理工系 複素関数論– 多変数の微積分から複素解析へ —
章末問題 V の解答ならびに補遺・正誤表

[はじめに]
ここには教科書にある問題の比較的詳しい解答のほかに，幾つかの注意や関連問題が含まれています．関連問題は，難易度・精粗まちまちですが，教科書や問題の内容をよりよく理解するのに非常に役立つ筈です．また，この章の内容に関する補遺と正誤表が末尾にあります．不手際をお詫びし，ご訂正くださるようお願いします．]

解答はもちろん正確を期したものではありますが，それでもまだまだミスプリントや計算間違いがあるかもしれません．発見なさったら，お手数ですが是非とも著者にご一報くださるようお願いします．連絡先は shiba@amath.hiroshima-u.ac.jp です．どうかよろしくお願いします．

1. 演習問題 V 問題 17 の後半ですでに解決されているので略.

2. 与えられたメービウス変換を

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C},\, ad - bc = 1$$

とし，z がその不動点であったとする．まず z は有限な複素数であるとすると，不動点の定義から z は方程式

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

の解である．それがただ 1 つであるためには判別式

$$D := (d-a)^2 + 4bc = (d+a)^2 - 4(ad-bc) = (d+a)^2 - 4$$

が 0 であることが必要十分である (演習問題 II の問題 1 を参照)．すなわち，

$$S\text{ が有限な不動点を 1 つしか持たない} \Leftrightarrow (a+d)^2 = 4$$

が成り立つ．上の考察はしかし無限遠点についてはまったく触れていない．変換 S が無限遠点を不動点としないことは $S(\infty) \neq \infty$ であることを意味するが，

$$S(\infty) = \begin{cases} \dfrac{a}{c} & \text{if} \quad c \neq 0 \\ \infty & \text{if} \quad c = 0 \end{cases}$$

と約束されていたから，変換 S が無限遠点を不動点としないための条件は $c \neq 0$ である．

以上をまとめれば，変換 S がリーマン球面上に有限な不動点を 1 つだけもつための条件が

$$c \neq 0, \qquad a + d = 1$$

であることが分かった．

一方で $c = 0$ ならば係数の間の関係 $ad - bc = 1$ から $ad = 1$ であり，特に $a \neq 0,\, d \neq 0$ である．このとき与えられたメービウス変換は

$$S(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = a'z + b', \qquad a' \neq 0$$

これが有限な点を固定するためには $a' = 1$ が必要十分である．したがって，S がリーマン球面上にただ 1 つの不動点をもちしかもそれが無限遠点であるための条件は，

$$c = 0, \quad \frac{a}{d} = 1$$

であることを得た．この条件は，容易に分かるように，

$$c = 0, \qquad a = d = \pm 1$$

を意味する．このときは $a + d = \pm 2$ すなわち $(a + d)^2 = 4$ が成り立つ．

ここで上の 2 つの場合をもう一度纏めなおすと，

$$S \text{ がリーマン球面上に不動点を 1 つしか持たない} \Leftrightarrow (a + d)^2 = 4$$

となる．

[**注意**]　ここに現れた量 $a+d$ を S の**トレース** (trace) と呼ぶ (次の問題を参照)．また，この条件を満たすメービウス変換を**放物的**と呼ぶことがある．放物的という呼び名はいわゆる放物線とは無関係である；関係式 $(a+d)^2 = 4$ が「等号」に基づく条件であることに由来する．ここでは $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ と仮定しよう．このときにはここでの放物的変換に対置されるべきメービウス変換は $(a + d)^2 > 4$ あるいは $0 \leq (a + d)^2 < 4$ を満たすものであるが，これらはそれぞれ**双曲的変換**あるいは**楕円的変換**と呼ばれている．(2 次曲線の放物線・双曲線・楕円への分類は — 日本語は翻訳ではなくて曲線の形状に拠っているが — 本来は離心率を 1 と大小比較して行われたもので，ギリシャ語の「釣り合い」・「過剰」・「不足」に由来している．

[**注意**]　一般に $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ であってもトレースの 2 乗 $(a+d)^2$ が正実数であれば上の分類をそのまま用いることができる．ただしこれら 3 種には入らないものが当然現れるのでそれらを纏めて**斜航的**と呼ぶことがあるが，双曲的変換を斜航的の一部とみなす流儀もある (詳しくは「関数論講義」参照．)

[**関連問題**]
有限な不動点をもつ放物的変換が平面上の平行移動を記述していることを確かめ，無限遠点を不動点とする放物的変換について調べよ．

3. 2 次の正方行列

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1$$

から，その 4 つの元 a, b, c, d を係数とすることによって，1 つのメービウス変換

$$S(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

が得られることは明らかである．またすべてのメービウス変換がこのようにして手に入ることも問題 1 から直接的である．また，$a'd' - b'c' = a''d'' - b''c'' = 1$ を満たす 2 つの行列

$$M' := \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \qquad M'' := \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$

が同じメービウス変換を定めるのは

$$a'' = -a',\ b'' = -b',\ c'' = -c',\ d'' = -d'$$

のときかつそのときだけであることも容易に確かめられる．

さらに，容易に分かるように，2 つのメービウス変換の合成は行列の積によって与えられ，逆変換は逆行列に対応する．

[**注意**]　この集合はいわゆる $\mathbb{C}$ に係数をもつ 2 次の**特殊線形群** $SL(2, \mathbb{C})$ を

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で割ったもので，**射影的特殊線形群** と呼ばれ，記号 $PSL(2, \mathbb{C})$ を用いて表すことがある．

[関連問題]
メービウス変換の全体は写像の合成を積演算として群をなす．この群は $PSL(2,\mathbb{C})$ と同型である．

4. 問題順に，

$$e^i = \cos 1 + i\sin 1$$

$$\log i = \log|i| + i\arg(i) = \left(2m + \frac{\pi}{2}\right)i, \qquad m : \text{整数}$$

$$\sin i = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = \frac{e^{1} - e^{-1}}{2} i = i\sinh 1$$

$$\tan i = \frac{\sin(i)}{\cos(i)} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{-1} - e^{1}}{e^{-1} + e^{1}} = i\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$$

また，$\sqrt[3]{i}$ については，m を任意の整数として

$$i = \cos\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi + i\sin\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi$$

であるから，実質的には $m = 0, 1, 2$ の 3 通りだけ考えればよく，そのとき

$$\sqrt[3]{i} = \cos\frac{4m+1}{6}\pi + i\sin\frac{4m+1}{6}\pi$$

$$= \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} & = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \qquad (m = 0) \\ \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6} & = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \quad (m = 1) \\ \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2} & = -i \qquad\qquad (m = 2). \end{cases}$$

5. 第 1 の値については，

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - i\log 2\right) = \frac{\sin(i\log 2)}{\cos(i\log 2)} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{-\log 2} - e^{\log 2}}{e^{-\log 2} + e^{\log 2}}$$

$$= i\,\frac{2 - \dfrac{1}{2}}{2 + \dfrac{1}{2}} = \frac{3}{5}\,i.$$

第 2 の値については

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{6}+i\right) &= \frac{1}{2}\left\{\exp\left(i\left(\frac{\pi}{6}+i\right)\right)+\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{6}+i\right)\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\exp\left(\frac{\pi}{6}i-1\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{6}i+1\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)+e\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\frac{i}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(e+\frac{1}{e}\right)-\frac{i}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right).
\end{aligned}$$

6. 任意の複素数 $z=x+iy$ に対して

$$\begin{aligned}
\overline{e^z} &= \overline{e^(x+iy)} = \overline{e^x(\cos y+i\sin y)} \\
&= \overline{e^x(\cos y-i\sin y)} = e^x(\cos(-y)+i\sin(-y)) = e^{\bar{z}}
\end{aligned}$$

不等式については，$z=x+iy$ とおくとき (27 ページの公式を幾つか使って)，

$$|e^z| = |e^(x+iy)| = |e^x(\cos y+i\sin y)| = |e^x|\,|\cos y+i\sin y| = e^x$$

であるが，$|z|\geq|x|\geq x$ であるから，最終的に $|e^z|\leq e^{|z|}$ を得る．等号の成立は z が正の実数のとき (かつそのときだけ) である．

7. 値 $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ を求めるためには，この値が $z=x+iy$ に等しいとおき 3 角関数の定義に基づいて計算すれば，

$$(e^y-e^{-y})\cos x=0, \qquad (e^y+e^{-y})\sin x=1$$

を得る．これより，x,y は整数 m を用いて

$$x=m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{6}, \quad y=0$$

と書けることを知る．すなわち求める値は

$$m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{6}, \quad m: 整数$$

である．

値 $\cos^{-1}\left(-\dfrac{e+e^{-1}}{2}\right)$ についても上と同様に進んで，x, y に関する方程式

$$(e^y + e^{-y})\cos x = -2(e+e^{-1}), \qquad (e^y - e^{-y})\sin x = 0$$

を得る．これを解くと

$$x = (2m+1)\pi, \qquad y = \pm 1,$$

すなわち，求める値は $(2m+1)\pi \pm i$ (m : 整数) である．

次に，値 $\sin^{-1}(i)$ について考える．この場合にも上と同様に進んで，x, y に関する方程式

$$(e^y - e^{-y})\cos x = 2, \qquad (e^y + e^{-y})\sin x = 0$$

を得る．これを解くと

$$x = m\pi, \qquad y = \log(\sqrt{2} + (-1)^m),$$

すなわち，求める値は $m\pi + i\log(\sqrt{2}+(-1)^m)$ (m : 整数) である．

最後の問題については，求める値を実部と虚部に分けることをせず $\tan^{-1}(1+2i) = z$ とおき，さらに簡単のために $w = e^{iz}$ とおけば，

$$-2+i = \frac{w^2-1}{w^2+1} \quad すなわち \quad w^2 = \frac{-1+i}{3-i} = \frac{-2+i}{5}$$

が得られる．ここで $e^{iz} = w$ であったことを思い出せば，$e^{2iz} = w^2 = \dfrac{-2+i}{5}$ であるから，$z = x + iy$ とおいて

$$e^{-2y} = |w|^2 = \left|\frac{-2+i}{5}\right| = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(2x) = -\frac{2}{5}, \quad \sin(2x) = \frac{1}{5}$$

を得る．これより，m を整数として

$$y = \frac{1}{4}\log 5, \qquad x = \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}} + m\pi$$

すなわち，求める値は

$$\left(\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}} + m\pi\right) + \frac{i}{4}\log 5 \ (m : \text{整数})$$

である．

[注意] $\quad \dfrac{\pi}{4} < \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}} < \dfrac{\pi}{2}.$

[関連問題]
$\tan^{-1}(1+\sqrt{3}i)$ を求めよ．(答え：

$$\left(\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}-3}} + m\pi\right) + \frac{i}{4}\log\frac{5+2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}} \qquad (m : \text{整数})).$$

8. いつものように $z = x + iy$ とおくと，$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ だから，たとえば虚軸 $(x = 0)$ に沿って $y \to \infty$ とするとき，e^z は単位円周上を走り回って極限値は存在しない．また，実軸 $(y = 0)$ に沿って $x \to \infty$ とすれば $e^z \to \infty$ であり，実軸 $(y = 0)$ に沿って $x \to -\infty$ とすれば $e^z \to 0$ である．

   [関連問題]
   原点から出る半直線にそって z が無限遠点に近づくときの極限値の存在を検証し，もし定まるならばその極限値を求めよ．

9. $\mathrm{Log} z$ は対数関数の主値だから，その虚部は例えば区間 $(-\pi, \pi]$ におさまるように選ばれている．すると，例えば $z = 1$ のときを考えると，最左辺は虚部が -2π であり，第 2 辺は虚部が 0 である．すでにこの段階で矛盾が生じている．ここで考えている $z = 1$ のときは以後の等号はすべて正しい (値はどれも 0) が，最後の変形は，上に挙げたのと同じ理由によって z のとり方によっては成り立たなくなる．結局正しいのは真ん中の等式だけであって，最初と最後の等式は一般には不成立．

10. 切り込みの入った平面 $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z = 0,\ \mathrm{Im}\, z < 0\}$ の上での対数関数 $\mathrm{Log} z$ は一価関数として定まっている．それを $\mathrm{Log} z = u + iv$ と書いたとすると，

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2),\ v(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

であるから，

$$\frac{d}{dz} \mathrm{Log} z = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}$$

が分かる．

[**注意**]　対数関数は局所的には矛盾無く定義されたものと考えられるが，加法定数の任意性はつきまとう．それでも微分に関しては (どの加法定数を選ぼうとも，あるいは分枝をどのように選らぼうとも) 完全に一意に定まる．この理由から，微分操作の後を睨むかぎり局所的に 1 つの分枝を選んで $\log z = u + iv$ と書いたとすると，

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2),\ v(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

と考えてよく，したがって先の計算はそのまま使えて最終的に関係式 $(\log z)' = 1/z$ が成り立つことが分かる．

11. 最初の問題については，$z = x + iy$ とすると

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x$$

と書き直せるから，たとえば $x = \dfrac{\pi}{2}$ としたまま $y \to \infty$ とすると $\cos z \to \infty$ であるのに $y \to -\infty$ とすると $\cos z \to -\infty$.

第 2 の問題は本質的に問題 8 で済んでいる．

最後の問題は，$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ とおくと，

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r}$$

であるから

$$e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{r}}=e^{\frac{\cos\theta}{r}}e^{-i\frac{\sin\theta}{r}}=e^{\frac{\cos\theta}{r}}\left(\cos\frac{\sin\theta}{r}-i\sin\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

と書き直せるが，

$$\left|\frac{\cos\theta}{r}\right|\leq\frac{1}{r},\qquad\left|\frac{\sin\theta}{r}\right|\leq\frac{1}{r}$$

であることと 3 つの実関数 e^t, $\cos t, \sin t$ の $t=0$ での連続性によって

$$e^{\dfrac{\cos\theta}{r}}\to 1,\qquad\cos\frac{\sin\theta}{r}\to 1,\qquad\sin\frac{\sin\theta}{r}\to 0$$

である．したがって $z\to\infty$ のときの極限値は存在して 1 である．

[注意]　後に証明される不等式 (演習問題 VIII, 問題 10) $|e^z-1|\leq|e^{|z|}-1|$ を用いれば，

$$|e^{\frac{1}{z}}-1|\leq|e^{|\frac{1}{z}|}-1|=|e^{\frac{1}{|z|}}-1|\to 0\qquad(|z|\to\infty)$$

となって期待された結果を得ることができる．

12. 複素変数の 3 角関数の定義から，

$$\cos^2 z+\sin^2 z=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2$$
$$=\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}-\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4}=1.$$

13. 余弦関数の定義において変数 $z=x+iy$ を用いると，

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\{e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}(\cos x-i\sin x)\}\\ &= \frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x-i\frac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x\end{aligned}$$

であるから，

$$|\cos z|^2 = \frac{e^{2y}+e^{-2y}}{4} + \frac{\cos 2x}{2} = \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 + \cos^2 x$$

が得られる．これよりグラフの概形が分かる．

容易に分かるように，右辺の関数は $x = (k+1/2)\pi$, $y = 0\,(k \in \mathbb{Z})$ では最小値 0 をとる．それ以外では値 0 をとらないから，関数 $|\cos z|$ の最小値は 0 で，最小値がとられるのは $x = (k+1/2)\pi$, $y = 0\,(k \in \mathbb{Z})$ に限られる．

ところで，右辺の 2 つの項はともに偶関数であって，第 1 項は本質的にいわゆる懸垂線 (catenary) で $y = 0$ で最小値 0 をとる．また第 2 項は $x = 0$ で極大値 1 をとる．つまりグラフは原点で鞍状になっている；平面 $x = 0$ 上に描かれた懸垂線が，x が 0 から — 小さい範囲に限って — 離れるに従い，下方へ滑り落ちる．

極値をとり得る点 z_0 を一般的に探すために，

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}|\cos z|^2\right]_{z=z_0} = \left[\frac{\partial}{\partial y}|\cos z|^2\right]_{z=z_0} = 0$$

を解くと，最小値がとられる $z_0 = (n+1/2)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ 以外には，$z_0 = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ が得られる．これらの点でも原点と全く同じ議論ができるので，結局のところ，関数 $z \mapsto |\cos^2 z|$ のグラフは平面 $\mathbb{C}$ 全体では最大値をもたないことが分かった．

14. 実軸の上では，よく知られているように，$|\cos z| \leq 1$ である．実数 x を止める毎に，不等式

$$\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 \leq \sin^2 x$$

で与えられる．この不等式を満たす (x, y) の全体を図示すればよい．詳細は略．

[**関連問題**]
上に省略された図を描け．また，Maple や Mathematica などを用いて範囲を示す図を描け．

15. $z = x + iy$ であるから

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$$
$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i}$$
$$= \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos x$$
$$= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y.$$

したがって，

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y$$
$$= \sin^2 x\cosh^2 y - \cos^2 x(1 - \cosh^2 y)$$
$$= \cosh^2 y - \cos^2 x \le \cosh^2 y$$

および

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y$$
$$= \sin^2 x(1 + \sinh^2 y) + \cos^2 x\sinh^2 y$$
$$= \sinh^2 y + \sin^2 x \ge \sinh^2 y$$

が得られて，不等式が示された．等号の成立はそれぞれ $\cos x = 0$ あるいは $\sin x = 0$ のとき，すなわち $x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ あるいは $x = m\pi$ のときである．ここで m は一般の整数を表す．

[**注意**]　上で示した等式 $\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$ はすでに脚注 16 でも注意されたもの．実際，$z = x + (iy)$ と考えて 3 角関数の加法定理 (定理 5．6 の主張 (4)) を適用し，さらに定理 5．7 の (1) を用いれば

$$\sin z = \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

が得られる．

16. まず指数関数は値 0 を決してとらない整関数であるから，関数 e^{-z} もまた整関数で決して 0 にはならない．さらに，指数関数

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad z = x + iy$$

は帯状領域

$$S := \{z = x + iy \mid -\infty < x < \infty, 0 \le y < 2\pi\}$$

の中で 0 以外のすべての複素数を値としてとるから，関数 e^{-z} もまた同じ性質をもつ．今，与えられた $w_0 \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，$z_0 = x_0 + iy_0 \in S$ が $e^{-z_0} = w_0$ を満たしたとする[1]．指定された扇形は，(x, y) 座標系では

$$y > d|x| \qquad (d > 0)$$

と表現される．もし上で得た (x_0, y_0) がこの不等式を満たせばこれ以上何も示すべきことはない．そうでないときには，$y_0 \le d|x_0|$ であるが，このときは十分大きな自然数 k を選んで

$$d|x_0| - y_0 < k \cdot (2\pi)$$

が成り立つようにできる[2]．y_0 の代わりに $y_0' := y_0 + 2k\pi$ を考えれば，すべての自然数 n について，$z_n' := x_0 + i(y_0' + 2m\pi)$ は与えられた扇形内にあって，しかも $e^{-(z_n'} = e^{-z_0} = w_0$ を満たす．

17. 積分の定義に則って１つづつ丁寧に計算する．まず積分路を径数表示する：

$$\begin{array}{rcll} C: & z & = & e^{it}, & -\pi \le t \le \pi \\ C^+: & z & = & e^{it}, & 0 \le t \le \pi \\ C^-: & z & = & e^{it}, & -\pi \le t \le 0. \end{array}$$

---

[1]このような $z_0 \in S$ は唯 1 つである．何故か？

[2]これは "塵も積もれば山となる" ことに他ならないが，この事実を数学では "Archimedes の公理" と呼ぶ：

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall \Omega > 0, \quad \exists N{:}\text{自然数 } N\varepsilon > \Omega.$$

もちろん，この主張が真に意味があるのは，"ε がいかに小さくとも，また Ω がいかに大きくとも" 上の不等式が成り立つように自然数 N を選べる，という点にある．これは実数のもつ重要な性質のひとつである．

次に，関数 $\sqrt{z}$ は $\sqrt{1}=1$ となる分枝が選ばれているから，$z=re^{it}$ は負の実軸を取り去った平面上を動くときには

$$\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{t}{2}}$$

と表されている．したがって，積分の定義によって

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{ie^{it}dt}{e^{\frac{t}{2}i}}=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{\frac{t}{2}i}dt=2\left[e^{\frac{t}{2}i}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=2(i-(-i))=4i$$

同様に考えて

$$\int_{C^+}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int_0^{\pi}\frac{ie^{it}dt}{e^{\frac{t}{2}i}}=i\int_0^{\pi}e^{\frac{t}{2}i}dt=2\left[e^{\frac{t}{2}i}\right]_0^{\pi}$$

$$=2(i-1)=-2(1-i)$$

および

$$\int_{C^+}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int_{-\pi}^{0}\frac{ie^{it}dt}{e^{\frac{t}{2}i}}=i\int_{-\pi}^{0}e^{\frac{t}{2}i}dt=2\left[e^{\frac{t}{2}i}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$=2(1-(-i))=2(1+i)$$

を得る．第 2，第 3 の積分の値の和が最初の積分の値であることは当然であろう．

関数 $\sqrt{z}$ の分枝を $\sqrt{-1}=-i$ であるように選んだ場合は，負の実軸ではなく正の実軸を取り去った平面を考えるのが合理的であろう．この場合にも積分路の径数表示は上とおなじものを採用することができるが，C が C^+ と C^- と点 -1 で繋がったものとしてのイメージを強く出すためには

$$C^-: z=e^{it}, \qquad \pi\le t\le 2\pi$$

と表示する方が分かりよいであろう．関数 $\sqrt{z}$ はいまや新たに

$$\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i(\frac{t}{2}-\pi)}=-\sqrt{r}e^{\frac{t}{2}i)}, \qquad 0<t<2\pi$$

と表されている．したがって，積分の定義によって

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{-e^{i\frac{t}{2}}} = -i\int_0^{2\pi} e^{\frac{t}{2}i}dt$$

$$= -2\,[e^{\frac{t}{2}i}]_0^{2\pi} = -2(-1-1) = 4,$$

$$\int_{C^+} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{-\frac{t}{2}i}} = -i\int_0^{\pi} e^{\frac{t}{2}i}dt$$

$$= -2\,[e^{\frac{t}{2}i}]_0^{\pi} = -2(i-1) = 2(1-i),$$

$$\int_{C^-} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{-\frac{t}{2}i}} = -i\int_{\pi}^{2\pi} e^{\frac{t}{2}i}dt$$

$$= -2\,[e^{\frac{t}{2}i}]_{\pi}^{2\pi} = -2(-1-i) = 2(1+i)$$

を得る．ここでもまた第 2，第 3 の積分の値の和が最初の積分の値に等しい．

18. 正方形 $\{z = x+iy \mid |x| \le \pi,\ |y| \le \pi\}$ では，$|\mathrm{Re}\, e^z| = e^x$ は区間 $[e^{-\pi},\ e^{\pi}]$ を動く．すなわち最小値は $e^{-\pi}$, 最大値は $e^{\pi}]$ である．

    関数 $e^{|z|}$ については，容易に分かるように，$z=0$ で最小値 1 をとり，4 つの値 $z = \pm\pi \pm \pi i$ において最大値 $e^{\sqrt{2}\pi}$ をとる．

19. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = |\dfrac{|z-i|}{|z+i|}$ は点 z から i および $-i$ までの距離の比を表す．上半平面 $\mathbb{H}$ の点 z に対してはこの比の値は 1 より小さいから，$\mathbb{H}$ の像は $\mathbb{D}$ に含まれる．

    任意の $w \in \mathbb{D}$ に対して，方程式 $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ の解

$$z = -i\frac{w+1}{w-1}$$

は，

$$\mathrm{Im}\ \left[-i\frac{w+1}{w-1}\right] = -\mathrm{Re}\ \left[\frac{w+1}{w-1}\right] = -\frac{1}{2}\left\{\frac{w+1}{w-1} + \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1}\right\}$$

$$= \frac{1-|w|^2}{|w-1|^2} > 0$$

を満たす，すなわち $w \in \mathbb{H}$. これで上への写像であることが示された.

最後に，

$$\frac{d}{dz}\frac{z-i}{z+i} = \frac{2i}{(z+i)^2} \neq 0, \qquad z \in \mathbb{H}$$

だから等角写像である.

20. 右半平面で考えた関数 $w = \log z \quad (\log 1 = 0)$ は，

$$w = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$$

と書けるが，ここで逆正接関数の値は $-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$ としてとられている．この関数が右半平面を帯状領域

$$\{w = u + iv \in \mathbb{C} \mid -\infty < u < \infty,\ -\pi/2 < v < \pi/2\}$$

の上に 1 対 1 に写すことは容易に確かめられる：　たとえば 1 対 1 であることを示すためには，任意に与えた

$$(u, v),\ -\infty < u < \infty,\ -\pi/2 < v < \pi/2$$

に対して，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を

$$r = e^u, \qquad \theta = v$$

と選べば，(x, y) は右半平面の点であってその像は w である.

写像の等角性は

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z} \neq 0$$

であることから明らか.

21. 求める写像関数は前 2 問を繋ぎ合わせれば得られる．すなわち，単位円板から一旦上半平面に，問題 19 で与えられた関数の逆関数によって，写し，さらにこの半平面を $90°$ 時計回りに回転することによって右半平面に写し，次に問題 20 を利用してこれを帯状領域に写し，最後にこれに拡大縮小と平行移動を加味すれば，指定された帯状領域に到達できる筈である.

具体的には各段階は次のようになる：

$$\begin{array}{lrcll} \text{第 1 段階：} & \zeta & = & -i\dfrac{z+1}{z-1}, & z \in \mathbb{D} \\ \text{第 2 段階：} & \omega & = & \log(-i\zeta), & \operatorname{Im}\zeta > 0 \\ \text{第 3 段階：} & w & = & \dfrac{1}{\pi}\,\omega + \dfrac{i}{2}, & \operatorname{Re}\omega| < \dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Im}\omega \in \mathbb{R}. \end{array}$$

したがってこれらを合成したものは

$$w = \frac{1}{\pi}\log\frac{1+z}{1-z} + \frac{i}{2} = \frac{1}{\pi}\left(\log\frac{1+z}{1-z} + \frac{\pi}{2}\,i\right)$$

である．ここで，$z = 0$ のときには，$\log\dfrac{1+z}{1-z} = \log 1 = 0$，$w = \dfrac{i}{2}$ である．

[**注意**]　上の方法は基本的な等角写像をうまく組み合わせて望みの写像関数を手に入れようとするもので，きわめて構成的であり，等角写像の実用的重要性からも基本的な手法である．もちろん期待する関数をもっと直観的に得ることができる場合もある；上の問題がまさにその一例を提供している．

[**関連問題**]
写像関数の構成にはつぎのような発見的方法も有用である．以下のことを確かめよ．

求める写像関数が境界をどのように対応させているかを考えれば，単位円板内の調和関数で上半円周，下半円周それぞれで定数であるものをまず拵えればよいことが分かる．初等幾何学で習った円周角の性質を思い出せば，

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto \arg\frac{z-1}{z+1}$$

を考えてみようという気になるであろう．実際，幾何学的考察から次のことが容易に分かる：　(一般には，この関数には多価性という困難がつきまとっているけれども) 点 z が閉単位円板上に制限された状態で動くとき，この関数の値は点 z が 2 点 ± 1 を結ぶ線分を見込む角 (角の大きさは符号つきで，すなわち反時計回りを正の向きとしてに考える) を表す．すなわち，この関数は $\overline{\mathbb{D}}$ での連続関数として定義され，上半円周．下半円周でそれぞれ定数である．これらの定数は上半円周では

$\pi/2$，下半円周では $3\pi/2$ であることも容易に分かる．したがって，上に得た調和関数を虚部とする正則関数

$$\frac{1}{\pi}\left(-\log\frac{z-1}{z+1}+\frac{\pi}{2}i\right)=\frac{1}{\pi}\log\frac{z+1}{z-1}-\frac{i}{2}$$

が求める関数 (の１つ) である．

[**注意**]　帯状領域の境界を作る 2 つの[3]直線 $\{v=1\}\{v=0\}$ を入れ替えることができるので，ここまでの条件では写像の一意性は保障されない．

22. 立体駐車場の構造と対数分岐点の近くを有限葉だけ切り取ったものの類似性については「関数論講義」120 ページの図版を見よ．

23. メービウス変換 f が

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

と書けていたとする．ここで，$a,b,c,d\in\mathbb{C}$, $ad-bc=1$ である．このとき，

$$f'(z)=\frac{1}{(cd+d)^2},\qquad f''(z)=\frac{-2c}{(cz+d)^3},\qquad f'''(z)=\frac{6c^2}{(cz+d)^4}$$

であるから，

$$\{f,z\}=\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2=\frac{6c^2}{(cz+d)^2}-\frac{3}{2}\frac{4c^2}{(cz+d)^2}=0.$$

24. 関数 $w=f(z)$ は正則，$z=A(\zeta),\omega=B(w)$ はメービウス変換だから前問によって $\{A,\zeta\}=0$ および $\{B,w\}=0$ が成り立つ．したがって前章問題 27 で得た結果から，

$$\{f\circ A,\zeta\}=\{f,z\}A'(\zeta)^2+\{A,\zeta\}=\{f,z\}A'(\zeta)^2$$

および

$$\{B\circ f,z\}=\{B,w\}f'(z)^2+\{f,z\}=\{f,z\}$$

が得られる．

[3]帯状領域の境界としては無限遠点を通って一繋がりのものと考えるのが適切ではあるが，見かけ上は 2 本の直線なのでここでは敢えて 2 つと言った．

[補遺・正誤表] pp. 85 -105

1. 93 ページ上から 5 行目，$(\xi,\eta) \to 0$ とあるのは $(\xi,\eta) \to (0,0)$ の誤り．
2.
3. 93 ページ上から 8 行目,「任意の複素数 z が」とあるのを「任意の複素数 $z(\neq 0)$ が」と訂正．
4. 94 ページの上から 7 行目，このままで間違いではないが，定義に忠実に計算を進めるならば第 2 辺は
$$\left|\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\right|$$
と書いたほうが分かりやすい．
5. 94, 95 ページの定理 5.6，5.7 などにある「ある n」というのはひとつ決めた n の意味ではない．念のために注意．
6. 96 ページの上から 2 行目の $\mathrm{Arg}\, z$ の範囲は，$-\pi \leq \mathrm{Arg}\, z < \pi$ とする流儀もある．
7. 96 ページの 3 行目，w が「実数」とあるのは「正の実数」とするのが適切．
8. 97 ページの脚注 12) を付すのは，現在の位置ではなくこれに先行する文章「 ··· と呼ばれている」の方がよい．
9. 103 ページ図 5.7 の 3 枚の平面を繋ぐ梯子のような部分を白く塗りつぶす．
10. 105 ページ末尾に問題 25 として次を追加：　図 5.6 のリーマン面と付録 (202 ページ) で構成された例との関係を調べよ．