - 2r\cos\theta + r^2)^3}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{4\{2\cos^2\theta - r(r^2 + 3)\cos\theta + 3r^2 - 1\}}{(1 - 2r\cos\theta + r^2)^3}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{-2r(1 - r^2)\{(1 + r^2)\cos\theta + 2r\cos^2\theta - 4r\}}{(1 - 2r\cos\theta + r^2)^3}.
\end{aligned}$$

これらを Δu の式に代入すれば，$\mathbb{D}$ で u が調和であることを知る．

[注意]　一般に

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 = (1-r)^2 + 2r(1-\cos\theta) \geq 0$$

であって，等号が成り立つのは $r = 1,\ \theta = 0 (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ のとき，かつそのときに限る．すなわち，u は $\mathbb{C} \setminus \{(1,0)\}$ で調和である．

10. 問題 6 で得たことから複素コーシー・リーマン微分方程式の極座標系による表示は

$$\frac{1}{2\bar{z}} \left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}. \right) (u + iv) = 0$$

となる．これを実部・虚部に分ければ

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

これとは別に，$f(z) = R(x,y)(\cos\Theta(x,y) + i\sin\Theta(x,y))$ と表して，関数 R, Θ についての条件を (直交座標系あるいは極座標系によって) 書き下すことも考えられる．

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & R\cos\Theta \\ v & = & R\cos\Theta \end{array} \right. \qquad \text{あるいは} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} R & = & \sqrt{u^2 + v^2} \\ \Theta & = & \arctan\dfrac{v}{u} \end{array} \right.$$

であるから，合成関数の微分法によって

$$\begin{array}{lclcl} \dfrac{\partial R}{\partial x} & = & \dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} & = & \cos\Theta\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - \sin\Theta\,\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} & = & \dfrac{\partial \Theta}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \Theta}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} & = & \dfrac{\cos\Theta}{R}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\sin\Theta}{R}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}$$

であるが，u, v についてのコーシー・リーマン関係式を用いれば

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \Theta}{\partial y}$$

が分かる．R の y に関する偏導関数についても同様にして，

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \Theta}{\partial x}.$$

R が関数 f の絶対値に他ならないことを考えれば，絶対値が一定の正則関数が定数関数に限られることは直ちに従う．

[**関連問題**]
上の関係式を複素コーシー・リーマン微分方程式から直接に導け．

[**関連問題**]
R, Θ を r, θ で微分した形のコーシー・リーマン関係式を導け．

11. 閉区間 $[a,b]$ における連続な関数は最大値および最小値をもつからそれらを

$$M := \max_{[a,b]} \varphi = \varphi(\xi'), \qquad m := \min_{[a,b]} \varphi = \varphi(\xi'')$$

とする．ここで $\xi', \xi'' \in [a,b]$ であるがその間の大小関係はもちろん分からない．$M = m$ のときには明らか (c は区間 (a,b) の任意の点として取れる) だから，以下では $m < M$ とする．

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t)\,dt \leq M$$

が成り立つから

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t)\,dt = \varphi(c)$$

を満たす c が ξ' と ξ'' の間に— したがって $a < c < b$ として — とれる．
φ の連続性を落とせないことを示す反例としては，たとえば

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{if} \quad \dfrac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

12. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおき，γ の径数表示を

$$\gamma : x = x(t), y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

とする．ここで $x(a) = x(b)$, $y(a) = y(b)$ であることに注意する．与え

られた積分は，複素微分と積分の定義から，

$$\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z)\, dz = \int_a^b [(u(x(t),y(t)) - iv(x(t),y(t))][(u_x(x(t),y(t)) + iv_x(x(t),y(t))][x'(t)+iy'(t)]dt$$

$$= \int_a^b [(uu_x+vv_x)+i(uv_x-vu_x)][x'(t)+iy'(t)]dt$$

$$= \int_a^b [(uu_x+vv_x)x'(t)-(uv_x-vu_x)y'(t)]dt + i\int_a^b [(uu_x+vv_x)y'(t)+(uv_x-vu_x)x'(t)]dt$$

と書き直せるが，ここでコーシー・リーマンの関係式を用いれば，最終辺は

$$\int_a^b [(uu_x+vv_x)x'(t)+(uu_y+vv_y)y'(t)]dt + i\int_a^b [(uv_x-vu_x)x'(t)+(uu_x+vv_x)y'(t)]dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}(u^2+v^2)dt + i\int_a^b [(uv_x-vu_x)x'(t)+(uu_x+vv_x)y'(t)]dt$$

$$= [(u^2+v^2)]_{t=a}^{t=b} + i\int_a^b [(uv_x-vu_x)x'(t)+(uu_x+vv_x)y'(t)]dt$$

$$= i\int_a^b [(uv_x-vu_x)x'(t)+(uu_x+vv_x)y'(t)]dt$$

と変形できるから，与えられた積分の値は純虚数である．

[**関連問題**]

曲線の径数による積分まで戻らなくても

$$2\,\mathrm{Re}\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)\,dz = \int_\gamma \bar{f}df + \overline{\int_\gamma \bar{f}df}$$

$$= \int_\gamma \bar{f}df + f d\bar{f} = \int_\gamma d(\bar{f}f) = 0$$

とすることができる．この議論の細部を埋めよ．

13. $w = u + iv$ と書くとき，面積は定義によって積分 $\iint_{f(\mathbb{D})} dudv$ を計算すればよいが，グリーンの公式のよって

$$\iint_{f(\mathbb{D})} dudv = \int_{\partial f(\mathbb{D})} udv = \int_{f(\partial\mathbb{D})} udv$$

と変形できる．

曲線 $f(\partial\mathbb{D})$ は $w = f(e^{it})$, $0 \le t \le 2\pi$, と表示され，またコーシー・リーマン関係式を使い $z'(t) = -\sin t + i\cos t$ に注意すれば

$$\begin{aligned} dv &= (v_x(-\sin t) + v_y\cos t)\,dt = (-v_x\sin t + u_x\cos t)\,dt \\ &= \mathrm{Im}\,[(u_x + iv_x)(-\sin t + i\cos t)]\,dt \\ &= \mathrm{Im}\,[f'(z(t))z'(t)]\,dt \end{aligned}$$

が得られ，したがって

$$
\begin{aligned}
\int_{f(\partial\mathbb{D})} udv &= \int_0^{2\pi} (\mathrm{Re}\, f)(z(t))\mathrm{Im}\, [f'(z(t))z'(t)]\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\, [(\mathrm{Re}\, f)(z(t))f'(z(t))z'(t)]\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\, \left[(\frac{f(z(t)) + \overline{f(z(t))}}{2} f'(z(t))z'(t) \right] dt \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, \int_0^{2\pi} f(z(t))f'(z(t))z'(t)\, dt \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\, \int_0^{2\pi} [\overline{f(z(t))}f'(z(t))z'(t)]\, dt \\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\, [f(z(t))^2]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, \int_0^{2\pi} [\overline{f(z(t))}f'(z(t))z'(t)]\, dt \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, \int_0^{2\pi} [\overline{f(z(t))}f'(z(t))z'(t)]\, dt \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\, \int_C \overline{f(z)}f'(z)\, dz
\end{aligned}
$$

この最後の積分は前問によって純虚数値であるので，最終的に面積が

$$
\frac{1}{2i}\int_C \overline{f(z)}f'(z)dz
$$

と書けることを得た.

[注意] 上の解答例は，一旦線積分の定義にまで戻っているので非常に迂遠である (それを承知の上で，積分の定義の復習と，さらには変数変換の公式を特別な場合について示すために，上の解答例を挙げた．)
現実的にはもっと簡明に

$$
u = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}, \qquad v = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i}
$$

であるから，要求された面積は

$$\begin{aligned}
&\int_C \frac{f(z)+\overline{f(z)}}{2}\cdot\frac{f'(z)dz-\overline{f'(z)}d\bar{z}}{2i}\\
=\ &\frac{1}{4i}\int_C f(z)f'(z)dz - f(z)\overline{f'(z)}d\bar{z} + \overline{f(z)}f'(z)dz - \overline{f(z)f'(z)}d\bar{z}
\end{aligned}$$

と変形できる．ところがここで，最初と最後の積分は閉曲線に沿うものなのでその値は0であ：

$$\int_C f(z)f'(z)dz = \frac{1}{2}\int_C d(f(z))^2 = 0, \qquad \int_C \overline{f(z)f'(z)}d\bar{z} = \frac{1}{2}\int_C d(\overline{f(z)})^2 = 0.$$

したがって，

$$\frac{1}{4i}\int_C -f(z)\overline{f(z)}d\bar{z} + \overline{f(z)}f'(z)dz = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_C \overline{f(z)}f'(z)dz$$

を得て，先ほどの結果に到達することができる．

[**関連問題**]
上の式変形の各段階を確認せよ．

[**関連問題**]
境界に関する等式 $\partial f(\mathbb{D}) = f(\partial\mathbb{D})$ は自明ではなく，証明を要することである．

[**関連問題**]
周知のごとく

$$u = \frac{w+\bar{w}}{2}, \quad v = \frac{w-\bar{w}}{2i}$$

であるから，

$$-2idudv = dwd\bar{w}$$

であるが，この関係式は幾何学的に明確な意味をもつ．それを明らかにせよ．

14. 関数 $f: z \mapsto \bar{z} = x - iy$ はいかなる点でもコーシー・微分方程式を満たさない： じっさい，$f = u + iv$ とおくと，

$$u_x = 1, \quad u_y = 0; \qquad v_x = 0, \quad v_y = -1$$

であるから，平面のどんな点でも複素微分可能ではない．したがってどんな点においても正則ではない．

[注意] 問題文にある「$\mathbb{C}$ で正則ではない」という表現は紛らわしい．そのようなことも証明の中では明確にすべきである．

15. (1) $a=1, b=-1$; $f(z)=z^2$; $f'(i)=2i$.

16. (2) $a=-6, b=-2, c=0, p=6, q=0$; $f(z)=2z^3$; $f'(i)=-6$.

17. $p=-6, q=-5, r=3, s=10$ と選べば $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)=(5+3i)z^2$ であって，$f'(5-3i)=68$.

18. 正則性の確認は容易である．像集合はそれぞれ

$$T(\mathbb{C})=\begin{cases}\mathbb{C} & \text{if} \quad a \neq 0 \\ \{b\} & \text{if} \quad a = 0\end{cases}, \qquad S(\mathbb{C}\setminus\{-d/c\})=\mathbb{C}\setminus\{a/c\}$$

である．

$\lambda := ad-bc$ が 1 ではないとき，

$$a' := a/\sqrt{\lambda},\ b' := b/\sqrt{\lambda},\ c' := c/\sqrt{\lambda},\ d' := d/\sqrt{\lambda}$$

とおいて新たに関数 $z \mapsto \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ を考えると，この関数は S に等しく，しかも要求された条件 $a'd'-b'c'=1$ を満たす．

19. T の逆関数は $a=0$ のときは無意味なので，$a \neq 0$ とすると，T^{-1} の定義域は $\mathbb{C}$ であって，$T^{-1}(w)=\frac{w-b}{a}$, $w \in \mathbb{C}$. T^{-1} もまた $\mathbb{C}$ で正則．

S^{-1} の定義域は $\mathbb{C}\setminus\{a/c\}$ であって，そこで正則．その具体的な形は：$S^{-1}(w)=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$, $w \in \mathbb{C}\setminus\{-d/c\}$.

導関数については，それぞれの定義域で

$$\frac{dT^{-1}}{dw}=\frac{1}{a}, \qquad \frac{dS^{-1}}{dw}=\frac{1}{cw-d)^2}.$$

20. 指示された関数を $z=x+iy$ を用いて $u(x,y)+iv(x,y)$ と書くとき，$|z|^2$ については $u=x^2+y^2, v=0$ だから，コーシー・リーマン関係式は $x=y=0$ のみで成り立つ．すなわちこの関数は，原点でだけ複素微分可能である．他の点では複素微分可能ではない；況や正則ではない．

関数 $z \mapsto |z|$ については，$u=\sqrt{x^2+y^2}, v=0$ だから，$x=y=0$ では偏微分可能ではない．その他の点では

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & u_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \\ v_x &= 0, & v_y &= 0 \end{aligned}$$

だから，コーシー・リーマン関係式は成り立たない．すなわちこの関数は，いたるところで複素微分可能ではない；況や正則ではない．

関数 $z \mapsto |z|^3$ については，$u = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}, v = 0$ だから，$x = y = 0$ では偏微分可能ではない．その他の点では

$$\begin{aligned} u_x &= 3x\sqrt{x^2+y^2}, & u_y &= 3y\sqrt{x^2+y^2}; \\ v_x &= 0, & v_y &= 0 \end{aligned}$$

だから，コーシー・リーマン関係式は $x = y = 0$ でだけ成り立つ．すなわちこの関数は，原点では複素微分可能であるが，その他の点では複素微分可能でも正則でもない．

[注意]$|z|^2$ についても $|z|^3$ についても，

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|^2-0}{h} = \lim_{h\to 0}\bar{h} = 0; \quad \lim_{h\to 0}\frac{|h|^3-0}{h} = \lim_{h\to 0}\bar{h}|h| = 0$$

によって，原点での微分係数は 0 である．

21. この関数の導関数は $2z$ なので，任意の $z(\neq 0)$ で等角的である．また，$z = x+iy$，$w = z^2 = u+iv$ とするとき，

$$u = x^2-y^2, \quad v = 2xy$$

c_1, c_2 を 0 ではない実定数とする．直線 $x = c_1$ の像は，y を径数として

$$u = c_1^2 - y^2, \quad v = 2c_1y$$

で与えられるが，これより y を消去して

$$u = c_1^2 - \left(\frac{v}{2c_1}\right)^2.$$

これは放物線である．

また，直線 $y = c_2$ の像は，x を径数として

$$u = x^2 - c_2^2, \quad v = 2xc_2$$

で与えられるが，これより x を消去して

$$u = \left(\frac{v}{2c_2}\right)^2 - c_2^2.$$

これもまた放物線である．

点 (c_1, c_2) でのそれぞれの放物線の接ベクトルは $(-2c_2, 2c_1), (2c_1, 2c_2)$ であり，これらの内積は 0 である．すなわち上に得た放物線は互いに直交する．

正の虚軸，負の虚軸ともに (偏角が 2 倍になって) 負の実軸に写される．したがって原点で等角性は破れる (角が 2 倍になる)．

22. (平面の) 領域 G で正則な関数 f があるとき，

   (a) 任意の $z^* \in G^*$ をとると，ある $z_0 \in G$ があって $z^* = \bar{z}_0$. G は開集合だから，ある $\varepsilon > 0$ があって $\mathbb{D}(z_0, \varepsilon) \subset G$. このとき，$\mathbb{D}(z^*, \varepsilon) \subset G^*$ である．実際，$z \in \mathbb{D}(z^*, \varepsilon)$ ならば，

$$|\bar{z} - z_0| = |\bar{z} - \bar{z}^*| = |z - z^*| < \varepsilon$$

   だから，$\bar{z} \in \mathbb{D}(z_0, \varepsilon)$ であり，仮定から $\bar{z} \in G$，すなわち $z \in G^*$. したがって，$\mathbb{D}(z^*, \varepsilon) \subset G^*$ となって G が開集合であることが分かった．
   連結性については，G^* の 2 点 z_1^*, z_2^* が G^* 内の折れ線で結べることを示せばよいが，これは 2 点 $\bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*$ が G 内の折れ線で結べることから容易に分かる．

   (b) $f^*(z)$ が領域 G^* 上の関数であることは明らかである．さらに，

$$\frac{\partial f^*(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \overline{f(\bar{z})}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}} = 0$$

   であるから f^* は正則である．

23. 正則関数 f については

$$\begin{aligned}\Delta|f(z)|^2 = \Delta\{f(z)\overline{f(z)}\} &= 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\{f(z)\overline{f(z)}\} = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} + \bar{f}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) \\ &= 4\,\frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right) = 4\,\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} + 4f\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \\ &= 4\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 = 4\end{aligned}$$

$|f'(z)|^2$

関数 $u=u(x,y), v(x,y)$ の定める写像のヤコビアンは，定義によって

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

であるが，これはコーシー・リーマン関係式によって

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2 \geq 0$$

と変形される．

24. 関数 $f \in C^2$ について，

$$\Delta\{zf(z)\} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\{zf(z)\} = 4\frac{\partial}{\partial z}\{z\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\} = 4\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + z\Delta f$$

であるから，$\Delta f = 0$ のときには

$$\Delta\{zf(z)\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

25. C^2 級の実関数 u について，前問と同様にして

$$\Delta(u^2) = 4\,\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u^2) = 4\,\frac{\partial}{\partial z}\left(2u\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right) = 8\,\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + 8\,u\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$= 8\,\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + 2\,u\Delta u$$

であるから，u，u^2 ともに調和関数であるならば，

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$$

であるが，これは

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

を意味する．すなわちこのような u は定数関数しかない．

[**関連問題**]
u が複素関数であってもよいならば，問題に述べられた条件を満たす関数は山ほどある．実際，上で得た結論は u もしくは $\bar{u}$ が (z の) 正則関数であることを意味する．これを厳密に確かめよ．

26. (1) 略．略

(2) 任意の $z \in G$ は適当な $\varepsilon > 0$ に対して $z \in G_\varepsilon$ であるが，このとき G_ε の性質から $\mathrm{S}[1,z] \subset G_\varepsilon$. $G_\varepsilon \subset G$ だから，要求されたことが示された．

(3) 各点 $z \in G$ に対して G 内の線分 $\mathrm{S}[1,z]$ に沿って積分を定めるのだから，曖昧さが生じる余地はない．

27. (1) 商の微分法を適用すれば直ちにわかる．
(2) $\{f, z\} = 0$ を解くために，前項で得た式において $g := f''/f'$ とおくと，

$$g'(z) = \frac{1}{2}\, g(z)^2$$

を解けばよいことが分かる．これを解くと

$$\frac{1}{g(z)} = -\frac{1}{2}\, z + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{C}$$

すなわち

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{z + 2c_1}.$$

もう 1 度微分方程式を解くと，ある複素定数 c_2 を用いて

$$\log f'(z) = -2\log(z + 2c_1) + c_2 \quad \text{すなわち} \quad f'(z) = \frac{c_3}{(z + 2c_1)^2}$$

を得るが，これより c_3, c_4 を複素定数として

$$f(z) = \frac{-c_3}{z + 2c_1} + c_4$$

この最後の式は $ad - bc \neq 1$ を満たす複素数 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ をうまく選べば

$$\frac{az + b}{cz + d}$$

と書ける．

28.

$$\{\varphi, \zeta\} = \frac{\varphi'''(\zeta)}{\varphi''(\zeta)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}\right)^2$$

であるが,

$$\begin{aligned}
\varphi'(\zeta) &= f'(z)g'(\zeta) \\
\varphi''(\zeta) &= f''(z){g'}^2(\zeta) + f'(z)g''(\zeta) \\
\varphi'''(\zeta) &= f'''(z){g'}^3(\zeta) + 3f''(z)g'(\zeta)g''(\zeta) + f'(z)g'''(\zeta)
\end{aligned}$$

であるから，これらを代入して

$$\{f \circ g, \zeta\} = \{f, z\}g'(\zeta)^2 + \{g, \zeta\}$$

が成り立つことが分かる.

[補遺・正誤表]

1. 70 ページ　上から 13 行目に括弧書きで「151 ページ参照」とあるのは,「162 ページ参照」の誤り.
2. 71 ページの 5 行目の式の最右辺は $\mathbf{0}$ ではなく，O.
3. 73 ページ最左辺の零 (0) はもちろん不要.
4. 75 ページの定理 4.15 は後半の主張が曖昧．厳密を期すために後半を次のようにするのがよい：　また，点 z_0 の近傍での C^1 同相写像 f について，f が点 z_0 で等角的であるならば f は z_0 において複素微分可能であり，f が点 z_0 で線分比一定であるならば f もしくは $\bar{f}$ は z_0 において複素微分可能である．(変更点は最後の 2 行にある 2 箇所の「正則性」を「複素微分可能性」に弱めたこと，またそれに伴って段落最初の「逆に」を「また」として前半との繋がりを正確にしたこと．)

   実際には「正則性」を主張して完全な「逆の命題」を証明することもできるが，それには明らかに条件が少し追加されるべきで,「点 z_0 での等角性」だけでなく「z_0 の近傍での等角性」が必要である.

   ついでに誤りの原因にまで言及しておく．容易に分かるように，前半でも実際には「点 z_0 の近傍で等角的」と結論を強めることができる (43 ページのビー玉の議論を使う)．このようにしておけば，常に近傍を考えることにして，定理 4.15 はより強い形で成り立つ．ただそれを証明するには位相的な議論が必要である．それを割愛してただ 1 点で述べようとして中途半端な形になった．多くの書物はこのあたりがかなり曖昧である (本書も残念ながらその例外ではない)．この誤りを避けた定理と, 上に言及した強い形の定理は「関数論講義」には厳密に述べられている.
5. 76 ページ例題 4.3 の見出しは，もちろん「等角性例」ではなく「等角性」.
6. 図の上 2 行目の式に $a/0 = \infty$ を追加.
7. 78 ページの上から 8 行目にある $f(\zeta)$ は $F(\zeta)$ の誤り.
8. 78 ページの下から 5 行目にある括弧書き内の「4.1 節を参照」は「4.2 節を参照」に訂正.