演習問題略解

■ 第 1 章

1 適当な整数 m をとれば $\beta^{m-1} \leqq |x| < \beta^m$ となる．区間 $[\beta^{m-1}, \beta^m], [-\beta^m, -\beta^{m-1}]$ 内には，β 進 t 桁浮動小数点数が等間隔 β^{m-t} で分布している．$\tilde{x}$ はそのうち x に最も近い浮動小数点数を表すから，x との間隔は $2^{-1}\beta^{m-t}$ をこえない．したがって

$$|x - \tilde{x}| \leqq 2^{-1}\beta^{m-t} = 2^{-1}\beta^{m-1+(1-t)} \leqq 2^{-1} \cdot |x| \cdot \beta^{1-t}.$$

3 $\log T = \log 2\pi + 2^{-1}(\log l - \log g)$．両辺の全微分をとって
$dg/g = dl/l - 2dT/T$．これより，g の相対変化は約 $0.5 + 2 \times 1 = 2.5(\%)$.

4 $V = 3^{-1}\pi(\rho/2)^2 h$（$\rho$: 底円の直径, h : 高さ）の対数をとり，微分すれば

$$|dV/V| \leqq |d\pi/\pi| + 2|d\rho/\rho| + |dh/h|.$$

よって，たとえば，右辺各項をそれぞれ 0.3, 0.3, 0.4% 以内におさえればよい（このとき $|\Delta\pi| < 0.3 \times 10^{-2}\pi$ より $\pi = 3.14$，等）.

5 $(a_{n+k}/a_{n+1}) \leqq (a_{n+2}/a_{n+1})^{k-1}$ に注意.

6 開区間 $(-\pi, \pi)$ において $|180 \times 60 \times 60x/\pi - 180 \times 60 \times 60x/\pi^*| < 1$．すなわち

$$|(\pi - \pi^*)/\pi^*| < \pi/(180 \times 60 \times 60 \times |x|)$$

が成り立てばよいから，$|(\pi - \pi^*)/\pi^*| < (180 \times 60 \times 60)^{-1} = 0.000001\cdots$ ととればよい．したがって $\pi^* = 3.14159$ とおけば十分.

■ 第 2 章

1 どちらも既約.

3 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \ (1 \leqq i \leqq n)$ ならば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は非自明解 $\boldsymbol{x}^* = [1, \cdots, 1]^t$ をもつから，A は正則でない．逆に A が正則でないとすれば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^t \neq \boldsymbol{0}$ がある．このとき $|x_1| = \cdots = |x_n|$ が成り立つ．実際 $|x_k| = \max_i |x_i|$ とし，

$$J = \{j \mid |x_j| = |x_k|\} \ \neq \ N = \{1, 2, \cdots, n\}$$

とおけば，$i \in J$ に対し

$$|a_{ii}|\,|x_i| = |a_{ii}x_i| = \left|-\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\right| \leqq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\,|x_j| \leqq \left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right)|x_i| \leqq |a_{ii}|\,|x_i|$$

ゆえに

$$|a_{ii}|\ |x_i| = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\ |x_j| = \sum_{\substack{j\in J\\ j\neq i}} |a_{ij}|\ |x_j| + \sum_{j\notin J} |a_{ij}|\ |x_j|.$$

ここで $j \notin J \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0$（仮にある $j \notin J$ につき $a_{ij} \neq 0$ ならば $|a_{ij}|\ |x_j| < |a_{ij}|\ |x_i|$ したがって $|a_{ii}|\ |x_i| < \left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right) |x_i|$，ゆえに $|a_{ii}| < \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ となって優対角性に矛盾する.）

これは A が可約であることになり，再び矛盾である．よって $J = N$，すなわち $|x_1| = \cdots = |x_n|$ を得る．次に $x_1, \cdots, x_n$ はすべて同符号であることを示す.

$$a_{ii}x_i = \sum_{j\neq i} (-a_{ij})x_j$$

において一般性を失うことなく $x_i > 0$ とし，ある $j_0 \neq i$ について $x_{j_0} < 0$ と仮定すれば，

$$\tilde{J} = \{k \mid x_k > 0\}$$

とおいて，上と同じ議論を繰り返せば A の優対角性を用いて $j \notin \tilde{J} \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0$ を示すことができる（仮にある $j_0 \notin \tilde{J}$ につき $a_{ij_0} \neq 0$ ならば $-a_{ij_0}x_{j_0} < 0$ よって $-a_{ij_0}x_{j_0} < |a_{ij_0}|\ |x_{j_0}|$ を得て

$$a_{ii}x_i = \sum_{j\neq i} (-a_{ij})x_j < \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\ |x_j| = \left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right) |x_i|$$

これは A の優対角性に矛盾する）.

A は既約と仮定しているからこのようなこと $(j \notin \tilde{J} \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0)$ は起こり得ない．ゆえに $x_j > 0\ (\forall j)$ となって $x_1 = \cdots = x_n$ を得る．したがって $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ から $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0\ (1 \leqq i \leqq n)$ が導かれた.

4 定理 2.5(iii)を $A \geqq |B| \geqq O$ に適用すれば $\rho(A) \geqq \rho(|B|)$.

次に E はすべての要素が 1 の n 次行列とし，ε を正数として $\tilde{B} = |B| + \varepsilon E$ とおく. $\tilde{B}^t$ は正行列であるから，ペロン・フロベニウスの定理によってペロン根 $\lambda^* = \rho(\tilde{B}^t) = \rho(\tilde{B})$ と $\tilde{B}^t\boldsymbol{x} = \lambda^*\boldsymbol{x}$ をみたすペロン ベクトル $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ がある．いま λ を B の任意の固有値とし，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ とすれば $By = \lambda y$ より $|\lambda| \cdot |y| \leqq |B| \cdot |y| \leqq \tilde{B}|y|$

$$\therefore \quad |\lambda|\boldsymbol{x}^t|y| \leqq \boldsymbol{x}^t\tilde{B}|y| = (\tilde{B}^t\boldsymbol{x})^t|y| = \lambda^*\boldsymbol{x}^t|y|$$

$\boldsymbol{x}^t|y| > 0$ に注意して $|\lambda| \leqq \lambda^*$. $\quad \therefore\ \rho(B) \leqq \lambda^*$.

ここで $\varepsilon \to 0$ とすれば $\lambda^* = \rho(\tilde{B}) \ \to \ \rho(|B|)$.
よって $\rho(B) \leqq \rho(|B|)$.

5 仮に A が可約ならば適当な順列行列 P を選んで

$$PAP^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \quad (A_{11} : k \text{ 次正方行列} \quad A_{22} : l \text{ 次正方行列}, \quad k+l = n)$$

とできる．このとき $P(I-A)P^t = \begin{bmatrix} I_k - A_{11} & -A_{12} \\ O & I_l - A_{22} \end{bmatrix}$
したがって

$$\begin{aligned}(I-A)^{-1} &= P^t \begin{bmatrix} I_k - A_{11} & -A_{12} \\ O & I_l - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} P \\ &= P^t \begin{bmatrix} (I_k - A_{11})^{-1} & B \\ O & (I_l - A_{22})^{-1} \end{bmatrix} P\end{aligned}$$

よって $(I-A)^{-1}$ の要素に 0 がある．これは仮定に反する.

6 A は既約であるから $H = \alpha I - A$ も既約である．定理 2.6 により (i) から H は M 行列である．さらに定理 2.9 の証明中に用いた事実（F）により $H^{-1} > O$ となる．逆は定理 2.6 と前問による.

7 $B = I - A$ は既約優対角 L 行列であるから，定理 2.9 により B は M 行列でかつ $B^{-1} > O$ である．したがって定理 2.6 により $\rho(A) < 1$.

8 山本・北川著「数値解析演習」を参照.

■ 第 3 章

1 (i) $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ を 4 頂点とする正方形の内部および境界.
(ii) 単位円の内部と境界.
(iii) $x_1 = \pm 1,\ x_2 = \pm 1$ の 4 本の直線で囲まれる正方形の内部と境界.

4 $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^t$，$\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^t$ とするとき，$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||_p \leqq ||\boldsymbol{x}||_p + ||\boldsymbol{y}||_p$ は次のようにして示される．$p = 1$ のときは明らかであるから $p > 1$ とし，一般化された相加平均と相乗平均の関係

$$\alpha\beta \leqq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q, \qquad \alpha, \beta \geqq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を $\alpha_i = \dfrac{|x_i|}{||\boldsymbol{x}||_p}$，$\beta_i = \dfrac{|y_i|}{||\boldsymbol{y}||_p}$ に適用して i につき辺々加えれば

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqq ||\boldsymbol{x}||_p ||\boldsymbol{y}||_q$$

よって

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p \\
=\ &\sum_{i=1}^{n}|x_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|y_i|(|x_i|+|y_i|^{p-1}) \\
\leqq\ &||\boldsymbol{x}||_p\left\{\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}}+||\boldsymbol{y}||_p\left\{\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
=\ &(||\boldsymbol{x}||_p+||\boldsymbol{y}||_p)\left\{\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

両辺を $\left\{\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right\}^{\frac{1}{q}}$ で割れば求める不等式 $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||_p \leqq ||\boldsymbol{x}||_p+||\boldsymbol{y}||_p$ が得られる.

また，$\max_i |x_i| = |x_k|$ とすれば

$$||x||_\infty = |x_k| \leqq ||x||_p \leqq (n|x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}|x_k| = n^{\frac{1}{p}}||x||_\infty \to ||x||_\infty \quad (p\to\infty)$$

5 $m<n$ のとき

$$||f_m-f_n||_1=\int_0^1|f_m(x)-f_n(x)|dx \leqq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} f_m(x)dx=\frac{1}{2m}\to 0\ (m\to\infty)$$

ゆえに $\{f_n\}$ は $||\cdot||_1$ につきコーシー列をなすが，極限関数 $f^*(x)$ がもしあれば

$$f^*(x)=\begin{cases}1 & (0\leqq x\leqq 1/2)\\ 0 & (1/2<x\leqq 1)\end{cases}$$

でなければならず，$f^*\notin X$ であるから $\{f_n\}$ は X 内の元には収束しない.

■ 第 4 章

1 $||A||_E{}^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}{}^2=\mathrm{trace}(A^tA)=(A^tA$ の固有値の和$)\geqq\rho\,(A^tA)=||A||_2{}^2$

2 単純消去法と部分ピボット選択法は一致し，$\tilde{x}_2=1,\ \tilde{x}_1=0$．一方，完全ピボット選択法による解は $\tilde{x}_1\fallingdotseq 1$，$\tilde{x}_2\fallingdotseq 1-\varepsilon$ となる．真の解は

$$x_1=-\varepsilon(\varepsilon^2-\varepsilon)^{-1}\fallingdotseq 1,\quad x_2=1-\varepsilon x_1\fallingdotseq 1-\varepsilon$$

であるから，後者は良い近似を与える．前 2 者は劣る．

3 $M^{-1}Ny = \lambda y$，$y \neq 0$ とすれば $Ny = \lambda My$．すなわち

$$\{(1-\omega)D - \omega U\}y = \lambda(D + \omega L)y.$$

$\max_i |y_i| = |y_k|$ として，上式の第 k 成分を書き下せば

$$(1-\omega)a_{kk}y_k - \omega\sum_{j>k} a_{kj}y_j = \lambda a_{kk}y_k + \lambda\omega\sum_{j<k} a_{kj}y_j$$

$$(1-\omega-\lambda)a_{kk}y_k = \omega\left(\sum_{j>k} a_{kj}y_j + \lambda\sum_{j<k} a_{kj}y_j\right)$$

ここで，$|\lambda| \geqq 1$ と仮定すれば

$$\begin{aligned}(|\lambda| - |1-\omega|)|a_{kk}|\cdot|y_k| &\leqq \omega|\lambda|\left(\sum_{j>k}|a_{kj}|\ |y_j| + \sum_{j<k}|a_{kj}|\ |y_j|\right)\\ &\leqq \omega|\lambda|\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\ |y_j| < \omega|\lambda|\ |a_{kk}|\ |y_k|,\\ |\lambda| - |1-\omega| &< \omega|\lambda|\end{aligned}$$

ゆえに，$0 < \omega < 1$ のとき $|\lambda|(1-\omega) < 1-\omega$ を得るが，$|\lambda| \geqq 1$ と仮定しているから，これは矛盾である．よって $|\lambda| < 1$，すなわち $\rho(M^{-1}N) < 1$.

5 $R = I - AX^{(0)}$ とおけば，ν に関する帰納法によって，$X^{(\nu)} = A^{-1}(I - R^{2\nu})$

7 補題 4.2 によって A^{-1} は存在し，$A^{-1}R = C - A^{-1}$，両辺のノルムをとれ．

8 $AA^{-1} = I$ より $1 = ||I|| = ||AA^{-1}|| \leqq ||A||\cdot||A^{-1}|| = \mathrm{cond}(A)$.

9 $\mathrm{cond}_\infty(A) = 2n(n+1) \to \infty \quad (n \to \infty)$

10 $\boldsymbol{b}$ を任意のベクトルとして方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．$||\boldsymbol{x}||_\infty = |x_k|$ とすれば

$$|b_k| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\right| \geqq |a_{kk}|\ |x_k| - \sum_{j\neq i}|a_{kj}|\ |x_j| \geqq d_k|x_k|$$

よって $||A^{-1}\boldsymbol{b}||_\infty = ||\boldsymbol{x}||_\infty = |x_k| \leqq d_k^{-1}|b_k| \leqq d^{-1}||\boldsymbol{b}||_\infty$

11 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ をとれば $||A^{-1}||\cdot||A-B||\ ||\boldsymbol{x}|| \geqq ||A^{-1}(A-B)\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$

12 $B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix}$ ととれば $\mathrm{cond}_\infty(A) \geqq 111$

13 $$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= (\boldsymbol{d}^{(\nu)}+\omega(\boldsymbol{f}^{(\nu)}-\boldsymbol{d}^{(\nu)}),\ \boldsymbol{d}^{(\nu)}+\omega(\boldsymbol{f}^{(\nu)}-\boldsymbol{d}^{(\nu)}))\\ &= (\boldsymbol{d}^{(\nu)},\boldsymbol{d}^{(\nu)})+2((\boldsymbol{f}^{(\nu)}-\boldsymbol{d}^{(\nu)}),\ \boldsymbol{d}^{(\nu)})\omega+(\boldsymbol{f}^{(\nu)}-\boldsymbol{d}^{(\nu)},\ \boldsymbol{f}^{(\nu)}-\boldsymbol{d}^{(\nu)})\omega^2\end{aligned}$$

14 (i) $$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{r}) &= (A(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{r})-\boldsymbol{b}, A(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{r})-\boldsymbol{b})\\ &= t^2(A\boldsymbol{r},A\boldsymbol{r})-2t(A\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})+f(\boldsymbol{x})\quad (\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

は $t=(A\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})/(A\boldsymbol{r},A\boldsymbol{r})$ のとき最小で，最小値は

$$f(\boldsymbol{x})-\frac{(A\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})^2}{(A\boldsymbol{r},A\boldsymbol{r})}\leqq f(\boldsymbol{x})$$

(ii) $\boldsymbol{r}^{(\nu+1)}=\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}^{(\nu+1)}$ とおくと

$$\boldsymbol{r}^{(\nu+1)}=\boldsymbol{b}-A(\boldsymbol{x}^{(\nu)}+t_\nu\boldsymbol{r}^{(\nu)})=\boldsymbol{r}^{(\nu)}-t_\nu A\boldsymbol{r}^{(\nu)}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \|\boldsymbol{r}^{(\nu+1)}\|_2{}^2 &= t_\nu^2(A\boldsymbol{r}^{(\nu)},A\boldsymbol{r}^{(\nu)})-2t_\nu(A\boldsymbol{r}^{(\nu)},\boldsymbol{r}^{(\nu)})+(\boldsymbol{r}^{(\nu)},\boldsymbol{r}^{(\nu)})\\ &\leqq t^2(A\boldsymbol{r}^{(\nu)},A\boldsymbol{r}^{(\nu)})-2t(A\boldsymbol{r}^{(\nu)},\boldsymbol{r}^{(\nu)})+(\boldsymbol{r}^{(\nu)},\boldsymbol{r}^{(\nu)}),\quad \forall t\in\boldsymbol{R}\\ &= \|\boldsymbol{r}^{(\nu)}-tA\boldsymbol{r}^{(\nu)}\|_2{}^2=\|(I-tA)\boldsymbol{r}^{(\nu)}\|_2{}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \|\boldsymbol{r}^{(\nu+1)}\|_2 &\leqq \|(I-tA)\boldsymbol{r}^{(\nu)}\|_2\leqq\|I-tA\|_2\cdot\|\boldsymbol{r}^{(\nu)}\|_2\\ &\leqq\cdots\leqq\|I-tA\|_2^{\nu+1}\|\boldsymbol{r}^{(0)}\|_2\end{aligned}$$

一方

$$\boldsymbol{r}^{(\nu)}=\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}^{(\nu)}=A(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}^{(\nu)})$$

よって

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}^{(\nu)}\|_2 &= \|A^{-1}\boldsymbol{r}^{(\nu)}\|_2\\ &\leqq \|A^{-1}\|_2\cdot\|\boldsymbol{r}^{(\nu)}\|_2\leqq\|A^{-1}\|_2\cdot\|I-tA\|_2{}^\nu\|\boldsymbol{r}^{(0)}\|_2,\quad\forall t\in\boldsymbol{R}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\min_t\|I-tA\|_2 &= \min_t\max_i|1-t\lambda_i|\quad(\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_n>0\text{ は }A\text{ の固有値})\\ &= \left|1-\frac{2\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}\right|=\frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}\quad\left(t=\frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}\text{のとき最小}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ（各自検証せよ）．

15 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}^{(0)}$ とおけば

$$\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}^{(0)}=A^{-1}\boldsymbol{r}=(I-K)^{-1}L\boldsymbol{r}$$

よって

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(0)}| &\leqq |(I-K)^{-1}| \cdot |L\boldsymbol{r}| = (I + |K| + |K|^2 + \cdots)\boldsymbol{\varepsilon} \\
&\leqq \boldsymbol{\varepsilon} + ||\boldsymbol{\varepsilon}||\boldsymbol{\kappa} + ||\,|K|\,\boldsymbol{\varepsilon}||\boldsymbol{\kappa} + \cdots \\
&\leqq \boldsymbol{\varepsilon} + (||\boldsymbol{\varepsilon}|| + ||\boldsymbol{\varepsilon}|| \cdot ||\boldsymbol{\kappa}|| + \cdots)\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\varepsilon} + a\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\alpha}
\end{aligned}
$$

したがって

$$|x_i^* - x_i^{(0)}| \leqq \alpha_i, \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

さらに

$$\boldsymbol{\alpha}^{(0)} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha}^{(\nu+1)} = \boldsymbol{\varepsilon} + |K|\boldsymbol{\alpha}^{(\nu)}, \quad \nu \geqq 0$$

とおけば，ν に関する帰納法によって

$$\boldsymbol{\alpha}^{(\nu)} \geqq \boldsymbol{\alpha}^{(\nu+1)} \geqq \boldsymbol{\alpha}^* = (I - |K|)^{-1}\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

を示すことができる.

■ 第 5 章

1 ν に関する帰納法により

$$
\begin{aligned}
|x_\nu - x_0| \leqq |g(x_{\nu-1}) - x_0| &\leqq |g(x_{\nu-1}) - g(x_0)| + |g(x_0) - x_0| \\
&\leqq \lambda|x_{\nu-1} - x_0| + (1-\lambda)d \leqq \lambda d + (1-\lambda)d = d
\end{aligned}
$$

2 0.63556400

3 -1.463

8 $p = q = 5/9$，$r = -9^{-1}$，$x_{\nu+1} - \sqrt[3]{a} \fallingdotseq (5/3)a^{-2/3}(x_\nu - \sqrt[3]{a})^3$

9 ν に関する帰納法により (ii) を示せば (i) も従う．(iii) は定理 6.3 参照.

10 (i)
$$
\begin{aligned}
x_\nu - \alpha = g(x_{\nu-1}) - g(\alpha) &= g'(\xi)(x_{\nu-1} - \alpha) \\
&= g'(\xi)(x_{\nu-1} - x_\nu) + g'(\xi)(x_\nu - \alpha)
\end{aligned}
$$

よって $(1 - g'(\xi))(x_\nu - \alpha) = g'(\xi)(x_{\nu-1} - x_\nu)$

(ii) (b) $g'(x) = -(x-1)^3$ に注意.

(iii) (a) $f(x_4)f(x_5) < 0$

11 グラフを考えよ.

■ 第 6 章

1 第 5 章演習問題 1 と同様.

2 (ii) $x = 0.45$，$y = -3.81$

3 コーシー・リーマン（Riemann）の関係式を用いよ．

5 計算機内で表現できる浮動小数点数は高々有限個．したがって，相異なる n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ も高々有限個しかない．

6 (i) $\boldsymbol{z} = \theta\boldsymbol{x} + (1-\theta)\boldsymbol{y}$ とおく．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \geqq J(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{D})$ のとき

$$\begin{aligned}\theta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (1-\theta)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) &= \theta(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})) + (1-\theta)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}))\\ &\geqq J(\boldsymbol{z})\{\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) + (1-\theta)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\} = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

逆に, $\boldsymbol{f}$ が $\mathscr{D}$ 上, 下に凸, すなわち $\theta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (1-\theta)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \geqq f(\boldsymbol{z})$ $(0 < \theta < 1)$ をみたすならば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) &\geqq \theta^{-1}\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\}\\ &= \theta^{-1}J(\boldsymbol{y} + \tilde{\theta}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}) \quad (0 < \tilde{\theta} < 1)\\ &= J(\boldsymbol{y} + \tilde{\theta}\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \to J(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

(ii) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(1)}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(0)}) \geqq J(\boldsymbol{x}^{(0)})(\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(0)})$ より $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(1)}) \geqq \boldsymbol{0}$. ゆえに，$J(\boldsymbol{x}^{(1)})^{-1} \geqq \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \geqq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(1)}) + J(\boldsymbol{x}^{(1)})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}^{(1)})$ より

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}^{(1)} \leqq -J(\boldsymbol{x}^{(1)})^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(1)}) \leqq 0.$$

以下，帰納法によって，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(\nu)}) \geqq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a} \leqq \boldsymbol{x}^{(\nu)}$ がいえて

$$\boldsymbol{x}^{(\nu+1)} = \boldsymbol{x}^{(\nu)} - J(\boldsymbol{x}^{(\nu)})^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(\nu)}) \leqq \boldsymbol{x}^{(\nu)}.$$

(iii) 同様.

■ 第 7 章

3 α はコンパニオン行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & \ddots & & & -a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

の固有値である．また，$a_n = 0$ のとき右側の不等式は明らかだから $a_n \neq 0$．したがって $\alpha \neq 0$ としてよく，このとき α^{-1} は $g(x) = x^n + (a_{n-1}/a_n)x^{n-1} + \cdots +$

$(a_1/a_n)x + a_n^{-1} = 0$ の根.

4 $\lambda_1 = 2.4812$

5 $S^{-1}AS = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_s & \\ & & & B \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (n_i\text{次}),$

$$1 \leqq i \leqq s, \quad n_1 + \cdots + n_s = m$$

とすれば

$$\boldsymbol{x}^{(\nu)} = A^\nu \boldsymbol{x}^{(0)} = SJ^\nu S^{-1}\boldsymbol{x}^{(0)} = S \begin{bmatrix} J_1^\nu & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_s^\nu & \\ & & & B^\nu \end{bmatrix} S^{-1}\boldsymbol{x}^{(0)},$$

$\max(n_1, \cdots, n_s) = N = n_1 = \cdots = n_t$ かつ $\lambda = \lambda_1$ とするとき，定理 2.3 の証明における ${J_i}^\nu$ の形から，$\nu \to \infty$ のとき

$$\frac{{J_i}^\nu}{\nu^{N-1}\lambda^\nu} \ \to \ \lambda^{-N+1} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} (\equiv \lambda^{-N+1}E \text{ とおく}),$$

$$\frac{\boldsymbol{x}^{(\nu)}}{\nu^{N-1}\lambda^\nu} \ \to \ S \begin{bmatrix} \lambda^{-N+1}E & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda^{-N+1}E & \\ & & & O \end{bmatrix} S^{-1}\boldsymbol{x}^{(0)} \quad (= \boldsymbol{a} \text{ とおく})$$

よって

$$\boldsymbol{x}^{(\nu)} = \nu^{N-1}\lambda^{\nu-N+1} S \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} E & & \\ & \ddots & \\ & & E \end{matrix}}^{t} & \\ & \begin{matrix} O & & \\ & \ddots & \\ & & O \end{matrix} \end{bmatrix} S^{-1}\boldsymbol{x}^{(0)} + o(\nu^{N-1}\lambda^\nu),$$

$$\frac{x_i^{(\nu)}}{{x_i}^{(\nu-1)}} \ \to \lambda \ (\nu \to \infty) \quad (a_i \neq 0 \text{ のとき})$$

さらに $J_iE = \lambda E$ $(1 \leqq i \leqq t)$ に注意して $A\boldsymbol{a} = SJS^{-1}\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$ を得るから $\boldsymbol{a} \in U$（λの固有空間）で

$$\frac{\boldsymbol{x}^{(\nu)}}{\nu^{N-1}\lambda^\nu} \to \ \boldsymbol{a} \in U, \quad \frac{\boldsymbol{x}^{(\nu)}}{\lambda^\nu} \ \to \ \nu^{N-1}\boldsymbol{a} \in U$$

7 $||\boldsymbol{x}||_2 = 1$ なる $\boldsymbol{x}$ に対し $\lambda_{\max} \geqq (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq \lambda_{\min}$，特に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$（第 i 成分のみ 1,

他は 0 のベクトル）ととれば $\lambda_{\max} \geqq a_{ii} \geqq \lambda_{\min}$.

8 第 4 章演習問題 6 において，A が正値対称ならば $a_i = c_i$ かつ $b_i > 0$ で

$$\det A_k \ (k\text{ 次主小行列式}) = r_1 \cdots r_k > 0 \quad \text{ゆえに} \quad r_k > 0 \ (1 \leqq k \leqq n)$$

また r_k の漸化式により $r_k = b_k - {a_{k-1}}^2/r_{k-1} \leqq b_k$. 次に A_k の固有値を ${\lambda_1}^{(k)} \geqq \cdots \geqq {\lambda_k}^{(k)}$ とすれば，A_k の正値性により ${\lambda_k}^{(k)} > 0$. よって分離定理を用いて

$$\begin{aligned} r_k = \frac{r_1 \cdots r_{k-1} r_k}{r_1 \cdots r_{k-1}} &= \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}} = \frac{{\lambda_1}^{(k)} \cdots {\lambda_k}^{(k)}}{{\lambda_1}^{(k-1)} \cdots {\lambda_{k-1}}^{(k-1)}} \\ &= \left(\frac{{\lambda_1}^{(k)}}{{\lambda_1}^{(k-1)}}\right) \cdots \left(\frac{{\lambda_{k-1}}^{(k)}}{{\lambda_{k-1}}^{(k-1)}}\right) {\lambda_k}^{(k)} \\ &\geqq {\lambda_k}^{(k)} \geqq {\lambda_n}^{(n)} = \lambda_{\min} \end{aligned}$$

9 $D = \mathrm{diag}(1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1})$ とおき，$D^{-1}BD$ をつくれ.

11 λ は $V^{-1}(A+E)V$ の固有値であるから，固有ベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在して

$$V^{-1}(A+E)V\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \quad (\lambda I - V^{-1}AV)\boldsymbol{x} = V^{-1}EV\boldsymbol{x}$$

$$\begin{aligned} \min|\lambda - \lambda_i| \cdot ||\boldsymbol{x}||_2 \leqq ||(\lambda I - V^{-1}AV)\boldsymbol{x}||_2 &= ||V^{-1}EV\boldsymbol{x}||_2 \\ &\leqq ||V^{-1}||_2 \cdot ||V||_2 \cdot ||E||_2 \cdot ||\boldsymbol{x}||_2 \end{aligned}$$

■ 第 8 章

1 $|{J_0}^{(k)}(x)| \leqq 1 \ (k \geqq 0)$ に注意して $|p_n(x) - J_0(x)| \leqq 1/(n+1)!$.

2 定理 8.5〜8.7 を適用する.

3 $u = x_0 + t_1(x_1 - x_0) + \cdots + t_n(x_n - x_{n-1}) + t(x - x_n)$ とおけば

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x] \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} \int_0^{t_n} f^{(n+1)}(u)\,dt\,dt_{n-1} \cdots dt_2\,dt_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} \int_0^{t_n} t f^{(n+2)}(u)\,dt\,dt_{n-1} \cdots dt_2\,dt_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} \int_0^{t_n} \int_0^{t} f^{(n+2)}(u)\,ds\,dt\,dt_{n-1} \cdots dt_2\,dt_1 \\ &= f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x, x] \end{aligned}$$

4
$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},$$
$$\psi_j(y) = \frac{(y-y_0)\cdots(y-y_{j-1})(y-y_{j+1})\cdots(y-y_m)}{(y_j-y_0)\cdots(y_j-y_{j-1})(y_j-y_{j+1})\cdots(y_j-y_m)}$$

とおけば $\varphi_i(x_k) = \delta_{ik}$，$\psi_j(y_l) = \delta_{jl}$．よって

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y)$$

とおけばよい．

5 $\boldsymbol{c} = [c_1,\cdots,c_n]^t \neq [0,\cdots,0]^t$ とおけば，$\{\varphi_i\}$ の 1 次独立性によって

$$(A\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_ic_j = \sum_{i,j=1}^{n}(\varphi_i,\varphi_j)c_ic_j = \left(\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i,\ \sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j\right) > 0$$

逆に，A が正値ならば任意の $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ に対して $(A\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}) > 0$．ゆえに $\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i \neq 0$.

6 $\varPhi(c_1,\cdots,c_n) = \left\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\|_2^{\ 2}$ とおけば

$$\varPhi = (f,f) - 2\sum f_ic_i + \sum a_{ij}c_ic_j$$

$\varPhi$ を最小にする $c_1,\cdots,c_n$ は $\partial\varPhi/\partial c_i = 2\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j - f_i\right) = 0$ をみたす．逆に
この方程式の解 $c_1,\cdots,c_n$ に対し $g = f - \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j$ とおけば $(\varphi_i, g) = 0$.
一方，$d_1,\cdots,d_n$ を任意の定数として，$h = f - \sum d_j\varphi_j$ とおけば $(h-g,g) = 0$.
よって

$$||h||^2 = ||(h-g)+g||^2 = ||h-g||^2 + ||g||^2 \geqq ||g||^2.$$

等号は $h = g$，すなわち $d_j = c_j$ のときに限る．

7 連立方程式は $\partial S/\partial c_j = 0$ $(1 \leqq j \leqq n)$ よりでる．係数行列が正値対称であることも前々問と同様にしてわかるから，解 $c_1,\cdots,c_n$ は一意に定まる．このとき，$\sum c_jx^j$ が題意に適することも前問と同様．

8 $R_t = 119.86(1 + 0.00426t)$

9 任意の実数 α につき，$(x-\alpha)p_n$ は $n+1$ 次多項式で x^{n+1} の係数は 1.

$$\therefore\ (x-\alpha)p_n = p_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} c_i p_i, \quad ((x-\alpha)p_n, p_j) = (p_{n+1}, p_j) + \sum_{i=0}^{n} c_i (p_i, p_j)$$

これより $c_0 = \cdots = c_{n-2} = 0$ を得る．いま，$\alpha_n = \alpha + c_n$，$\beta_{n-1} = c_{n-1}$ とおけば

$$p_{n+1} = (x-\alpha_n)p_n - \beta_{n-1}p_{n-1}$$

$(p_{n+1}, p_n) = 0$，$(p_{n+1}, p_{n-1}) = 0$ により α_n，β_{n-1} を決定せよ．
次に，p_n と p_{n-1} とが共通根 x^* をもてば

$$p_n(x^*) = (x^* - \alpha_{n-1})p_{n-1}(x^*) - \beta_{n-2}p_{n-2}(x^*)$$

より $p_{n-2}(x^*) = 0$．以下これを繰り返して $p_0(x^*) = 0$．これは矛盾．

10 (i) $P_{k+1} - (2k+1)/(k+1) \cdot xP_k$ は $k-1$ 次多項式であることをまず導け．次に

$$(k+1)P_{k+1} - (2k+1)xP_k = \alpha P_{k-1} + q(x) \quad (q : k-2 \text{ 次})$$

とおけば

$$(q,q) = (k+1)(P_{k+1}, q) - (2k+1)(xP_k, q) - \alpha(P_{k-1}, q) = 0, \quad q = 0$$

さらに $x = 1$ とおいて

$$(k+1) - (2k+1) = \alpha \quad (P_k(1) = 1\ (k \geqq 0) \text{ に注意})$$

(ii)
$$\begin{aligned} b_k P_k &= a_k P_k + (2k+1)/(k+1) \cdot x b_{k+1} P_k - (k+1)/(k+2) \cdot b_{k+2} P_k \\ &= a_k P_k + b_{k+1}[P_{k+1} + k/(k+1) \cdot P_{k-1}] - (k+1)/(k+2) \cdot b_{k+2} P_k \\ a_k P_k &= (b_k P_k - b_{k+1} P_{k+1}) \\ &\qquad + ((k+1)/(k+2) \cdot b_{k+2} P_k - k/(k+1) \cdot b_{k+1} P_{k-1}) \\ \sum_{k=1}^{n} a_k P_k &= b_1 P_1 - b_{n+1} P_{n+1} + ((n+1)/(n+2) \cdot b_{n+2} P_n - 1/2 \cdot b_2 P_0) \\ &= b_1 P_1 - (1/2) b_2 P_0 \end{aligned}$$

$p_0 = 1$，$p_1 = x$ より結局

$$a_0 P_0 + a_1 P_1 + \cdots + a_n P_n = b_1 x - 2^{-1} b_2 + a_0 = b_0.$$

■ 第 9 章

1 $P(x)$ として $1, x, \cdots, x^n$ を考えよ．

2 $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \pi/2$, $\alpha_3 = \pi/4$, $I \fallingdotseq 2.6233$.

4 $f(x) = (x - x_1)^2 \cdots (x - x_{k-1})^2 (x - x_{k+1})^2 \cdots (x - x_n)^2$ とおけば f は $2n-2$ 次の多項式であるから $E_n{}^*(f) = 0$．よって

$$0 < \int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j{}^* f_j = \alpha_k{}^* \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i)^2, \quad \alpha_k{}^* > 0$$

また $E_n{}^*(\,1\,) = 0$ により $0 < \sum_{j=1}^{n} \alpha_j{}^* = \int_a^b w(x)dx < \infty$.

5 $h = (b-a)/(2^k N)$ とおく．

$$\begin{aligned} I(f) &= T_{k-1}{}^{(j)}(f) + c_{j+1}{}^{(j)}(2h)^{2j+2} + \cdots + c_M{}^{(j)}(2h)^{2M} + o((2h)^{2M}) \\ &= T_k{}^{(j)}(f) + c_{j+1}{}^{(j)} h^{2j+2} + \cdots + c_M{}^{(j)} h^{2M} + o(h^{2M}) \\ &= T_{k+1}{}^{(j)}(f) + c_{j+1}{}^{(j)} \left(\frac{h}{2}\right)^{2j+2} + \cdots + c_M{}^{(j)} \left(\frac{h}{2}\right)^{2M} + o\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{2M}\right) \end{aligned}$$

ゆえに $c_{j+1}{}^{(j)} \neq 0$ なら，$k \geqq 1$ のとき

$$r_k{}^{(j)} \equiv \frac{T_k{}^{(j)}(f) - T_{k-1}{}^{(j)}(f)}{T_{k+1}{}^{(j)}(f) - T_k{}^{(j)}(f)} \fallingdotseq \frac{c_{j+1}{}^{(j)} h^{2j+2}(4^{j+1}-1)}{c_{j+1}{}^{(j)} h^{2j+2}(1-4^{-j-1})} = 4^{j+1}$$

6 閉型公式に対して示す．$h = (b-a)/(Nm)$, $x_i = a + ih$ $(0 \leqq i \leqq Nm)$ とおき，N 個の小区間 $I_k = [x_{km}, x_{(k+1)m}]$ $(0 \leqq k \leqq N-1)$ に公式 Q を適用すれば $Q(f) = \sum_{j=0}^{m} c_j f(x_{km+j})$, $c_j = hw_j$　（w_j は m のみに依存し h に無関係）

$$\begin{aligned} (N \times Q)(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{m} hw_j f(x_{km+j}) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} w_j \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(x_j + \frac{b-a}{N}k\right) \\ &\to \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} w_j \int_a^b f(x)dx = \left(\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} w_j\right) \int_a^b f(x)dx \quad (N \to \infty) \end{aligned}$$

Q は少なくとも 0 次の精度をもつから

$$mh = x_m - x_0 = \int_{x_0}^{x_m} dx = \sum_{j=0}^{m} c_j = \sum_{j=0}^{m} hw_j, \quad \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} w_j = 1$$

10 台形公式の誤差は $F^{(k)}(x) = f^{(k-1)}(x)$ に注意して

$$\int_a^b f(t)dt \;=\; F(x_0+2h) \quad \left(h=\frac{b-a}{2},\ x_0=a,\ F(x)=\int_{x_0}^x f(t)dt\right)$$
$$=\; 2hf_0+\frac{(2h)^2}{2!}f_0'+\frac{(2h)^3}{3!}f_0''+\frac{(2h)^4}{4!}f_0'''+\cdots$$

$$f_2=f(x_0+2h)=f_0+2hf_0'+\frac{(2h)^2}{2!}f_0''+\frac{(2h)^3}{3!}f_0'''+\cdots$$

よって，$h=(b-a)/(2n)$，$x_i=a+ih$ として

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx-h(f_{2i-2}+f_{2i})$$
$$=-\frac{2}{3}h^3 {f_{2i-2}}^{(2)}-\frac{2}{3}h^4 {f_{2i-2}}^{(3)}-\frac{2}{5}h^5 {f_{2i-2}}^{(4)}-\cdots$$
$${f_{2i}}'={f_{2i-2}}'+2h{f_{2i-2}}''+\frac{(2h)^2}{2}{f_{2i-2}}^{(3)}+\cdots$$
$$\frac{h^2}{3}({f_{2i}}'-{f_{2i-2}}')=\frac{2}{3}h^3{f_{2i-2}}''+\frac{2}{3}h^4{f_{2i-2}}^{(3)}+\frac{4}{9}h^5{f_{2i-2}}^{(4)}+\cdots$$
$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx-h(f_{2i-2}+f_{2i})+\frac{h^2}{3}({f_{2i}}'-{f_{2i-2}}')=\frac{2}{45}h^5{f_{2i-2}}^{(4)}+\cdots$$
$$\int_a^b f(x)dx$$
$$=h(f_0+f_{2n})+2h\sum_{j=1}^{n-1}f_{2j}-\frac{h^2}{3}(f'(b)-f'(a))+\frac{2}{45}h^5\sum_{i=1}^{n}{f_{2i-2}}^{(4)}+\cdots$$
$$=h(f_0+f_{2n})+2h\sum_{j=1}^{n-1}f_{2j}-\frac{h^2}{3}(f'(b)-f'(a))+\frac{1}{45}h^4(f'''(b)-f'''(a))+\cdots$$

11 $x=x_0+th$ とおけば

$$c_j \;=\; \int_a^b \prod_{i\neq j}\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)dx$$
$$=\; (-1)^{n-j}\frac{h}{n!}\binom{n}{j}\int_{(a-x_0)/h}^{(b-x_0)/h}\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-j}dt$$
$$c_{n-j} \;=\; (-1)^j\frac{h}{n!}\binom{n}{n-j}\int_{(a-x_0)/h}^{(b-x_0)/h}\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-(n-j)}dt$$
$$=\; (-1)^j\frac{h}{n!}\binom{n}{j}\int_\alpha^\beta\frac{(n-s)(n-s-1)\cdots(-s)}{-s+j}(-ds) \quad (t-n=-s)$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha = n - \dfrac{a-x_0}{h} = \dfrac{x_n - a}{h} = \dfrac{b-x_0}{h} \\ \beta = n - \dfrac{b-x_0}{h} = \dfrac{x_n-b}{h} = \dfrac{a-x_0}{h} \qquad (\because\ x_n + x_0 = a+b) \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^j(-1)^{n+1}\frac{h}{n!}\binom{n}{j}\int_\alpha^\beta \frac{s(s-1)\cdots(s-n)}{s-j}ds \\ &= (-1)^j(-1)^{n+2}\frac{h}{n!}\binom{n}{j}\int_\beta^\alpha \frac{s(s-1)\cdots(s-n)}{s-j}ds \\ &= (-1)^{n-j}\frac{h}{n!}\binom{n}{j}\int_\beta^\alpha \frac{s(s-1)\cdots(s-n)}{s-j}ds = c_j. \end{aligned}$$

■ 第 10 章

1

$$\begin{aligned} \tau(x,h) = h^{-1}&(1-\alpha_0-\cdots-\alpha_{N-1})y(x) + Ny'(\xi_N) \\ &-(N-1)\alpha_{N-1}y'(\xi_{N-1}) - \cdots - \alpha_1 y'(\xi_1) \\ &-\Phi(x,\cdots,x+Nh,y(x),\cdots,y(x+Nh)\ ;\ h), \end{aligned}$$

$$\xi_i = x + i\theta_i h, \quad 0 < \theta_i < 1 \qquad (*)$$

とかけるから，$y \not\equiv 0$ のとき $\lim_{h\to 0}\tau(h) = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{h\to 0}\tau(x,h) = 0\ \Rightarrow$(i)，(ii)
逆に，(i)，(ii)が成り立つとすれば（$*$）より

$$\begin{aligned} \tau(x,h) &= Ny'(\xi_N) - (N-1)\alpha_{N-1}y'(\xi_{N-1}) - \cdots - \alpha_1 y'(\xi_1) \\ &\quad -\Phi(x,\cdots,y(x+Nh)\ ;\ h) \\ &= N(y'(\xi_N) - y'(x)) - \sum_{k=1}^{N-1} k(y'(\xi_k) - y'(x)) \\ &\quad -\{\Phi(x,\cdots,x+Nh,y(x),\cdots,y(x+Nh)\ ;\ h) \\ &\qquad\qquad -\Phi(x,\cdots,x,y(x),\cdots y(x);0)\} \end{aligned}$$

連続関数 y', Φ は閉区間 $[a,b]$ で一様連続だから，$h \to 0$ のとき，一様に $\tau(x,h) \to 0$
すなわち $\tau(h) \to 0\ (h \to 0)$.

2 Euler 法においては

$$|\tau(x,h)| \leqq \frac{h}{2}|f'(\xi,y(\xi))| = \left|\frac{h}{2}\{1+\cos y(\xi)(\xi+\sin y(\xi))\}\right| \leqq \frac{3}{2}h$$

また $|f(x,y) - f(x,z)| \leqq |y-z|$．ゆえに定理 10.2 の証明より

$$|e_i| \leqq \frac{A}{K}h(e^{L(1-0)-1}) = \frac{3}{2}h(e-1) < 2^{-1} \times 10^{-2},$$

$$h < (3(e-1))^{-1} \cdot 10^{-2} = 0.002\cdots$$

3 $e_j = y(x_j) - Y_j$，$\bar{e}_j = e_j/h$ として，$\bar{e}_{j+1} = \bar{e}_j + hg(x_j, \bar{e}_j) + h^2 r_j$ を導け．ただし，$g(x,e) = f_y(x,y)\bar{e} + 2^{-1}y''(x)$，$r_j = f_{yy}(x,\eta)(e_j)^2 + (1/3!)y^{(3)}(\xi)$ である．上式は $e'(x) = g(x,e)$，$e(0) = 0$ に対する Euler 法（各ステップの丸め誤差 $h^2 r_j = O(h^2)$）であるから，定理 10.3 により

$$|e(x_j) - \bar{e}_j| \leqq \frac{1}{K}\left(Ah + \frac{O(h^2)}{h}\right)(e^{K(b-a)} - 1) = O(h)$$

よって $(y(x_j) - Y_j)/h = \bar{e}_j = e(x_j) + O(h)$，$y(x_j) = Y_j + e(x_j)h + O(h^2)$

5 $\alpha = 28$，$\beta = 12$，$\gamma = 48$，不安定．

6 (i) $y(x) = e^x$，　$Y_{i+1} = \left(1 + h + \dfrac{h^2}{2}\right)^{i+1} \fallingdotseq e^{h(i+1)} = e^{x_{i+1}}$

(ii) $y(x) = e^{-10x}$，　$Y_{i+1} = \left(1 - 10h + \dfrac{(10h)^2}{2}\right)^{i+1}$

$h > 0.2$ なら $1 - 10h + 50h^2 > 1$．このとき $Y_i \to \infty$ $(i \to \infty)$.

7 $Y_{i+1} = \left(1 - 10h + 50h^2 - \dfrac{500}{3}h^3 + \dfrac{1250}{3}h^4\right)^{i+1}$

よって，$h > 0.27853$ $\left(-10 + 50x - \dfrac{500}{3}x^2 + \dfrac{1250}{3}x^3 = 0 \text{ の正根}\right)$ なら同様の現象が起こる．

10 $x_i = c_1 + c_2 i - i^2/2$ が一般解．$x_0 = x_{n+1} = 0$ より c_1, c_2 を定めよ．

11 $y' = 9x + 3y$, $y(x_0) = y_0$ の解は $y = -3x - 1 + (3x_0 + y_0 + 1)e^{3x}$．よって，ある x_0 において，計算誤差のために $3x_0 + y_0 + 1 \neq 0$ となれば，以後数値解は真の解 $y = -3x - 1$ から急激に離れていく．

12 $Y_{j+1} - Y_j = (h/2)(AY_j + AY_{j+1})$，$(I - (h/2)A)Y_{j+1} = (I + (h/2)A)Y_j$，$Y_{j+1} = (I - (h/2)A)^{-1}(I + (h/2)A)Y_j$，$A$ は負値だから

$$\rho = \rho\{(I - (h/2)A)^{-1}(I + (h/2)A)\} < 1.$$

よって

$$||Y_{j+1}||_2 \leqq \rho||Y_j||_2 \leqq \cdots \leqq \rho^j||Y_0||_2 \to 0 \quad (j \to \infty), \quad ||Y_{j+1}||_2 < ||Y_j||_2$$

■ 第 11 章

4 $r_i = ih$，$\theta_j = j\Delta\theta$，$u_{ij} = (r_i, \theta_j)$ として

$$\frac{u_{i+1\,j}-2u_{i\,j}+u_{i-1\,j}}{h^2}+\frac{(ih)^{-1}(u_{i+1\,j}-u_{i-1\,j})}{2h}+\frac{(ih)^{-2}(u_{i\,j+1}-2u_{ij}+u_{i\,j-1})}{(\varDelta\theta)^2}=0.$$

これを整理して

$$(1-(2i)^{-1})u_{i-1\,j}+(1+(2i)^{-1})u_{i+1\,j}-2\{1+(i\varDelta\theta)^{-2}\}u_{ij}+(i\varDelta\theta)^{-2}u_{i\,j-1}+(i\varDelta\theta)^{-2}u_{i\,j+1}=0.$$

5 $2r \leqq (1-\theta)/(1+\theta)$

6 $u(0.4,\ 0.2)=0.30$

7 (i) $O(k)$ (ii) $0<r\leqq 2$ のとき安定，$r>2$ のとき不安定.

8 $U_{i\,j+1}=U_{ij}+k(2h^2)^{-1}({U_{i+1\,j}}^2-2{U_{ij}}^2+{U_{i-1\,j}}^2)$

9 $nh=1$ とおき，微分方程式を陽型公式により近似すれば，

$$k^{-1}(U_{i\,j+1}-U_{ij})=h^{-2}(U_{i-1\,j}-2U_{ij}+U_{i+1\,j}).$$

境界条件を中心差分近似して

$$(2h)^{-1}(U_{1j}-U_{-1j})=a_1(U_{0j}-c_1),\ (2h)^{-1}(U_{n+1\,j}-U_{n-1\,j})=-a_2(U_{nj}-c_2).$$

これらより U_{-1j}，$U_{n+1\,j}$ を消去すれば，$r=k/h^2$ とし

$$\begin{bmatrix} U_{0\,j+1}\\ U_{1\,j+1}\\ \vdots\\ U_{n-1\,j+1}\\ U_{n\,j+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \{1-2r(1+a_1h)\} & 2r & & & \\ r & (1-2r) & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & (1-2r) & r\\ & & & 2r & \{1-2r(1+a_2h)\}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} U_{0j}\\ U_{1j}\\ \vdots\\ U_{n-1\,j}\\ U_{nj}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2ra_1c_1h\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 2ra_2c_2h\end{bmatrix}$$

係数行列を A とすれば A は対称行列に相似（命題 F.1 の証明参照）．よって安定条件は $\rho\,(A)\leqq 1$． $1-2r\,(1+a_1h)\geqq 0$ かつ $1-2r\,(1+a_2h)\geqq 0$ のとき $\rho\,(A)\leqq ||A||_\infty\leqq 1$.

■ 第 12 章

1 E_j の頂点を $\mathrm{P}_i(x_i, y_i), \mathrm{P}_k(x_k, y_k), \mathrm{P}_l(x_l, y_l)$（右手系）とすれば

$$a_j{}^{(i)} = \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_l & y_l \end{vmatrix} / \{2(E_j\text{の面積})\},\ \text{等}.$$

2 (i) 必要性．y が解なら

$$\begin{aligned} & F(u) - F(y) \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(u'^2 - y'^2) + f(x,u) - f(x,y) \right\} dx + p(u(1)) - p(y(1)) \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(u'-y')^2 + (u'y' - y'^2) + (u-y) f_u(x,y) + \frac{1}{2}(u-y)^2 f_{uu}(x,\xi) \right\} dx \\ &\qquad + p'(y(1))(u(1)-y(1)) + p''(\eta)\{(u(1)-y(1))/2\}^2 \\ &\geqq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'-y')^2 dx + \int_0^1 \{(u'y' - y'^2) + (u-y) f_u(x,y)\} dx \\ &\qquad - y'(1)(u(1) - y(1)) \end{aligned}$$

部分積分により $\displaystyle\int_0^1 u'y'dx = u(1)y'(1) - \int_0^1 u f_u(x,y) dx,$

$$\int_0^1 y'^2 dx = y(1)y'(1) - \int_0^1 y f_u(x,y) dx.$$

$$F(u) - F(y) \geqq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'-y')^2 dx > 0$$

$(u(0) = y(0) = 0$, $u \not\equiv y$ なら $u' \not\equiv y')$

(ii) 十分性．$\min\{F(u)\ ;\ u \in \mathscr{D}\} = F(\varphi)$ とすると，任意の正数 ε と $v \in \mathscr{D}$ に対し

$$\begin{aligned} F(\varphi + \varepsilon v) &= F(\varphi) + \varepsilon \left[\int_0^1 (\varphi' v' + v f_u(x,\varphi)) dx + v(1) p'(\varphi(1)) \right] \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{2} v'^2 + f_{uu}(x,\xi) \frac{v^2}{2} \right) dx + \frac{1}{2} v(1)^2 p''(\eta) \right] \geqq F(\varphi) \end{aligned}$$

よって，任意の v につき

$$\int_0^1 (\varphi' v' + v f_u(x,\varphi)) dx + v(1) p'(\varphi(1)) = 0$$

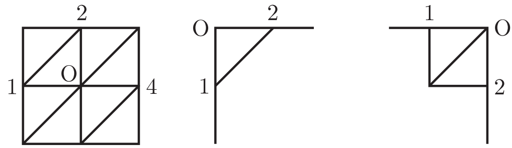
$$\int_0^1 v(f_u(x,\varphi) - \varphi'') dx + v(1)(p'(\varphi(1)) + \varphi'(1)) = 0 \quad \text{（部分積分による）}$$

これより $f_u(x,\varphi) = \varphi''$，$p'(\varphi(1)) + \varphi'(1) = 0$ を得る．

3 f, f' をそれぞれ sin 級数，cos 級数に展開し，Parseval（パーセバル）の等式を用いる．

4 $f = \dfrac{1}{2}\left\{\displaystyle\int_a^x f'\,dt - \int_x^b f'\,dt\right\}$ とかき，コーシー・シュワルツの不等式を適用する.

5 下図 A の点 O において $4\alpha_0 - \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = h^2(f, \varphi_0)$．角のパターンは下図 B，C の 2 種がある．B のところでは $\alpha_0 - 2^{-1}\alpha_1 - 2^{-1}\alpha_2 = 6^{-1}h^2(f, \varphi_0)$，C のところでは $\alpha_0 - 2^{-1}\alpha_1 - 2^{-1}\alpha_2 = 3^{-1}h^2(f, \varphi_0)$.



A　　B　　C

6 仮にある $\varphi \in S$ につき $[\varphi^* - u,\ \varphi] \neq 0$ とすれば

$$[\varphi^* - u,\ \varphi_i] \neq 0, \quad \text{すなわち } [\varphi^*,\ \varphi_i] \neq [u, \varphi_i]$$

なる φ_i がある．$\varphi^* = \sum \alpha_j{}^* \varphi_j$ を代入して

$$\sum_j [\varphi_i,\ \varphi_j]\alpha_j{}^* \neq [u, \varphi_i] = (f, \varphi_i) \quad \text{((12.12) を参照)}$$

これは矛盾.

7
$$\begin{aligned} [\varphi^* - u,\ v] &= (\varphi^* - u,\ \mathscr{L} v) \quad \text{((12.12) による)} \\ &= (\varphi^* - u,\ \varphi^* - u) \end{aligned}$$

$$[\varphi^* - u,\ \varphi^*] = 0 \quad \text{(前問による)}$$

よって，適当な定数 $C_1, C_2 > 0$ をとれば

$$\begin{aligned} \|\varphi^* - u\|^2 &= (\varphi^* - u, \varphi^* - u) = [\varphi^* - u,\ v - \varphi^*] \\ &\leqq \sqrt{[\varphi^* - u, \varphi^* - u][\psi^* - v,\ \psi^* - v]} \quad \text{(Schwartz の不等式)} \\ &\leqq (C_1 h \|u''\|_\infty)(C_2 h \|v''\|_\infty) \quad \text{((12.18) 参照)} \\ &= O(h^2)\|v''\|_\infty \qquad (*) \end{aligned}$$

ところで，$(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ の Green 関数を $G(x,t)$ とすれば

$$v = \int_a^b G(x,t)(\varphi^* - u)(t)dt, \quad \text{よって } \|v''\|_\infty \leqq O(\|\varphi^* - u\|)$$

これを $(*)$ に代入して両辺を $\|\varphi^* - u\|$ で割る.