

理工系 複素関数論— 多変数の微積分から複素解析へ —
章末問題 VI の解答ならびに補遺・正誤表

[はじめに]

ここには教科書にある問題の比較的詳しい解答のほかに、幾つかの注意や関連問題が含まれています。関連問題は、難易度・精粗まちまちですが、教科書や問題の内容をよりよく理解するのに非常に役立つ筈です。また、この章の内容に関する補遺と正誤表が末尾にあります。不手際をお詫びし、ご訂正くださるようお願いいたします。]

解答はもちろん正確を期したものではありませんが、それでもまだまだミスプリントや計算間違いがあるかもしれません。発見なされたら、お手数ですが是非とも著者に一報くださるようお願いいたします。連絡先は shiba@amath.hiroshima-u.ac.jp です。どうかよろしく申し上げます。

1. このような性質をもつ関数 f があったとするとコーシーの積分定理によって

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ。この左辺にある積分は、

$$f(z) = \bar{z} = \frac{1}{z}$$

によって $2\pi i$ に等しい (例題 6.2 および例題 3.2 を参照) から、矛盾を得た。すなわち、存在は否定的である。

2. 点 a を除けば局所的に関数 $1/(z-a)$ の原始関数 $\log(z-a)$ が存在する。したがって曲線 γ の小さな部分 γ' については、その始点および終点を z' および z'' とするとき

$$\begin{aligned} I(\gamma', a) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{1}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} [\log(z-a)]_{z=z'}^{z=z''} \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\log|z-a| + i \arg(z-a)]_{z=z'}^{z=z''} = \frac{1}{2\pi} [\arg(z-a)]_{z=z'}^{z=z''} \\ &= \frac{1}{2\pi} (\arg(z''-a) - \arg(z'-a)) \end{aligned}$$

ここで，関数 $\arg(z - a)$ は弧 γ' 上では以 1 価連続な関数として定義されたものである．このとき， $I(\gamma', a)$ は点 z が γ' に沿って動くときの，点 a を見る角の変化量を 2π で割ったものを表している．

求める $I(\gamma, a)$ はこのような小さな γ' の有限和として表されるから，それは点 z が γ' に沿って動くときの点 a を回る回数を表している．したがっていつも整数である．

[注意] 問題文の I の定義は間違っている； 2π は $2\pi i$ で置き換えるべき．

この解答は直観的には分かりやすいが，厳密性について疑問を覚えた場合に備えて，別解を述べる．それは，曲線の表示をより直接的に用いるものである．曲線の表示を

$$\gamma : z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

とし，各 τ ($\alpha \leq \tau \leq \beta$) について部分曲線

$$\gamma_\tau : z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \tau$$

を考える．さらに

$$F(\tau) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\tau} \frac{dz}{z - a}$$

とおくと，

$$F'(\tau) = \frac{d}{d\tau} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\tau} \frac{z'(t) dt}{z(t) - a} = \frac{1}{2\pi i} \frac{z'(\tau)}{z(\tau) - a}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{(z(\tau) - a)e^{-2\pi i F(\tau)}\} &= z'(\tau)e^{-F(\tau)} - 2\pi i(z(\tau) - a)F'(\tau)e^{-F(\tau)} \\ &= [z'(\tau) - 2\pi i(z(\tau) - a)F'(\tau)]e^{-F(\tau)} = 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$(z(\tau) - a)e^{-2\pi i F(\tau)} = \text{const.}$$

である．特に

$$(z(\beta) - a)e^{-2\pi i F(\beta)} = (z(\alpha) - a)e^{-2\pi i F(\alpha)}$$

でもあるが， γ が点 a を通らない閉曲線であることから

$$z(\beta) = z(\alpha) \neq a$$

であることに注意すれば，

$$e^{-2\pi i F(\beta)} = e^{-2\pi i F(\alpha)}.$$

指数関数の周期性から， $F(\beta) - F(\alpha)$ は整数である（下記の関連問題を参照）．

[関連問題]

上の別解の最後の議論は，教科書の定理 5.4，(5) のある意味での逆を用いており，この定理だけからは直接に従わない．これについて考察せよ．

[注意] 閉曲線 γ に沿って実際に積分をして確認することもできる．その方法および関連する話題については「関数論講義」に詳細に論じられている．

3. まず注意： 中心 a ，半径 a の円周を反時計回りにまわる曲線は $C(a, a)$ と記すのであった．したがって以下では記号 γ の代わりに $C(a, a)$ を用いる．

$a > 1$ の場合には関数 $z/(z^4 - 1)$ は，点 $z = 1$ を除けば閉円板 $\overline{\mathbb{D}(a, a)}$ の周および内部で正則である．したがって，コーシーの積分公式によって

$$\begin{aligned} \int_{C(a, a)} \frac{z dz}{z^4 - 1} &= \int_{C(a, a)} \frac{z dz}{(z - 1)(z + 1)(z^2 + 1)} \\ &= 2\pi i \left[\frac{z}{(z + 1)(z^2 + 1)} \right]_{z=1} \\ &= 2\pi i \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{\pi i}{2}. \end{aligned}$$

条件 $a > 1$ を弱めようとするときには，最も簡単な拡張は $0 < a < 1$ の場合であろう；ここまでなら問題文はそのままの意味をもつからである．これ以上の拡張は問題文の修正（例えば $C(a, |a|)$ とするなど）が必要になる．

そこで，ここでは $0 < a < 1$ の場合を考える．このときには簡単な幾何学的考察に基づいて，さらに場合を分けて $a = 1/2$ の場合， $1/2 < a < 1$

の場合, および $0 < a < 1/2$ の場合, の3つに分けて考える. 容易に分かるように, 第2の場合は $a > 1$ における結果と同じになる. 第3の場合には被積分関数 $z/(z^4 - 1)$ は閉円板 $\overline{\mathbb{D}(a, a)}$ の周および内部で正則であって, したがってコーシーの積分定理によって求める値は0である. 最後に $a = 1/2$ の場合には, 被積分関数 $z/(z^4 - 1)$ は閉円板 $\overline{\mathbb{D}(a, a)}$ の周上に正則性の破れる点 $z = 1$ があるが, 内部では正則である. このとき, 定理6.9の議論を繰り返せば

$$\int_{C(1/2, 1/2)} \frac{z dz}{z^4 - 1} = \frac{\pi i}{4}$$

であることが分かる.

4. $a = 0$ のときは,

$$\int_C \frac{e^z}{z^4} dz = 2\pi i \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dz^3} e^z \right]_{z=0} = 2\pi i \frac{1}{3!} = \frac{\pi i}{3}.$$

また, $0 < a < 1$ のときは,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^z}{z^2(z^2 - a^2)} dz &= 2\pi i \left[\frac{e^z}{z^2(z+a)} \right]_{z=a} \\ &\quad + 2\pi i \left[\frac{e^z}{z^2(z-a)} \right]_{z=-a} \\ &\quad + 2\pi i \left[\left(\frac{e^z}{z^2 - a^2} \right)' \right]_{z=0} \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{e^a - e^{-a}}{2a^3} + \left[\frac{e^z(z^2 - a^2) - 2ze^z}{(z^2 - a^2)^2} \right]_{z=0} \right\} \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{e^a - e^{-a}}{2a^3} + \frac{-a^2}{a^4} \right\} = 2\pi i \left\{ \frac{e^a - e^{-a}}{2a^3} + \frac{1}{a^2} \right\} \\ &= \frac{2\pi i}{a^3} (\sinh a - a). \end{aligned}$$

$a = 1$ のときは ,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^z}{z^2(z^2-1)} dz &= \pi i \left[\frac{e^z}{z^2(z+1)} \right]_{z=1} \\ &\quad + \pi i \left[\frac{e^z}{z^2(z-1)} \right]_{z=-1} \\ &\quad + 2\pi i \left[\left(\frac{e^z}{z^2-1} \right)' \right]_{z=0} \\ &= \pi i \left\{ \frac{e - e^{-1}}{2} + \pi i \left[\frac{e^z(z^2-1) - 2ze^z}{(z^2-1)^2} \right]_{z=0} \right\} \\ &= \pi i \frac{e - e^{-1}}{2} - 2\pi i = \pi i (\sinh 1 - 2). \end{aligned}$$

5. この積分の値は , 閉曲線 γ が点 $z = 1$ あるいは $z = -1$ をそれぞれ何回 (向きも考えて) 回るかに依存する .

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$$

であるから , $z = 1$ あるいは $z = -1$ をそれぞれを反時計回りに 1 回まわる度に , 積分の値は πi の増あるいは減である . したがって , 与えられた積分の値は $k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$) の形をしている .

6. コーシーの積分公式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,2)} \frac{e^{\lambda z}}{z^2+1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,2)} \frac{e^{\lambda z}}{(z-i)(z+i)} dz \\ &= \frac{e^{i\lambda}}{2i} + \frac{e^{-i\lambda}}{-2i} = \frac{1}{2i} (e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}) \\ &= \sin \lambda \end{aligned}$$

7. 因数分解

$$z^3 + a^3 = (z+a)(z^2 + az + a^2) = (z+a)(z-\alpha)(z-\beta)$$

を行う．ここで明らかに

$$|\alpha| = |\beta| = a; \quad \alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = a^2$$

である．すなわち被積分関数の分母を 0 にする 4 点 $0, -a, \alpha, \beta$ はことごとく開円板 $\mathbb{D}(0, 2a)$ 内にある．したがって，

$$\begin{aligned} \int_{C(0,2a)} \frac{dz}{z^3 + a^3} &= \int_{C(0,2a)} \frac{dz}{z(z+a)(z-\alpha)(z-\beta)} \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{(z+a)(z-\alpha)(z-\beta)} \right]_{z=0} \\ &\quad + 2\pi i \left[\frac{1}{z(z-\alpha)(z-\beta)} \right]_{z=-a} \\ &\quad + 2\pi i \left[\frac{1}{z(z+a)(z-\beta)} \right]_{z=\alpha} \\ &\quad + 2\pi i \left[\frac{1}{z(z+a)(z-\alpha)} \right]_{z=\beta} \end{aligned}$$

であるが，この式の値を $2\pi i$ で割ったものは

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a\alpha\beta} + \frac{1}{-a(a+\alpha)(a+\beta)} + \frac{1}{\alpha(\alpha+a)(\alpha-\beta)} + \frac{1}{\beta(\beta+a)(\beta-\alpha)} \\ &= \left(\frac{1}{a\alpha\beta} + \frac{1}{-a\alpha\beta} \right) + \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{\alpha(\alpha+a)} - \frac{1}{\beta(\beta+a)} \right) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

もう 1 つの積分について考えるためには，被積分関数の分母を 0 にする 4 点 $0, -a, \alpha, \beta$ のうちの唯 1 つだけが，すなわち $z = 0$ だけが，開円板 $\mathbb{D}(0, a/2)$ 内にあることに注意する．したがって，

$$\begin{aligned} \int_{C(0,a/2)} \frac{dz}{z^3 + a^3} &= \int_{C(0,2a)} \frac{dz}{z(z+a)(z-\alpha)(z-\beta)} \\ &= 2\pi i \frac{1}{a\alpha\beta} \\ &= \frac{2\pi i}{a^3}. \end{aligned}$$

8. 基本的に問題 1 において解決済み .
9. 被積分関数はすべて \mathbb{C} で正則関数でしかも原始関数として (\mathbb{C} で 1 価正則な) 関数

$$\sin z, \quad \cosh z, \quad \frac{1}{2} \sinh(z^2), \quad \frac{1}{4} e^{z^4}$$

をもっている . したがって , それぞれの積分の値は積分路の取り方によらず定まる . 実際には以下のように計算できる .

$$(1) \int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z dz = [\sin z]_{-\pi i}^{\pi i} = \sin \pi i - \sin(-\pi i) = 2 \sin \pi i = -2 \sinh \pi.$$

$$(2) \int_0^{\pi i} \sinh z dz = [\cosh z]_0^{\pi i} = \cosh \pi i - 1 = \cos \pi - 1 = -2.$$

$$(3) \int_{-1}^{\pi i} z \cosh(z^2) dz = \left[\frac{1}{2} \sinh z^2 \right]_{-1}^{\sqrt{\pi i}} = \frac{1}{2} \sinh \pi i - \sinh 1 = -\frac{1}{2} \sinh 1.$$

$$(4) \int_{1-i}^{1+i} z^3 e^{z^4} dz = \left[\frac{1}{4} e^{z^4} \right]_{1-i}^{1+i} = \frac{1}{4} \left\{ e^{(1+i)^4} - e^{(1-i)^4} \right\} = 0.$$

10. 定理 6.5 を適用すれば容易に分かる .

最初の関数 z^5 は整関数 (全平面で正則) だからコーシーの積分定理によって平面内のどんな閉折れ線に沿う積分も 0 である . したがって \mathbb{C} で原始関数をもつ (原始関数は $z^6/6$) .

第 2 の関数 $1/z$ は , 例えば単位円周 C に沿う積分が $2\pi i$ であるから , \mathbb{C}^* の上では原始関数をもたない .

第 3 の関数 z^{-3} の単位円周 C に沿う積分は 0 である . 任意の閉折れ線に沿う積分を原点を回るものと回らないものとに分解して考えれば , この関数が \mathbb{C}^* の上で原始関数をもつことが分かる .

[注意] 折れ線の分解に関する表現はかなり直観に訴えていて厳密性に欠ける印象を否めない . ここではむしろ原始関数 $-z^{-2}/2$ を見せつけばよい . それで完了!

第 4 の関数については原始関数が

$$\frac{1}{2} \log \frac{z-1}{z+1}$$

が — 正確にはその適当な分枝を選べば — 指定された領域 $\mathbb{C} \setminus S[-1, 1]$ で 1 価正則であって, しかもその導関数が $\frac{1}{(z-1)(z+1)}$ であることを示せば前問と同様に解決される. 導関数に関する部分は容易であろう. 1 価正則な分枝がとれることを見るには, 等角写像の利用が分かり易い. 写像

$$z \mapsto \frac{z-1}{z+1} =: \zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S[-1, 1]$$

は $\mathbb{C} \setminus S[-1, 1]$ を負の実軸に沿って切れ込みの入った領域 $T = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ に写し, 一方対数関数 $\log \zeta$ は T で 1 価な分枝をもつ (5.4 節参照. 記号 T もその節にある).

最後に挙げられた関数は, 取り去られた線分 $S[-1, 1]$ を回る閉曲線 (例えば原点を中心とする半径 2 の円周) に沿う積分が $4\pi i$ であることから, 原始関数をもたない.

11. 直観的に認められる主張「単純閉曲線 γ は 1 つの領域を囲む」を利用すれば, 容易に次のことが分かる. 単純閉曲線 γ の囲む領域の内部に a がふくまれている場合は $\pm 2\pi i e^a$, そうでない場合は 0.

[注意] 上の「…」はジョルダン曲線定理として知られているが, この書物では利用することを避けている. この定理を用いずわれわれの現在の情報だけで結果を何らかの結果を得るには, 例えば関数

$$F(z) := \frac{e^z - e^a}{z - a}$$

を考えればよい. この関数は, 点 a を除けば正則で, 点 a の近くでは有界である. 実際, 複素微分可能性の定義によって

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{e^z - e^a}{z - a} = e^a$$

が成り立つからである. 考えやすくするために十分大きなコーシー領域を, 例えば点 a を中心とする開円板 G を, 考える. このとき, F に対するコーシーの積分定理や積分公式が, F が a においても正則であるときと同様に, 成り立つ. したがって, F は G で原始関数をもち, それゆえ G 内の任意の閉曲線 — 簡単のために点 a を通らないものだけを考えてもよからう — γ に対して,

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - e^a}{z - a} dz = 0$$

が成り立つ．これより，ある整数 k に対して

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z-a} dz = \int_{\gamma} \frac{e^a}{z-a} dz = 2\pi i e^a k$$

であることが分かる (演習問題 2)．この結論は先に得たものよりも弱い，それは γ の「単純性」を全く用いていないことによる．単純な γ については $k = 0$ あるいは $k = \pm 1$ であることさえ分かれば先と同じ結論に，厳密な形で到達できたことになる．しかしここではこれ以上この問題には立ち入らないでおく．

12. コーシーの積分公式によって $\frac{e^a}{(n-1)!}$ である．

13. コーシーの積分公式より $f_n(z) = (\sin z)^{(n-1)}$ である．従って $f_n(z) = \pm \sin z$ または $\pm \cos z$ の何れかである．このとき対応する f_{n+1} は $\pm \cos z$ または $\mp \sin z$ である．したがって $f_n(z)^2 + f_{n+1}(z)^2 = 1$ が成り立つ．

14. u の共役調和関数を v とする．このときコーシーの積分公式によって，

$$u(0) + iv(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\rho)} \frac{u(z) + iv(z)}{z} dz$$

が成り立つ．ここで積分路の径数表示 $C(0, \rho) : z = \rho e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ を用いると， $dz = i\rho e^{it} dt$ なので

$$u(0) + iv(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\rho)} \frac{u(z) + iv(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(\rho e^{it}) + iv(\rho e^{it})) dz$$

最左辺と最右辺の実部をとれば期待された等式が得られる．

[注意] この結果は「ガウスの平均値定理」と呼ばれている．

15. 任意に $\rho (0 < \rho < 1)$ を一つとめるとき，コーシーの積分公式より

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\rho)} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) dt$$

が成り立つが，この両辺の絶対値をとって定理 3.8 の (3) を用いると，

$$|f(0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})| dt$$

が得られる．

16. 仮定 $f(a) \neq 0$ によって, 十分小さな正数 ρ をとれば f は閉円板 $\overline{\mathbb{D}(a, \rho)}$ で正則かつそこで値 0 をとらない (43 ページでのビー玉の議論を参照). したがって, $U(x, y) := \log |f(z)|$ ($z = x + iy$) は閉円板 $\overline{\mathbb{D}(a, \rho)}$ で調和である. 実際, 閉円板 $\overline{\mathbb{D}(a, \rho)}$ で値 0 をとらない f と対数関数の合成は再び正則関数であり, U はその実部であるから調和な関数である. したがって問題 14 で示したことから,

$$U(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(a + \rho e^{it}) dt.$$

[注意] ここで 2 つの注意が必要である. まず第 1 に, 閉円板での調和性は — 正則性の定義と同様 — この閉円板を含むある領域で調和なこととして定義するのが自然であろう. 第 2 に, 上で考えた合成関数 $\log f(z)$ が閉円板 $\overline{\mathbb{D}(a, \rho)}$ で意味あるものとして — 1 つの z に対して必ず 1 つの値 $f(z)$ が対応させられているか? — 定義されることをしっかり確認する必要がある. このことを厳密にかつ一般に扱うことは定理 9.9 まで待たねばならないが, ここでは必要なら (実はその必要が無いというのが定理 9.9 の主張!) 半径 ρ を小さく取り直すことによって満足することにしよう.

17. 前問から任意の ρ ($0 < \rho < R$) に対して

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{it}) dt$$

が成り立つが, この両辺に ρ を掛けて 0 から R ($0 < R < 1$) まで ρ で積分すれば,

$$\frac{R^2}{2} u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R u(\rho e^{it}) \rho dt d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R u(x, y) dx dy.$$

[注意] これらの問題において, 関数記号と変数の組み合わせはかなり無神経に使われている. 関数 u を $u(re^{it})$ と書いたり $u(x, y)$ と読んだりすることなどである. しかし特に大きな誤解は生じないであろう.

18. u を実部にもつ \mathbb{D} 上の正則関数 (の 1 つ) を f とする. 見やすくするためにしばらくの間 $\zeta = \rho e^{i\theta}$ と書く. $\bar{\zeta} \in \mathbb{D}$ であるから $\bar{\zeta}^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ である. ゆえに, コーシーの積分定理と積分公式によって,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(R, 0)} \frac{f(z)}{z - \bar{\zeta}^{-1}} dz, \quad f(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(R, 0)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

が成り立つから，辺々加えて

$$f(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(R,0)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz, + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(R,0)} \frac{f(z)}{z - \bar{\zeta}^{-1}} dz$$

となるが，積分の道

$$C(R, 0) : z = Re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

に沿っては

$$z \bar{z} = |z|^2 = R^2, \quad \bar{z} dz + z d\bar{z} = 0; \quad dz = iRe^{it} dt = iz dt$$

であることを用いれば，上の等式の右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C(R,0)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \int_{C(R,0)} \frac{f(z)}{z - \bar{\zeta}^{-1}} \frac{z}{\bar{z}} d\bar{z} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{zf(z)}{z - \zeta} + \frac{\bar{\zeta} f(z)}{\bar{z} - \bar{\zeta}} \right) dt \quad (z = e^{it}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \left(\frac{z}{z - \zeta} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \left(\frac{z}{z - \zeta} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \frac{|z|^2 - |\zeta|^2}{|z - \zeta|^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - t) + \rho^2} dt. \end{aligned}$$

最後の部分は，余弦定理による：

$$|z - \zeta|^2 = R^2 - 2\rho R \cos(\theta - t) + \rho^2.$$

両辺の実部をとって

$$u(\rho e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \left(\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - t) + \rho^2} \right) dt$$

を得る．

[注意] この等式は問題 14 で得たガウスの定理の拡張で「ポアソンの公式」という名で知られている．また， $\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - t) + \rho^2}$ を「ポアソン核」と呼ぶ．

[関連問題]

上の等式は，単位円板から点 ζ を中心とした小さな閉円板をくり抜いた領域でグリーンの公式を適用することによっても得られる．これを行え．またその証明をコーシーの積分公式の証明と比較検討せよ．

19. (1) u は調和関数であるから $u_{xx} + u_{yy} = 0$ が成り立つ．この条件は

$$(u_x)_x = -(u_y)_y = (-u_y)_y$$

と書き直し，これに

$$(u_x)_y = (u_y)_x = -(-u_y)_x$$

を併せれば， $u_x, -u_y$ がコーシー・リーマンの関係式にほかならない． $u \in C^2(G)$ であるから， $f := u_x - iu_y$ は G で正則である．

- (2) 領域 G に含まれる任意の 3 角形 P をとる． P はその周だけではなく内部 T もまた G の点ばかりからなるとする．このとき，

$$\begin{aligned} \int_P f(z) dz &= \int_P (u_x - iu_y)(dx + idy) \\ &= \int_P u_x dx + u_y dy - i \int_P u_y dx - u_x dy \\ &= \int \int_T \{(u_y)_x - (u_x)_y\} dx dy + i \int \int_T \{(u_x)_x + (u_y)_y\} dx dy \\ &= i \int \int_T \Delta u dx dy = 0 \end{aligned}$$

であるから，モレラの定理によって f は正則関数である．

[補遺・正誤表] pp. 106 -122

1. 107 ページ上から 6 行目 $\text{rot } X = 0$ は $\text{rot } X = O$ に変更 .
2. 108 ページ上から 7 行目「前定理の系から」は「前々定理 (定理 6.1) の系から」とする .
3. 110 ページ, 証明に入っの 4 行目 (2ヶ所), 8 行目 (6ヶ所), 9 行目 (2ヶ所) の積分変数 z は間違いではないが別の変数 ζ を使うほうが分かりよかつた .
4. 同じ定理の証明の 12 行目以降 — (任意の $z_0 \in G$ をとめる . の後) — , 任意の $\varepsilon > 0$ をとるとき, 正数 ρ を十分小さくとして

$$\overline{\mathbb{D}(z_0, \rho)} \subset G \quad \text{かつ} \quad \max_{\mathbb{D}(z_0, \rho)} |f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon$$

とできる . したがって, (現在の下から 6 行目, 5 行目の式はそのままにして, その最後の項の末尾に) $< \varepsilon$ を追加 . また, 下から 4 行目の文章は前半を削除 .

5. 113 ページ, 上から 10 行目を变形して 11 行目に移るとき, 11 行目の 2 つの $1/2$ は, $[\]$ の外に出ているほうが自然 . (現在の式が誤っているというわけではない .)
6. 114 ページの図の単位円周 C の一部 (太い部分) には記号 $\Gamma(\varepsilon', \varepsilon'')$ を付すのが適切 . また, この図はむしろ 113 ページ (の上部) に置いたほうが読みやすい .
7. 115 ページの脚注 8) の $\delta_G(z)$ は $\delta_G(z_0)$ に置き換える .
8. 117 ページ, 定理 6.12 の証明 1 行目 $f(z)/(z - \zeta)^2$ は $f(\zeta)/(\zeta - z)^2$ に修正 .
9. (118 ページ 6.5 節冒頭において「前節の最後の定理」を用いるために, あらかじめ次の修正を施しておくのがよい .) 117 ページの定理 6.13 の仮定および主張における被積分関数は, それぞれ

$$\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}, \quad \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

ではなく,

$$\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n}, \quad \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \varphi(\zeta), \quad \frac{n \varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

[注意] 118 ページ 6.5 節冒頭の推論を「前節の最後の定理」を用いないで, 定理 6.11 の証明のアイデアを用いて切り抜けることもできる.

10. 118 ページ 6.5 節に入って 3 行目の式の成り立つ範囲は, 定理 6.11 の結果を直接引用すれば $z \in \mathbb{D}(z_0, \rho_0)$ ではなくて $z \in \mathbb{D}(z_0, \rho_0/2)$ であると思われるであろう. その通りである. 実際にはしかし, 半径 $\rho_0/2$ は ρ_0 より真に小さい任意の数として取れることが定理 6.11 の証明から分かる. したがって, 現在のままでも正しい. (無論半径を $\rho_0/2$ に取り替えても以下の議論に支障は無い.)
11. 120 ページ問題 3 の曲線 γ はこれまでの記号で書けば $C(a, a)$ と書かれていたもの.