付　録

♦ 行列のランク ♦

第 2 章の注意 $\operatorname{rank} AB \leqq \operatorname{rank} A$ の略証を与える．
$\operatorname{rank} A = r$ すなわち

$$A \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} & * \\ O & \end{pmatrix} \leftarrow r \quad : r \text{ 階の階段行列}$$

とすると，定理 2.2 より $PA = A'$ をみたす正則行列 P がとれる．一方，行列の積の定義から

$$A'B = \begin{pmatrix} & * \\ O & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & * & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ O \end{pmatrix} \leftarrow s \quad (= C^{[s]})$$

（$A'B = C^{[s]}$ の $s+1$ 行目以降の行の成分はすべて 0）かつ $s \leqq r$ となる．また，$PAB = A'B = C^{[s]}$ だから定理 2.2 の証明から推論できるように，$AB \longrightarrow C^{[s]}$ とできる．よって，$\operatorname{rank} AB \leqq s \leqq r = \operatorname{rank} A$ を得る．
第 6 章または第 7 章の議論を使えば，$\operatorname{rank} AB \leqq \operatorname{rank} B$ も示せる．

$\operatorname{rank} AB \leqq \operatorname{rank} A$ の別証を与える．
$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) : m \times n$ 型, $B = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_p) : n \times p$ 型, $E = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) : n \times n$ 単位行列とすると，$AB = (A\boldsymbol{b}_1, \cdots A\boldsymbol{b}_p)$ で $A\boldsymbol{b}_i \in \langle A\boldsymbol{e}_1, \cdots A\boldsymbol{e}_n \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_n \rangle$ だから $\langle A\boldsymbol{b}_1, \cdots A\boldsymbol{b}_p \rangle \subset \langle \boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_n \rangle$．したがって

$$\dim \langle A\boldsymbol{b}_1, \cdots A\boldsymbol{b}_p \rangle \leqq \dim \langle \boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_n \rangle$$

よって，定理 6.9 より $\operatorname{rank} AB \leqq \operatorname{rank} A$ を得る．

$\operatorname{rank} AB \leqq \operatorname{rank} B$ の略証を与える．
$\langle \boldsymbol{b}_1, \cdots \boldsymbol{b}_p \rangle$ の基底として $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s \rangle$ をとると，定理 6.8 より $s = \operatorname{rank} B$ で $\langle A\boldsymbol{b}_1, \cdots, A\boldsymbol{b}_p \rangle \subset \langle A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_s \rangle$．したがって

$$\dim \langle A\boldsymbol{b}_1, \cdots, A\boldsymbol{b}_p \rangle \leqq \dim \langle A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_s \rangle \leqq s$$

よって，定理 6.9 より $\operatorname{rank} AB \leqq s = \operatorname{rank} B$ を得る．

♦ 基本解の 1 次独立性 ♦

第 4 章の定理 4.2 の証明の中で，基本解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ $(r = \mathrm{rank}\, A)$ の 1 次独立性を利用した．その 1 次独立性について解説を加える．

第 2 章 2.3 節より同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ $(A : m \times n$ 型$)$ は $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ $(A'$ は r 階の階段行列$)$ と同じ解空間をもつ．ただし

$$A \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} a'_{11} * \cdots & & & \cdots * \\ & a'_{2\,i_2} * \cdots & & \cdots * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a'_{r\,i_r} * \cdots * \\ O & & & \end{pmatrix}$$

$(a'_{11}, a'_{2\,i_2}, a'_{3\,i_3}, \cdots, a'_{r\,i_r} \neq 0)$ である．

A' に対して ① $\times (1/a'_{11})$, ② $\times (1/a'_{2\,i_2}), \cdots,$ ⓡ $\times (1/a'_{r\,i_r})$ の変形を行い，変数変換 $y_1 = x_1, y_2 = x_{i_2}, \cdots, y_r = x_{i_r}$ および残りの $n-r$ 個の変数を $y_{r+1}, y_{r+2}, \cdots, y_n$ とおき，方程式の順番を入れ替えると，$A''\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & * & & & & * \\ & 1 & * & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & * \cdots & * \\ O & & & & & \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

を得る．さらに

$$A'' \to \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1\,r+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2\,r+1} & \cdots & \alpha_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & & \cdots & \\ & & & 1 & 0 & \alpha_{r-1\,r+1} & \cdots & \alpha_{r-1\,n} \\ & & & & 1 & \alpha_{r\,r+1} & \cdots & \alpha_{rn} \\ O & & & & & & & \end{pmatrix}$$

と変形すれば，$\widetilde{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は次の形で書ける．

$$\begin{cases} y_1 + \qquad\qquad \alpha_{1\,r+1}y_{r+1} + \cdots + \alpha_{1n}y_n = 0 \\ \qquad y_2 + \qquad \alpha_{2\,r+1}y_{r+1} + \cdots + \alpha_{2n}y_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad y_r + \alpha_{r\,r+1}y_{r+1} + \cdots + \alpha_{rn}y_n = 0 \end{cases}$$

ここで，$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ を任意定数として

$$\begin{aligned}
y_1 &= -\alpha_{1\,r+1}c_1 - \cdots - \alpha_{1n}c_{n-r} \\
y_2 &= -\alpha_{2\,r+1}c_1 - \cdots - \alpha_{2n}c_{n-r} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdot \\
y_r &= -\alpha_{r\,r+1}c_1 - \cdots - \alpha_{rn}c_{n-r} \\
y_{r+1} &= c_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdot \\
y_n &= c_{n-r}
\end{aligned}$$

とおけば，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ は $\widetilde{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の一般解となる．これを列ベクトル表示すると

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{pmatrix} -\alpha_{1\,r+1} \\ -\alpha_{2\,r+1} \\ \vdots \\ -\alpha_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\alpha_{1\,r+2} \\ -\alpha_{2\,r+2} \\ \vdots \\ -\alpha_{r\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{2n} \\ \vdots \\ -\alpha_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(= c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{y}_{n-r}$ と書く$)$

明らかに，$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 & \cdots & \boldsymbol{y}_{n-r}\end{pmatrix} = n - r$ だから，$\widetilde{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の基本解 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots,$ $\boldsymbol{y}_{n-r}$ は 1 次独立である．

一方，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と $\widetilde{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は同じ解空間をもつので変数変換で，$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ に戻せば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ が得られる．また，その構成手順から，それらは 1 次独立である．

♦ 実標準形 ♦

複素数 $z = x + i\,y$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ に対して，実数 x を z の**実部**，実数 y を z の**虚部**といい，それぞれ $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$ と書く．同様に，複素ベクトル $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + i\,\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は実ベクトル) に対して，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{p}$ の**実部**，$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{p}$ の**虚部**といい，それぞれ $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{p}$, $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{p}$ と書く．

第 5 章 5.4 節の実標準形についての解説を加える．

2 次実行列 A の固有値 $\lambda = \alpha + i\,\beta$ $(\beta \neq 0)$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + i\,\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ は実ベクトルで 1 次独立) とする．A の変換行列として実行列 $Q = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & -\boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\boldsymbol{p} & -\mathrm{Im}\,\boldsymbol{p}\end{pmatrix}$ とおくと，A が実行列より

$$\begin{aligned}
AQ &= A\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\boldsymbol{p} & -\mathrm{Im}\,\boldsymbol{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,A\boldsymbol{p} & -\mathrm{Im}\,A\boldsymbol{p}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\lambda\boldsymbol{p} & -\mathrm{Im}\,\lambda\boldsymbol{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\mathrm{Re}\,\boldsymbol{p} - \beta\mathrm{Im}\,\boldsymbol{p} & -\beta\mathrm{Re}\,\boldsymbol{p} - \alpha\mathrm{Im}\,\boldsymbol{p}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\boldsymbol{p} & -\mathrm{Im}\,\boldsymbol{p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

また，Q は正則だから

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

を得る．

注意　$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \overline{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix}$ かつ $V = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ とすれば，$PV = Q$ が成り立つ．従って

$$\begin{aligned} V^{-1}\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} V &= V^{-1}(P^{-1}AP)V \\ &= (PV)^{-1}A(PV) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．

♦ ケーリー・ハミルトンの定理 ♦

第 5 章にケーリー・ハミルトンの定理を補足する．

多項式 $g(z) = a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ に対して，変数 z を正方行列 A に置き換えて得られる正方行列を A の行列多項式といい，$g(A)$ と書く．すなわち

$$g(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

定理 (Cayley-Hamilton)

正方行列 A の固有多項式 $F_A(\lambda) = |\lambda E - A|$ に対して，次が成り立つ．

$$F_A(A) = 0$$

証明　$A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ とおき，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $\boldsymbol{C}^n$ の標準基底とすると

$$A\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i$$

だから

$$\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ij}A - a_{ij}E)\boldsymbol{e}_i = A\boldsymbol{e}_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}$$

ここで

$$B(z) = (b_{ij}(z)), \qquad b_{ij}(z) = \delta_{ij}z - a_{ij}$$

とおくと，$B(z)$ の余因子行列 $\widetilde{B}(z) = (\widetilde{b}_{ij}(z))$ に対して，定理 3.8 より

$$B(z)\,{}^t\widetilde{B}(z) = |B(z)|\,E$$

が成り立つ．これを成分で表示すると

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(z)\widetilde{b}_{kj}(z) = \delta_{ik}\,|B(z)|$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{kj}(z)b_{ij}(z) = \delta_{ik}\,F_A(z)$$

だから

$$\begin{aligned}
F_A(A)\boldsymbol{e}_k &= \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik}\,F_A(A)\boldsymbol{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{kj}(A)b_{ij}(A) \right\} \boldsymbol{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{kj}(A)(\delta_{ij}A - a_{ij}E) \right\} \boldsymbol{e}_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{kj}(A) \sum_{i=1}^{n} (\delta_{ij}A - a_{ij}E)\boldsymbol{e}_i \\
&= \boldsymbol{0} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)
\end{aligned}$$

よって，$F_A(A) = 0$ となる．　□

例　2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有多項式は $F_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bd)$ であるから，$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ が成り立つ．

♦ 基底の構成 ♦

第 5 章の定理 5.10〜定理 5.12 のための準備をする．

V を有限次元線形空間 (または，数ベクトル空間としてもよい) とし，W を V の部分空間とする．

V の j 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_j$ が

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_j\boldsymbol{v}_j \in W \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_j = 0$$

をみたすとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_j$ は W **を法として 1 次独立である**という．

$j = \dim V - \dim W$ であって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_j$ が W を法として 1 次独立であるとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_j\}$ を W **を法とする** V **の基底**という．

注意　W が V の部分空間で $W \neq V$ ならば W を法とする V の基底が存在する．

実際，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_k\}$ を W の基底とするとき，適当なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_\ell$ をとれば $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_k\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_\ell\}$ は V の基底となる．このとき，$d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 +$

$\cdots + d_\ell \boldsymbol{v}_\ell \in W$ とすると $d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_\ell \boldsymbol{v}_\ell = c'_1\boldsymbol{w}_1 + c'_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + c'_k\boldsymbol{w}_k$ と書けるから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_\ell, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_k$ の 1 次独立性より $d_1 = d_2 = \cdots = d_\ell = 0$ となり，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_\ell$ は W を法として 1 次独立となる．また，$\ell = \dim V - \dim W$ だから $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_\ell\}$ は W を法とする V の基底となる．

定理 A1

$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_k\}$ を W の基底とし，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_\ell\}$ を W を法とする V の基底とする．このとき，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_\ell\}$ は V の基底となる．

証明　$c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k + d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_\ell\boldsymbol{v}_\ell = \boldsymbol{0}$ とすると

$$d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_\ell\boldsymbol{v}_\ell = -(c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k) \in W$$

だから $d_1 = d_2 = \cdots = d_\ell = 0$ となる．また，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_k$ の 1 次独立性より $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ もわかる．よって，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_\ell$ は V で 1 次独立である．

一方，仮定より $\ell = \dim V - \dim W$ すなわち $\dim V = k + \ell$ だから $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_\ell\}$ は V の基底となる． □

♦ 広義固有空間の部分空間 ♦

第 5 章の定理 5.10〜定理 5.12 のための準備をする．
A の固有値 α に対する広義固有空間

$$W(\alpha) = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid (\alpha E - A)^m \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{となる自然数 } m \text{ が存在する} \,\}$$

の部分空間 $W_j(\alpha)$ について考える．以下では簡単のために，自然数 j に対して $W_j(\alpha)$ を W_j と略記する．すなわち

$$W_j = W_j(\alpha) = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid (\alpha E - A)^j \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

このとき，W_j は W_{j+1} の部分空間であり，次の部分空間の列が得られる．

定理 A2

次をみたす k が存在する．

$$\{\boldsymbol{0}\} = W_0 \underset{\neq}{\subsetneq} W_1 \underset{\neq}{\subsetneq} \cdots \underset{\neq}{\subsetneq} W_{k-1} \underset{\neq}{\subsetneq} W_k = W(\alpha)$$

注意　$T = A - \alpha E$ とおくと，$W_j = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid T^j \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ と書ける．

証明　もし，ある j について $W_{j+1} = W_j$ が成り立つならば，$m \geqq j$ に対して $W_m = W_j$ となる．実際，$T = A - \alpha E$ とおき，$\boldsymbol{x} \in W_m$ とすると，$\boldsymbol{0} = T^m \boldsymbol{x} = T^{j+1}(T^{m-j-1}\boldsymbol{x})$ より $T^{m-j-1}\boldsymbol{x} \in W_{j+1} = W_j$ だから

$$T^{m-1}\boldsymbol{x} = T^j(T^{m-j-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

よって，$\boldsymbol{x} \in W_{m-1}$ となり，帰納法を用いて，$\boldsymbol{x} \in W_j$ が導かれる．
　従って，$\dim W(\alpha) < \infty$ よりある k に対して

$$\{\boldsymbol{0}\} = W_0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq W_{k-1} \subsetneqq W_k = W(\alpha)$$

が成り立つ．　□

定理 A3

$\{\boldsymbol{0}\} = W_0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq W_{k-1} \subsetneqq W_k = W(\alpha)$ とするとき

$$\{\boldsymbol{w}_1^j, \boldsymbol{w}_2^j, \cdots, \boldsymbol{w}_{t_j}^j\}$$

を W_{j-1} を法とする W_j の基底とすれば

$$\mathcal{E} = \{\boldsymbol{w}_1^1, \boldsymbol{w}_2^1, \cdots, \boldsymbol{w}_{t_1}^1, \boldsymbol{w}_1^2, \boldsymbol{w}_2^2, \cdots, \boldsymbol{w}_{t_2}^2, \cdots, \boldsymbol{w}_1^k, \boldsymbol{w}_2^k, \cdots, \boldsymbol{w}_{t_k}^k\}$$

は $W(\alpha)$ の基底となる．また，$t_1 + t_2 + \cdots + t_k = \dim W(\alpha)$ となる．

注意　$\mathcal{E}$ のベクトルの順番を並び換えて，次のように書くこともある．

$$\mathcal{E} = \{\boldsymbol{w}_{t_1}^1, \boldsymbol{w}_{t_1-1}^1, \cdots, \boldsymbol{w}_1^1, \boldsymbol{w}_{t_2}^2, \boldsymbol{w}_{t_2-1}^2, \cdots, \boldsymbol{w}_1^2, \cdots, \boldsymbol{w}_{t_k}^k, \boldsymbol{w}_{t_k-1}^k, \cdots, \boldsymbol{w}_1^k\}$$

証明　$\{\boldsymbol{w}_1^1, \boldsymbol{w}_2^1, \cdots, \boldsymbol{w}_{t_1}^1\}$ は $W_0 = \{\boldsymbol{0}\}$ を法とする W_1 の基底だから，定理 A1 より $\{\boldsymbol{w}_1^1, \boldsymbol{w}_2^1, \cdots, \boldsymbol{w}_{t_1}^1\}$ は W_1 の基底となる．
　また，$\{\boldsymbol{w}_1^2, \boldsymbol{w}_2^2, \cdots, \boldsymbol{w}_{t_2}^2\}$ は W_1 を法とする W_2 の基底だから，定理 A1 より $\{\boldsymbol{w}_1^1, \boldsymbol{w}_2^1, \cdots, \boldsymbol{w}_{t_1}^1, \boldsymbol{w}_1^2, \boldsymbol{w}_2^2, \cdots, \boldsymbol{w}_{t_2}^2\}$ は W_2 の基底となる．
　同様の議論を繰り返すことにより $\mathcal{E}$ が $W(\alpha)$ の基底となることがわかる．　□

定理 A4

広義固有空間 $W(\alpha)$ の基底

$$\{\boldsymbol{p}_{t_1}^1, \boldsymbol{p}_{t_1-1}^1, \cdots, \boldsymbol{p}_1^1, \boldsymbol{p}_{t_2}^2, \boldsymbol{p}_{t_2-1}^2, \cdots, \boldsymbol{p}_1^2, \cdots, \boldsymbol{p}_{t_\ell}^\ell, \boldsymbol{p}_{t_\ell-1}^\ell, \cdots, \boldsymbol{p}_1^\ell\}$$

として，次をみたすものがとれる．

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{p}_{t_i}^i &= \alpha\boldsymbol{p}_{t_i}^i \\ A\boldsymbol{p}_{t_i-1}^i &= \alpha\boldsymbol{p}_{t_i-1}^i + \boldsymbol{p}_{t_i}^i \\ &\cdots \\ A\boldsymbol{p}_2^i &= \alpha\boldsymbol{p}_2^i + \boldsymbol{p}_3^i \\ A\boldsymbol{p}_1^i &= \alpha\boldsymbol{p}_1^i + \boldsymbol{p}_2^i \end{aligned}$$

ただし，$\ell = \dim V(\alpha)$，$t_1 + t_2 + \cdots + t_\ell = \dim W(\alpha)$ である．

注意　上式は

$$A(\boldsymbol{p}_{t_i}^i\ \boldsymbol{p}_{t_i-1}^i\ \cdots\ \boldsymbol{p}_1^i) = (\boldsymbol{p}_{t_i}^i\ \boldsymbol{p}_{t_i-1}^i\ \cdots\ \boldsymbol{p}_1^i)\, J_{t_i}(\alpha)$$

と書き換えることができるから，ここで

$$P = (\boldsymbol{p}_{t_1}^1\ \boldsymbol{p}_{t_1-1}^1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_1^1\ \boldsymbol{p}_{t_2}^2\ \boldsymbol{p}_{t_2-1}^2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_1^2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_{t_\ell}^\ell\ \boldsymbol{p}_{t_\ell-1}^\ell\ \cdots\ \boldsymbol{p}_1^\ell)$$

とおくと

$$AP = P\begin{pmatrix} J_{t_1}(\alpha) & & & \\ & J_{t_2}(\alpha) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{t_\ell}(\alpha) \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ただし，$J_{t_i}(\alpha)$ は α に対する t_i 次ジョルダン・ブロックである．また，α に対するジョルダン・ブロックの個数は α に対する固有空間 $V(\alpha)$ の次元 $\dim V(\alpha)$ と一致することがわかる．

証明　$T = A - \alpha E$ とおき，自然数 j に対して，$W_j = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid T^j\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ とし

$$\{\boldsymbol{0}\} = W_0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq W_{k-1} \subsetneqq W_k = W(\alpha)$$

とする．W_{k-1} を法とする W_k の基底を $\{\boldsymbol{w}_1^k, \boldsymbol{w}_2^k, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_k}^k\}$ とすると $\boldsymbol{0} = T^k\boldsymbol{w}_i^k = T^{k-1}(T\boldsymbol{w}_i^k)$ より

$$T\boldsymbol{w}_1^k, T\boldsymbol{w}_2^k, \cdots, T\boldsymbol{w}_{s_k}^k \in W_{k-1}$$

である．また，$T\boldsymbol{w}_1^k, T\boldsymbol{w}_2^k, \cdots, T\boldsymbol{w}_{s_k}^k$ は W_{k-2} を法として 1 次独立となる．実際，$c_1T\boldsymbol{w}_1^k + c_2T\boldsymbol{w}_2^k + \cdots + c_{s_k}T\boldsymbol{w}_{s_k}^k \in W_{k-2}$ とすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} &= T^{k-2}(c_1T\boldsymbol{w}_1^k + c_2T\boldsymbol{w}_2^k + \cdots + c_{s_k}T\boldsymbol{w}_{s_k}^k) \\ &= T^{k-1}(c_1\boldsymbol{w}_1^k + c_2\boldsymbol{w}_2^k + \cdots + c_{s_k}\boldsymbol{w}_{s_k}^k)\end{aligned}$$

だから，$c_1\boldsymbol{w}_1^k + c_2\boldsymbol{w}_2^k + \cdots + c_{s_k}\boldsymbol{w}_{s_k}^k \in W_{k-1}$ となる．また，$\boldsymbol{w}_1^k, \boldsymbol{w}_2^k, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_k}^k$ は W_{k-1} を法として 1 次独立だから $c_1 = c_2 = \cdots = c_{s_k} = 0$ となる．

W_{k-1} において，適当なベクトル $\boldsymbol{w}_1^{k-1}, \boldsymbol{w}_2^{k-1}, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_{k-1}}^{k-1}$ を選んで

$$\{T\boldsymbol{w}_1^k, T\boldsymbol{w}_2^k, \cdots, T\boldsymbol{w}_{s_k}^k, \boldsymbol{w}_1^{k-1}, \boldsymbol{w}_2^{k-1}, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_{k-1}}^{k-1}\}$$

を W_{k-2} を法とする W_{k-1} の基底とすることができる．

同様に考えて

$$T^2\boldsymbol{w}_1^k, T^2\boldsymbol{w}_2^k, \cdots, T^2\boldsymbol{w}_{s_k}^k, T\boldsymbol{w}_1^{k-1}, T\boldsymbol{w}_2^{k-1}, \cdots, T\boldsymbol{w}_{s_{k-1}}^{k-1} \quad (\in W_{k-2})$$

は W_{k-3} を法として 1 次独立であることがわかる．

W_{k-2} において，適当なベクトル $\boldsymbol{w}_1^{k-2}, \boldsymbol{w}_2^{k-2}, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_{k-2}}^{k-2}$ を選んで

$$\{T^2\boldsymbol{w}_1^k, \cdots, T^2\boldsymbol{w}_{s_k}^k, T\boldsymbol{w}_1^{k-1}, \cdots, T\boldsymbol{w}_{s_{k-1}}^{k-1}, \boldsymbol{w}_1^{k-2}, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_{k-2}}^{k-2}\}$$

を W_{k-3} を法とする W_{k-2} の基底とすることができる．

この操作を続けて，W_{j-1} を法とする W_j の基底をつくる．

以上の操作によって得られるベクトルを表にまとめると次のようになる．ただし，W_j/W_{j-1} の基底は W_{j-1} を法とする W_j の基底を略記したものである．

W_k/W_{k-1} の基底	$\boldsymbol{w}_1^k, \boldsymbol{w}_2^k, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_k}^k$				
W_{k-1}/W_{k-2} の基底	$T\boldsymbol{w}_1^k, T\boldsymbol{w}_2^k, \cdots, T\boldsymbol{w}_{s_k}^k$	$\boldsymbol{w}_1^{k-1}, \boldsymbol{w}_2^{k-1}, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_{k-1}}^{k-1}$			
W_{k-2}/W_{k-3} の基底	$T^2\boldsymbol{w}_1^k, T^2\boldsymbol{w}_2^k, \cdots, T^2\boldsymbol{w}_{s_k}^k$	$T\boldsymbol{w}_1^{k-1}, T\boldsymbol{w}_2^{k-1}, \cdots, T\boldsymbol{w}_{s_k}^{k-1}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
W_1 の基底	$T^{k-1}\boldsymbol{w}_1^k, T^{k-1}\boldsymbol{w}_2^k, \cdots, T^{k-1}\boldsymbol{w}_{s_k}^k$	$T^{k-2}\boldsymbol{w}_1^{k-1}, T^{k-2}\boldsymbol{w}_2^{k-1}, \cdots, T^{k-2}\boldsymbol{w}_{s_{k-1}}^{k-1}$			$\boldsymbol{w}_1^1, \boldsymbol{w}_2^1, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_1}^1$

表のすべてのベクトルからなる集合は $W(\alpha)$ の基底となる．ここで

$$\boldsymbol{w}_1^k, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_k}^k, \boldsymbol{w}_1^{k-1}, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_{k-1}}^{k-1}, \cdots, \boldsymbol{w}_1^1, \cdots, \boldsymbol{w}_{s_1}^1$$

を改めて，この順番に $\boldsymbol{p}_1^1, \boldsymbol{p}_1^2, \cdots, \boldsymbol{p}_1^\ell$ とおくと，固有空間 $V(\alpha) = W_1$ より

$$\dim V(\alpha) = \dim W_1 = \ell$$

となる．さらに，$\boldsymbol{p}_1^i = \boldsymbol{w}_m^{t_i}$ のとき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_2^i &= T\boldsymbol{w}_m^{t_i} \\ \boldsymbol{p}_3^i &= T^2\boldsymbol{w}_m^{t_i} \\ &\cdots \\ \boldsymbol{p}_{t_i}^i &= T^{t_i-1}\boldsymbol{w}_m^{t_i} \end{aligned}$$

とおくと，$t_1 + t_2 + \cdots + t_\ell = \dim W(\alpha)$ で

$$\{\boldsymbol{p}_{t_1}^1, \boldsymbol{p}_{t_1-1}^1, \cdots, \boldsymbol{p}_1^1, \boldsymbol{p}_{t_2}^2, \boldsymbol{p}_{t_2-1}^2, \cdots, \boldsymbol{p}_1^2, \cdots, \boldsymbol{p}_{t_\ell}^\ell, \boldsymbol{p}_{t_\ell-1}^\ell, \cdots, \boldsymbol{p}_1^\ell\}$$

は $W(\alpha)$ の基底となる．また

$$T\boldsymbol{p}_{t_i}^i = TT^{t_i-1}\boldsymbol{w}_m^{t_i} = T^{t_i}\boldsymbol{w}_m^{t_i} = \boldsymbol{0}$$

だから，$T = A - \alpha E$ より

$$A\boldsymbol{p}_{t_i}^i = \alpha\boldsymbol{p}_{t_i}^i$$

また，$k < t_i$ に対して，$T\boldsymbol{p}_{k-1}^i = \boldsymbol{p}_k^i$ だから

$$A\boldsymbol{p}_{k-1}^i = (\alpha E + T)\boldsymbol{p}_{k-1}^i = \alpha\boldsymbol{p}_{k-1}^i + \boldsymbol{p}_k^i$$

が成り立つ．　□

♦ 広義固有ベクトル ♦

第 5 章の定理 5.12 (1) の略証を与える.

定理 5.12 (1)

相異なる固有値に対する広義固有ベクトルは 1 次独立である.

証明　$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ を A の相異なる固有値とする．$\boldsymbol{x}_i \in W(\lambda_i)$, $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ $(1 \leqq i \leqq s)$ に対して

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_s\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 \cdots = c_s = 0$$

を示せばよい．s についての帰納法で示す．$s-1$ まで成り立つと仮定し

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_s\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$$

とする．$(\lambda_s E - A)^k \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$ となる自然数 k をとり $(\lambda_s E - A)^k$ を左からかけると

$$c_1(\lambda_s E - A)^k \boldsymbol{x}_1 + c_2(\lambda_s E - A)^k \boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{s-1}(\lambda_s E - A)^k \boldsymbol{x}_{s-1} = \boldsymbol{0}$$

一方，$(\lambda_s E - A)(\lambda_i E - A) = (\lambda_i E - A)(\lambda_s E - A)$ であることに注意すると，$(\lambda_s E - A)^k \boldsymbol{x}_i \in W(\lambda_i)$ がわかる．

さらに，$(\lambda_s E - A)^k \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ $(1 \leqq i \leqq s-1)$ もわかる．実際，$\boldsymbol{x}_i \in W(\lambda_i)$ より

$$(\lambda_i E - A)^{j-1} \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0} \quad \text{かつ} \quad (\lambda_i E - A)^j \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$$

となる $j \in \boldsymbol{N}$ が存在する．ここで，$\boldsymbol{y}_i = (\lambda_i E - A)^{j-1} \boldsymbol{x}_i$ とおくと

$$\boldsymbol{y}_i \neq \boldsymbol{0} \quad \text{かつ} \quad A\boldsymbol{y}_i = \lambda_i \boldsymbol{y}_i$$

$1 \leqq i \leqq s-1$ に対して，$\lambda_s \neq \lambda_i$ より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} &\neq (\lambda_s - \lambda_i)^k \boldsymbol{y}_i = (\lambda_s E - A)^k \boldsymbol{y}_i \\ &= (\lambda_s E - A)^k (\lambda_i E - A)^{j-1} \boldsymbol{x}_i = (\lambda_i E - A)^{j-1} (\lambda_s E - A)^k \boldsymbol{x}_i\end{aligned}$$

だから，$(\lambda_s E - A)^k \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ $(1 \leqq i \leqq s-1)$ を得る．

従って，$(\lambda_s E - A)^k \boldsymbol{x}_i \in W(\lambda_i)$ で $(\lambda_s E - A)^k \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ $(1 \leqq i \leqq s-1)$ だから，帰納法の仮定より $c_1 = c_2 = \cdots = c_{s-1} = 0$ となる．また，$c_s = 0$ もわかるので，広義固有ベクトルの 1 次独立性がわかる．□

♦ ジョルダン標準化 ♦

第 5 章の定理 5.10 定理 5.11 定理 5.12 (2) の略証を与える．

行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ に対する固有多項式を

$$F_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$

$(n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r)$ とするとき，A の固有値 λ_i に対する広義固有空間 $W(\lambda_i)$ に対して，次が成り立つ．

定理 A5

$$\boldsymbol{C}^n = W(\lambda_1) \oplus W(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_r)$$

証明　$f_i(z) = (z - \lambda_i)^{n_i}$ とし

$$\widehat{f}_i(z) = f_1(z)f_2(z)\cdots f_{i-1}(z)f_{i+1}(z)\cdots f_r(z)$$

とおくと，$\widehat{f}_1(z), \widehat{f}_2(z), \cdots, \widehat{f}_r(z)$ の最大公約数は 1 である．従って，適当な多項式 $a_1(z), a_2(z), \cdots, a_r(z)$ をとって

$$a_1(z)\widehat{f}_1(z) + a_2(z)\widehat{f}_2(z) + \cdots + a_r(z)\widehat{f}_r(z) = 1$$

とできる．従って

$$a_1(A)\widehat{f}_1(A) + a_2(A)\widehat{f}_2(A) + \cdots + a_r(A)\widehat{f}_r(A) = E$$

となる．さらに，任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$ と $i = 1, 2, \cdots, r$ に対して

$$f_i(A)a_i(A)\widehat{f}_i(A)\boldsymbol{x} = a_i(A)F_A(A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

だから $a_i(A)\widehat{f}_i(A)\boldsymbol{x} \in \widetilde{W}_i$ である．ただし

$$\widetilde{W}_i = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid (\lambda_i E - A)^{n_i}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}\ (= W_{n_i}(\lambda_i)\,)$$

　よって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= a_1(A)\widehat{f}_1(A)\boldsymbol{x} + a_2(A)\widehat{f}_2(A)\boldsymbol{x} + \cdots + a_r(A)\widehat{f}_r(A)\boldsymbol{x} \\ &\in \widetilde{W}_1 + \widetilde{W}_2 + \cdots + \widetilde{W}_r\end{aligned}$$

となるから

$$\boldsymbol{C}^n \subset \widetilde{W}_1 + \widetilde{W}_2 + \cdots + \widetilde{W}_r \subset W(\lambda_1) + W(\lambda_2) + \cdots + W(\lambda_r) \subset \boldsymbol{C}^n$$

となり $\boldsymbol{C}^n = W(\lambda_1) + W(\lambda_2) + \cdots + W(\lambda_r)$ となる．

　一方，定理 5.12 (1) より $i \neq j$ に対して，$W(\lambda_i) \cap W(\lambda_j) = \{\boldsymbol{0}\}$ がわかる．よって，$\boldsymbol{C}^n = W(\lambda_1) \oplus W(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_r)$ を得る．□

　注意　$W(\lambda_i) = W_{n_i}(\lambda_i)\ (= \widetilde{W}_i\,)$ もわかる．

　正方行列のジョルダン標準形について次が成り立つ．

定理 5.10

任意の正方行列 A は適当な正則行列 P を用いて，ジョルダン行列に標準化できる．

証明　定理 A4 より $W(\lambda_i)$ の基底

$$\mathcal{E}_i = \{\boldsymbol{p}_{t_1}^{i,1}, \boldsymbol{p}_{t_1-1}^{i,1}, \cdots, \boldsymbol{p}_1^{i,1}, \boldsymbol{p}_{t_2}^{i,2}, \boldsymbol{p}_{t_2-1}^{i,2}, \cdots, \boldsymbol{p}_1^{i,2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{t_\ell}^{i,\ell}, \boldsymbol{p}_{t_\ell-1}^{i,\ell}, \cdots, \boldsymbol{p}_1^{i,\ell}\}$$

として

$$AP(\lambda_i) = P(\lambda_i)J(\lambda_i)$$

をみたすものがとれる．ただし

$$P(\lambda_i) = (\boldsymbol{p}_{t_1}^{i,1} \ \cdots \ \boldsymbol{p}_1^{i,1} \ \boldsymbol{p}_{t_2}^{i,2} \ \cdots \ \boldsymbol{p}_1^{i,2} \ \cdots \ \boldsymbol{p}_{t_\ell}^{i,\ell} \ \cdots \ \boldsymbol{p}_1^{i,\ell})$$

$$J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J_{t_1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{t_2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{t_\ell}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

$(t_1 + t_2 + \cdots + t_\ell = \dim W(\lambda_i))$ である．また，$\ell = \dim V(\lambda_i)$ すなわち λ_i に対するジョルダン・ブロックは λ_i に対する固有空間の次元と一致する．

ここで，$W(\lambda_1), W(\lambda_2), \cdots, W(\lambda_r)$ の基底 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \cdots, \mathcal{E}_r$ のベクトルをこの順番に並べて行列 P をつくると，定理 A5 より $n = \dim \boldsymbol{C}^n = \dim W(\lambda_1) + \dim W(\lambda_2) + \cdots + \dim W(\lambda_r)$ だから，P は n 次正方行列で

$$AP = PJ, \qquad J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

が成り立つ．また，相異なる固有値に対する広義固有ベクトルは 1 次独立だから，この行列 P は正則である．よって，A はこの正則行列 P を用いてジョルダン行列 $(P^{-1}AP = J)$ に標準化できることがわかった．　□

定理 5.10 の証明から次のこともわかる．

定理 5.11

行列 A を標準化したときの固有値 λ_i に対するジョルダン・ブロックの個数は固有空間 $V(\lambda_i)$ の次元 $\dim V(\lambda_i)$ と一致する．

さらに，広義固有空間 $W(\lambda_i)$ の次元について，次が成り立つ．

定理 5.12 (2)

n_i を行列 A の固有値 λ_i の重複度とするとき，次が成り立つ．

$$\dim W(\lambda_i) = n_i$$

証明　定理 5.10 の証明中の式より，$m_i = \dim W(\lambda_i)$ とすれば

$$|\lambda E - A| = |\lambda E - J| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

となり，$\dim W(\lambda_i)$ は行列 A の固有多項式 $|\lambda E - A|$ における固有値 λ_i の重複度 n_i と一致する． □

♦ フロベニウスの定理 ♦

第 5 章にフロベニウスの定理を補足する．

定理 (Frobenius)

n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき，行列多項式 $f(A)$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ となる．

証明　行列 A のジョルダン標準形 $J = P^{-1}AP$ は上 3 角行列で，対角線上に A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が並んでいる．すなわち

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と書ける．このとき，$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k$ より

$$P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & * \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

となる．従って，$P^{-1}f(A)P$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ となり，$f(A)$ の固有値も $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ となる． □