

# 新版 物理数学ノート

— 基礎物理をよりよく理解するために—

佐藤 光 著

## 演習問題略解

2006年1月

### 第1講の解答

#### 1.1

$$(1) \quad v(t) = 2\alpha t + \beta, \quad a(t) = 2\alpha$$

$$(2) \quad v(t) = \{-\lambda\alpha t^2 + (2\alpha - \lambda\beta)t + (\beta - \lambda\gamma)\}e^{-\lambda t}$$
$$a(t) = \{\alpha\lambda^2 t^2 + \lambda(\lambda\beta - 4\alpha)t + (\lambda^2\gamma - 2\lambda\beta + 2\alpha)\}e^{-\lambda t}$$

$$(3) \quad v(t) = \alpha\beta \cos(\beta t + \gamma), \quad a(t) = -\alpha\beta^2 \sin(\beta t + \gamma) = -\beta^2 x(t)$$

$$(4) \quad v(t) = \alpha\{\beta \cos(\beta t + \gamma) - \lambda \sin(\beta t + \gamma)\}e^{-\lambda t}$$
$$a(t) = \alpha\{(\lambda^2 - \beta^2) \sin(\beta t + \gamma) - 2\lambda\beta \cos(\beta t + \gamma)\}e^{-\lambda t}$$

#### 1.2

$$(1) \quad x = a \tan t \text{ と積分変数を変換する.}$$

$$(2) \quad 1/(a^2 - x^2) = (1/(a - x) + 1/(a + x))/2a \text{ と部分分数に分解し, 積分を実行する.}$$

$$(3) \quad x = a \sin t \text{ と積分変数を変換する.}$$

$$(4) \quad x + \sqrt{x^2 + a} = t \text{ すなわち } x = (t^2 - a)/2t \text{ と変数変換をする.}$$

#### 1.3

$dx/dt = v_0 \exp(-\lambda t)$  を積分する.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt = x_0 + v_0 \int_0^t e^{-\lambda t} dt$$
$$= x_0 + \frac{v_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}).$$

## 1.4

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  とおくと,  $U = A/r$ . また,  $rdr = xdx + ydy + zdz$  より,  $\partial r/\partial x = x/r, \partial r/\partial y = y/r, \partial r/\partial z = z/r$ . したがって

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{Ax}{r^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{Ay}{r^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{Az}{r^3}.$$

これらより与えられた式が導ける.

## 1.5

$\varepsilon$  が微小量するとき,

$$E(x + \varepsilon, y, z) - E(x, y, z) = \frac{\partial E}{\partial x} \varepsilon$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x}{r^3} \right] = \frac{1}{r^3} + x \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial r}{\partial x}$$

を計算すればよい.

## 1.6

(1) 問題の積分を  $I$  とおき,  $I^2$  を計算する.

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy.$$

こうして2次元平面上の積分になったので, 極座標  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  に変数変換する. 面積要素は  $dx dy = r dr d\theta$  であるから

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-at} dt \\ &= \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

これより, 求める公式が得られる.

(2) 問題の積分を

$$I = \int_0^{\infty} e^{-bx^2} \cos(2ax) dx$$

とおき,  $I$  を  $a$  で微分してみる.

$$\begin{aligned} \frac{dI}{da} &= -2 \int_0^{\infty} e^{-bx^2} x \sin(2ax) dx \\ &= \left[ \frac{1}{b} e^{-bx^2} \sin(2ax) \right]_0^{\infty} - \frac{2}{b} a \int_0^{\infty} e^{-bx^2} \cos(2ax) dx = -\frac{2}{b} a I. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{dI}{I} = -\frac{2}{b} a da.$$

これを積分して

$$I = Ce^{-a^2/b}, \quad C: \text{積分定数.}$$

$C$  を決めるために  $a = 0$  とおいてみれば

$$C = \int_0^\infty e^{-bx^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

したがって

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-a^2/b}.$$

## 1.7

$xy$  平面に平行で点  $(0, 0, z)$  を通る平面で球を切ったときの切り口は半径  $\sqrt{a^2 - z^2}$  の円  $D(z)$  であるから, 次のように逐次, 積分を実行すればよい.

$$\begin{aligned} I_z &= \rho \int_{-a}^a dz \int_{D(z)} (x^2 + y^2) dx dy = \rho \int_{-a}^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} r^3 dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \rho \int_{-a}^a (a^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15} \pi \rho a^5. \end{aligned}$$

計算の過程で円柱座標  $(r, \theta, z)$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$  に変数変換した. 変数変換のヤコビアンは極座標の場合と同様にして計算できて

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

## 第 2 講の解答

### 2.1

(1)  $y = C \exp(1/x)$

(2)  $\tan y dy = \cot x dx$ ,  $d(\log(\cos y)) = -d(\log(\sin x))$  より  $\cos y = C/\sin x$

(3)  $(1 - y)dy/y + (1 + x)dx/x = 0$  より  $\log(xy) + x - y = C$

### 2.2

(a)  $y = ux$  とおけば

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

であるから, この関係をもとの微分方程式に代入すればよい.

(b)  $f(u) \neq u$  のとき，変数分離形にした微分方程式は次のように積分できる．

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \log|x| + C'$$

そこで

$$F(u) = \exp \left[ \int \frac{du}{f(u) - u} \right]$$

とおけば，解は

$$x = CF(u) = CF\left(\frac{y}{x}\right)$$

より求まる．ここで積分定数を  $C = \exp(-C')$  とおき直した．

$f(u) = u$  の場合は，微分方程式は単に  $u' = 0$  となって，解は  $y = Cx$  となる．

2.3 与えられた微分方程式の右辺を  $x$  で割れば同次形になって，

$$f(u) = \frac{c + du}{a + bu}.$$

したがって解は  $b = c = 0, a = d$  のとき  $y = Cx$ ，それ以外では前問の結果により

$$x = C \exp \left[ - \int \frac{bu + a}{bu^2 + (a - d)u - c} du \right]$$

で与えられる．

2.4  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  と  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  の積および商は三角関数の加法定理を用いて次のように計算できる．

(a)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) / (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

2.5 三角関数の加法定理を用いて

(a)

$$\begin{aligned}v(t)i(t) &= V_m I_m \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta) \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m [\cos(2\omega t + \alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \\ \int_0^T \cos((2\omega t + \alpha + \beta)) dt &= \frac{1}{2\omega} [\sin((2\omega t + \alpha + \beta))]_0^T = 0.\end{aligned}$$

(b)

$$\hat{V}\bar{I} = V_m I_m e^{i(\alpha - \beta)}$$

より

$$\operatorname{Re}(\hat{V}\bar{I}) = V_m I_m \cos(\alpha - \beta).$$

2.6 (第1式) + i(第2式)により,  $z(t)$  に対する微分方程式は

$$\frac{d}{dt}z(t) = -i\alpha z(t).$$

この解は,  $C = Ae^{-i\beta}$  ( $A, \beta$ は実数) を複素数の積分定数として

$$z(t) = Ce^{-i\alpha t} = Ae^{-i(\alpha t + \beta)}.$$

これの実数部と虚数部とを取ることにより

$$x(t) = A \cos(\alpha t + \beta), \quad y(t) = -A \sin(\alpha t + \beta).$$

### 第3講の解答

3.1  $\sin \omega t = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i$  を代入して積分を実行する.

$$\int e^{(\pm i\omega - \rho)t} dt = \frac{1}{\pm i\omega - \rho} e^{(\pm i\omega - \rho)t}$$

より

$$\begin{aligned}\int \sin \omega t e^{-\rho t} dt &= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{i\omega - \rho} e^{i\omega t} + \frac{1}{i\omega + \rho} e^{-i\omega t} \right\} e^{-\rho t} \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \left( \frac{1}{i\omega - \rho} + \frac{1}{i\omega + \rho} \right) \cos \omega t \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{i\omega - \rho} - \frac{1}{i\omega + \rho} \right) i \sin \omega t \right\} e^{-\rho t}.\end{aligned}$$

これより与式が得られる.

### 3.2 (3.41) 式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 \varphi} &= 1 + \tan^2 \varphi = 1 + \frac{(2\gamma\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \\ &= \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}.\end{aligned}$$

この式より

$$\cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin \varphi = \frac{-2\gamma\omega}{\{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

とにおいて三角関数の加法定理を用いればよい.

3.3 (3.41) 式で与えられる振幅  $A$  の分母を最小にする  $\omega$  を求めればよい.  $g(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2$  とおいて,  $g'(\omega^2) = 0$  の条件により求める.

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2, \quad A = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

### 3.4

$$(1) \quad y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$$

$$(2) \quad y(x) = (C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x))e^{-2x}$$

$$(3) \quad y(x) = \left( C_1 \cos \frac{3\sqrt{7}}{2}x + C_2 \sin \frac{3\sqrt{7}}{2}x \right) e^{-x/2}$$

$$(4) \quad y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \left( x - \frac{1}{4} \right) e^x$$

$$(5) \quad y(x) = \frac{1}{40}(3 \cos x + \sin x) + C_1 e^{-2x} \cos(3x) + C_2 e^{-2x} \sin(3x)$$

$$(6) \quad y(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) + \frac{x}{4} \sin(2x) + \frac{1}{16} \cos(2x)$$

3.5 齊次方程式の一般解およびロンスキアンは強制振動の場合と同じである.

$$C_1(t) = -\frac{f_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \int e^{-(\rho_1 + \mu)t} dt = \frac{f_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \frac{1}{\rho_1 + \mu} e^{-(\rho_1 + \mu)t} + C_1,$$

$$C_2(t) = \frac{f_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \int e^{-(\rho_2 + \mu)t} dt = -\frac{f_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \frac{1}{\rho_2 + \mu} e^{-(\rho_2 + \mu)t} + C_2.$$

これより, 一般解は

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 + \mu^2 - 2\gamma\mu} e^{-\mu t} + C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t}$$

と求まる．右辺第1項は外力による部分で減衰運動を表している．第2, 第3項は斉次方程式の一般解の部分で, これも時間がたてば減衰していく．

### 3.6

- (a) (3.17)式において,  $x \rightarrow Q, \omega_0^2 \rightarrow 1/LC, f(t) \rightarrow E(t)/L$  と置き換えればよい．  
 $A_1, A_2$  を積分定数として

$$Q(t) = \left\{ \sqrt{\frac{C}{L}} \int_0^t E(u) \cos\left(\frac{u}{\sqrt{LC}}\right) du + A_1 \right\} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) - \left\{ \sqrt{\frac{C}{L}} \int_0^t E(u) \sin\left(\frac{u}{\sqrt{LC}}\right) du + A_2 \right\} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

- (b) 前問で求めた公式に当てはめればよい．

$$Q(t) = \left\{ CE_0 \sin\left(\frac{T}{\sqrt{LC}}\right) + A_1 \right\} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) - \left\{ CE_0 \left[ 1 - \cos\left(\frac{T}{\sqrt{LC}}\right) \right] + A_2 \right\} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

### 3.7

- (i) まず与えられた微分方程式に対して  $Q(x) = 0$  とおいた斉次方程式の一般解を求める．すなわち

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

は変数分離形であるから

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= - \int P(x) dx, \\ \log |y| &= - \int P(x) dx + C', \\ y(x) &= C \exp\left(- \int P(x) dx\right) \end{aligned}$$

のように一般解が得られる．

- (ii) 次に積分定数  $C$  を改めて  $x$  の適当な関数  $C(x)$  とし, 元の微分方程式の一般解が次の形のものであると仮定する．

$$y(x) = C(x) \exp\left(- \int P(x) dx\right).$$

これを元の方程式に代入すれば

$$\left(\frac{dC}{dx} - CP(x) + P(x)C\right) \exp\left(- \int P(x) dx\right) = Q(x).$$

すなわち,  $C(x)$  が次の方程式を満足するようにとればよい.

$$\frac{dC}{dx} = Q(x) \exp\left(\int P(x)dx\right).$$

これを積分すれば

$$C(x) = \int \left\{ Q(x) \exp\left(\int P(x)dx\right) \right\} dx + C_0.$$

したがって一般解は

$$y(x) = \left\{ \int \left( Q(x) e^{\int P(x)dx} \right) dx + C_0 \right\} \exp\left(-\int P(x)dx\right)$$

によって求められる.

## 第4講の解答

### 4.1

(1)

$$A^n = \begin{cases} E & (n: \text{偶数}) \\ A & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

(2)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{bmatrix}, \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{bmatrix}, \quad B^n = \mathbf{0} \quad (n \geq 4)$$

4.2 行列式の定義式 (4.9) に  $A_{ij} = a_{ij}$  を代入したとき,  $a_{ij} = 0 (i > j)$  であるから, ある  $k$  に対し  $k > p_k$  となるような置換  $p$  に対応する項はすべてゼロである. したがって, すべての  $k$  に対して  $k \leq p_k$  でなければならない. この条件を満たすのは, すべての  $k$  について  $k = p_k$ , すなわち恒等置換となる項だけである.

### 4.3

$$(1) A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0} & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2) B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix}$$



## 4.4

(1) 行列  $A$  は三角行列だから，固有方程式 (4.30) は

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

となる．したがって固有値は  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$  である．これらの固有値に対応するそれぞれの固有ベクトルを定める． $\lambda_1 = 1$  に対して，(4.29) 式は

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{f}_1 = 0.$$

これより，

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ととることができる． $\lambda_2 = 2$  に対しては

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f}_2 = 0, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

となる． $\lambda_3 = 3$  に対しては

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{f}_3 = 0, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と取れる．したがって

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

として

$$F^{-1}AF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) 固有方程式は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & -1 \\ -3 & -1 - \lambda & 3 \\ -3 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0. \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1$  に対しては

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{f}_1 = 0, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = -1$  に対しては

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{f}_2 = 0, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_3 = 5$  に対しては

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{f}_3 = 0, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

したがって

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

として

$$F^{-1}BF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

#### 4.5

$$\begin{aligned} \text{Tr}(F^{-1}AF) &= \sum_{i,j,k} (F^{-1})_{ij} A_{jk} F_{ki} = \sum_{i,j,k} F_{ki} (F^{-1})_{ij} A_{jk} \\ &= \sum_{j,k} \delta_{kj} A_{jk} = \sum_j A_{jj} = \text{Tr}A \end{aligned}$$

4.6 図1のように座標系と変数を定める．第1と第2のおもりの運動方程式は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2, \\ m\ddot{y}_1 &= -T_1 \cos \theta_1 + T_2 \cos \theta_2 + mg, \\ m\ddot{x}_2 &= -T_2 \sin \theta_2, \\ m\ddot{y}_2 &= -T_2 \cos \theta_2 + mg. \end{aligned}$$

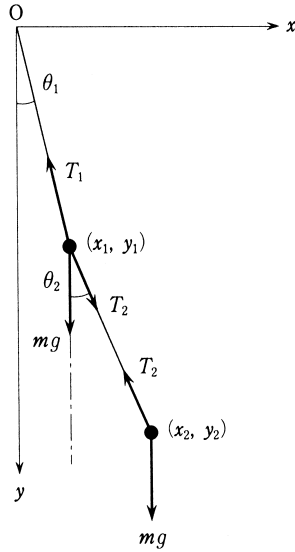


図 1: 二重振り子

微小振動では  $\theta_1, \theta_2$  が小さいので  $\sin \theta_{1,2} = \theta_{1,2}, \cos \theta_{1,2} = 1$  と近似でき,  $x_1 = \ell\theta_1, y_1 = \ell, x_2 = \ell(\theta_1 + \theta_2), y_2 = 2\ell$  としてよい. したがって

$$m\ell\ddot{\theta}_1 = -T_1\theta_1 + T_2\theta_2, \quad 0 = -T_1 + T_2 + mg$$

$$m\ell(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = -T_2\theta_2, \quad 0 = -T_2 + mg$$

となる.  $y$  方向の運動方程式より,  $T_2 = mg, T_1 = 2mg$ . これらを  $x$  方向の運動方程式に代入して整理すると

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

ただし,  $\omega_0^2 = g/\ell$ . これを解くために行列

$$A = \begin{bmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{bmatrix}$$

を対角化する. 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - \lambda & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\omega_0^2\lambda + 2\omega_0^4 = 0.$$

固有値はこの 2 次方程式の 2 根  $\lambda_1 = \omega_1^2, \lambda_2 = \omega_2^2$  として求められ

$$\omega_1^2 = (2 + \sqrt{2})\omega_0^2, \quad \omega_2^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2$$

となる. これらの固有値に対応する固有ベクトルは,  $\lambda_1 = \omega_1^2$  に対しては

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2}\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & -\sqrt{2}\omega_0^2 \end{bmatrix} \mathbf{f}_1 = 0, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

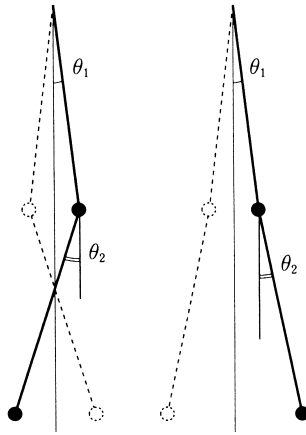


図 2: 二重振り子の基準振動

を得る． $\lambda_2 = \omega_2^2$  に対しては

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & \sqrt{2}\omega_0^2 \end{bmatrix} \mathbf{f}_2 = 0, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

を得る．そこで

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

とすれば，行列  $A$  は

$$F^{-1} \begin{bmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

と対角化される．基準座標  $q_1, q_2$  に対する微分方程式は (4.38) 式となり，解は (4.40) 式で与えられる．元の座標で表せば

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= q_1(t) + q_2(t) \\ &= A \sin(\omega_1 t + \alpha) + B \sin(\omega_2 t + \beta), \\ \theta_2(t) &= -\sqrt{2}q_1(t) + \sqrt{2}q_2(t) \\ &= -\sqrt{2}A \sin(\omega_1 t + \alpha) + \sqrt{2}B \sin(\omega_2 t + \beta). \end{aligned}$$

固有振動数  $\omega_1$  に対する基準振動は  $B = 0$  として

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A \sin(\omega_1 t + \alpha), \\ \theta_2(t) &= -\sqrt{2}A \sin(\omega_1 t + \alpha). \end{aligned}$$

固有振動数  $\omega_2$  に対する基準振動は  $A = 0$  として

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= B \sin(\omega_2 t + \beta), \\ \theta_2(t) &= \sqrt{2}B \sin(\omega_2 t + \beta). \end{aligned}$$

これらの基準振動の様子を図 2 に示す .

## 第 5 講の解答

### 5.1

- (1) 行列  $A, B$  の積  $AB$  の転置行列  $(AB)^T$  について ,  $(AB)^T = B^T A^T$  が成り立つ . ところで ,  $A_1, A_2$  が直交行列であることから ,  $A_1^T A_1 = A_1 A_1^T = E, A_2^T A_2 = A_2 A_2^T = E$  . したがって ,  $(A_1 A_2)^T A_1 A_2 = A_2^T A_1^T A_1 A_2 = A_2^T E A_2 = A_2^T A_2 = E$  . 同様にして ,  $A_1 A_2 (A_1 A_2)^T = E$  .
- (2)  $A = (A^T)^T$  であることから ,  $A$  が直交行列ならば  $A^T$  も直交行列である . ゆえに  $A^{-1} = A^T$  も直交行列である .
- (3) 行列式の定義より ,  $|A| = |A^T|$  . 直交行列  $A$  に対して  $AA^T = E$  であることから ,  $|AA^T| = |A||A^T| = |A|^2 = |E| = 1$  . ゆえに ,  $|A| = \pm 1$  .

5.2  $x, y$  を成分とする 2 次元ベクトルを  $v$  と書くと , これらの 2 次形式は  $v \cdot Av$  と表される .

(1)  $2x^2 + 2xy + 2y^2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

固有方程式は  $|A - \lambda E| = 0$  より

$$(2 - \lambda)^2 - 1 = 0, \quad \lambda = 3, 1.$$

固有ベクトルは ,  $\lambda = 3, 1$  に対してそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

ここで , 固有ベクトルの長さを 1 に規格化した .  $A$  を対角化するための変換行列  $R$  は

$$R = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

となる .  $R$  は直交行列である .

$$R^{-1}AR = A_D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$w = R^{-1}v$  とおけば

$$\begin{aligned}v \cdot Av &= vR \cdot A_D R^{-1}v \\ &= w \cdot A_D w = 3w_1^2 + w_2^2.\end{aligned}$$

ここで,  $w_1, w_2$  はベクトル  $w$  の成分で,  $w_1 = (x+y)/\sqrt{2}, w_2 = (-x+y)/\sqrt{2}$  である.

(2)  $2x^2 + 4xy + 2y^2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

固有方程式とその解は

$$(2 - \lambda)^2 - 4 = 0, \quad \lambda = 4, 0.$$

固有ベクトルは,  $\lambda = 4, 0$  に対してそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

となり,  $A$  を対角化するための直交変換  $R$  も前問 (1) と同じである.

$$R^{-1}AR = A_D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

したがって,  $w = R^{-1}v$  とおけば

$$\begin{aligned}v \cdot Av &= vR \cdot A_D R^{-1}v \\ &= w \cdot A_D w = 4w_1^2, \quad w_1 = (x+y)/\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(3)  $2x^2 + 6xy + 2y^2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

固有方程式とその解は

$$(2 - \lambda)^2 - 9 = 0, \quad \lambda = 5, -1.$$

固有ベクトルは,  $\lambda = 5, -1$  に対してそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

となり,  $A$  を対角化するための直交変換  $R$  も前問 (1), (2) と同じである.

$$R^{-1}AR = A_D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

したがって,  $w = R^{-1}v$  とおけば

$$\begin{aligned}v \cdot Av &= vR \cdot A_D R^{-1}v \\ &= w \cdot A_D w = 5w_1^2 - w_2^2, \\ w_1 &= (x+y)/\sqrt{2}, \quad w_2 = (-x+y)/\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(4)  $2x^2 + 2\sqrt{3}xy$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

固有方程式とその解は

$$\lambda(\lambda - 2) - 3 = 0, \quad \lambda = 3, -1.$$

固有ベクトルは,  $\lambda = 3, -1$  に対してそれぞれ

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

これより,  $A$  を対角化するための直交変換の行列  $R$  は

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

となる.

$$R^{-1}AR = A_D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

したがって,  $w = R^{-1}v$  とおけば

$$\begin{aligned}v \cdot Av &= vR \cdot A_D R^{-1}v \\ &= w \cdot A_D w = 3w_1^2 - w_2^2, \\ w_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \quad w_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y.\end{aligned}$$

### 5.3

- (1) 棒の中心を原点にとり, 棒に沿って  $x$  軸を, 棒に垂直な 2 方向を  $y$  軸と  $z$  軸にとる. このように座標軸を選べば, 棒の太さを無視することから  $\rho(r) = \rho\delta(y)\delta(z)$ ,  $\rho = M/\ell$  である. これを慣性テンソルの定義式に代入すれば,  $I_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ) である.

対角成分については

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \rho \int (y^2 + z^2) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 0, \\
 I_{yy} &= \rho \int (x^2 + z^2) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = \rho \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx \\
 &= \frac{1}{12} \rho \ell^3 = \frac{1}{12} M \ell^2, \\
 I_{zz} &= \rho \int (x^2 + y^2) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = \rho \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx \\
 &= \frac{1}{12} \rho \ell^3 = \frac{1}{12} M \ell^2.
 \end{aligned}$$

- (2) 長方形の中心を原点にとり，長さが  $a$  の辺に平行に  $x$  軸を，長さが  $b$  の辺に平行に  $y$  軸をとる． $z$  軸は長方形の面に垂直な方向にとる．厚さを無視することから， $\rho(\mathbf{r}) = \rho \delta(z)$ ， $\rho = M/ab$  である．また， $i \neq j$  に対して  $I_{ij}$  の被積分関数は  $x, y$  に関して奇関数であることから  $I_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ) となる．対角成分については

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \rho \int (y^2 + z^2) \delta(z) dx dy dz = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \\
 &= \frac{1}{12} \rho a b^3 = \frac{1}{12} M b^2, \\
 I_{yy} &= \rho \int (x^2 + z^2) \delta(z) dx dy dz = \rho \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \\
 &= \frac{1}{12} \rho a^3 b = \frac{1}{12} M a^2, \\
 I_{zz} &= \rho \int (x^2 + y^2) \delta(z) dx dy dz = \rho \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{-b/2}^{b/2} dy + \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \\
 &= \frac{1}{12} \rho (a^3 b + a b^3) = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).
 \end{aligned}$$

- (3) 球の中心を原点にとり，球座標

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

を導入する．体積要素は  $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$  である．また，密度は  $\rho(\mathbf{r}) = \rho$  ( $r \leq R$ )， $\rho = 3M/4\pi R^3$  と表される．

$$\begin{aligned}
 xy &= r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi, \\
 yz &= r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, \\
 zx &= r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi,
 \end{aligned}$$

であるから， $I_{ij}$  ( $i \neq j$ ) の積分はいずれも

$$\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$



によりゼロとなる．対角成分については次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \rho \int (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_0^R r^4 dr \int (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) d \cos \theta d \varphi \\
 &= \rho \frac{R^5}{5} \int (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \theta) d \cos \theta d \varphi = 2\pi \rho \frac{R^5}{10} \int_{-1}^1 (1 + t^2) dt \\
 &= 2\pi \rho \frac{R^5}{10} \frac{8}{3} = \frac{2}{5} M R^2, \\
 I_{yy} &= \rho \int (z^2 + x^2) dx dy dz = \rho \int_0^R r^4 dr \int (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) d \cos \theta d \varphi \\
 &= \rho \frac{R^5}{5} \int (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) d \cos \theta d \varphi = 2\pi \rho \frac{R^5}{10} \int_{-1}^1 (1 + t^2) dt \\
 &= 2\pi \rho \frac{R^5}{10} \frac{8}{3} = \frac{2}{5} M R^2, \\
 I_{zz} &= \rho \int (x^2 + y^2) dx dy dz = 2\pi \rho \int_0^R r^4 dr \int_{-1}^1 \sin^2 \theta d \cos \theta \\
 &= 2\pi \rho \frac{R^5}{5} \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = 8\pi \rho \frac{R^5}{15} = \frac{2}{5} M R^2.
 \end{aligned}$$

球対称性に着目すれば， $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$  のはずであり，計算結果もそれを裏付けるものになっている．逆に，はじめから球対称性に着目すれば，以下のように計算が簡単になる．

$$\begin{aligned}
 I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} &= 2\rho \int (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 2\rho \int r^4 dr \sin \theta d \theta d \varphi \\
 &= 8\pi \rho \frac{R^5}{5} = \frac{6}{5} M R^2.
 \end{aligned}$$

これより

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{3}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) = \frac{2}{5} M R^2$$

が得られる．

- (4) 直方体の中心を原点にとり， $x, y, z$  軸をそれぞれ辺  $a, b, c$  に平行にとる． $\rho(\mathbf{r}) = \rho$ ， $\rho abc = M$ ． $I_{ij}$  ( $i \neq j$ ) の被積分関数は積分変数の奇関数であるから， $I_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ) である．対角成分については

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (y^2 + z^2) \\
 &= \rho \left( a \frac{b^3}{12} c + ab \frac{c^3}{12} \right) = \frac{M}{12} (b^2 + c^2), \\
 I_{yy} &= \frac{M}{12} (c^2 + a^2), \\
 I_{zz} &= \frac{M}{12} (a^2 + b^2).
 \end{aligned}$$

5.4 (5.44) 式の左辺を行列で表せば

$$\begin{bmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

行列の積を計算し,  $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$  の関係を用いれば再び

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{bmatrix}$$

が得られる.

5.5  $x'^{\mu} = g'^{\mu\nu} x'_{\nu}$  に  $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} x^{\rho} = \Lambda^{\mu}_{\rho} g^{\rho\sigma} x_{\sigma}$ ,  $x'_{\nu} = x_{\sigma} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu}$  を代入して  $x_{\sigma}$  の係数を比較することにより

$$\Lambda^{\mu}_{\rho} g^{\rho\sigma} = g'^{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu}.$$

この両辺に  $\Lambda^{\kappa}_{\sigma}$  をかけて

$$\Lambda^{\kappa}_{\sigma} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu} = \delta^{\kappa}_{\nu}$$

の関係を用いれば

$$g'^{\mu\kappa} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\kappa}_{\sigma} g^{\rho\sigma}.$$

これは  $g^{\mu\nu}$  が 2 階の反変テンソルとして変換することを示している. また,

$$\delta^{\kappa}_{\nu} = \Lambda^{\kappa}_{\sigma} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu} = \Lambda^{\kappa}_{\rho} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu} \delta^{\rho}_{\sigma}$$

が成り立つ. これは  $\delta^{\mu}_{\nu}$  が 1 階共変 1 階反変のテンソルとして変換し, しかもその値は不変であることを示している.

5.6

$$\begin{aligned} p^0 c &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = m_0 c^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{c^2} \right) + \dots \right\} \\ &= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \end{aligned}$$

## 第6講の解答

### 6.1

- (1) 行列式の定義 (4.9) において,  $n = 3$  の場合で  $A_{1i} = A_i, A_{2j} = B_j, A_{3k} = C_k$  とおき, また自然数  $1, 2, 3$  の置換の符号は  $\varepsilon_{ijk}$  そのものであることに注意すれば, ここで与えられた関係式は行列式の定義そのものである.
- (2) 右辺の行列式の行を入れかえ, 次に列を入れかえれば

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{左辺}. \end{aligned}$$

- (3) 前問の関係式において  $p = i$  とおき,  $i$  について和をとればよい.
- (4) 前問の関係式において  $q = j$  とおき,  $j$  について和をとればよい.
- (5) 前問の関係式において  $r = k$  とおき,  $k$  について和をとればよい.

### 6.2

- (1)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$  とすれば,  $C_i = \sum_{pq} \varepsilon_{ipq} A_p B_q$ . したがって

$$\begin{aligned} \sum_i \varepsilon_{ijk} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i &= \sum_i \varepsilon_{ijk} C_i = \sum_{ipq} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ipq} A_p B_q \\ &= \sum_{pq} (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) A_p B_q = A_j B_k - A_k B_j. \end{aligned}$$

- (2) (6.8) 式の定義より

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \sum_i a_i (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_i = \sum_{ijk} a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} &= \sum_j b_j (\mathbf{c} \times \mathbf{a})_j = \sum_{jki} b_j \varepsilon_{jki} c_k a_i \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \sum_k c_k (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \sum_{kij} c_k \varepsilon_{kij} a_i b_j \end{aligned}$$

3階交代テンソルの性質  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$  より, 上の3式は等しい.

(3)  $\partial/\partial x_k = \partial_k$  と表せば

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \text{grad})v_i &= \sum_k v_k \partial_k v_i = \sum_k v_k (\partial_k v_i - \partial_i v_k) + \sum_k v_k \partial_i v_k \\ &= \sum_{kp} v_k \varepsilon_{pki} (\nabla \times \mathbf{v})_p + \partial_i \left( \frac{1}{2} v^2 \right) \\ &= - \sum_{kp} \varepsilon_{ikp} v_k (\text{rot } \mathbf{v})_p + \partial_i \left( \frac{1}{2} v^2 \right). \end{aligned}$$

これより与式が得られる.

(4)  $\text{rot rot } \mathbf{A}$  の第  $p$  成分について回転  $\text{rot}$  の定義を用いれば

$$\begin{aligned} (\text{rot rot } \mathbf{A})_p &= \sum_{qi} \varepsilon_{pqi} \partial_q (\text{rot } \mathbf{A})_i = \sum_{qijk} \varepsilon_{pqi} \varepsilon_{ijk} \partial_q \partial_j A_k \\ &= \sum_{qijk} (\delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}) \partial_q \partial_j A_k = \partial_p \left( \sum_k \partial_k A_k \right) - \sum_j \partial_j \partial_j A_p \\ &= \partial_p \text{div } \mathbf{A} - \Delta A_p. \end{aligned}$$

これより与式が得られる.

**6.3**  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  より,  $r dr = x dx + y dy + z dz$  であるから,  $\partial r / \partial x = x/r$ ,  $\partial r / \partial y = y/r$ ,  $\partial r / \partial z = z/r$ , また,  $\hat{\mathbf{r}} = (x/r, y/r, z/r)$ .

$$(1) \quad (\text{grad } r)_x = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad (\text{grad } r)_y = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad (\text{grad } r)_z = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$(2) \quad \left( \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{x}{r^3}, \quad \text{etc}$$

$$(3) \quad (\text{grad } f(r))_x = \frac{\partial}{\partial x} f(r) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{df}{dr} = \frac{df}{dr} \frac{x}{r}, \quad \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \text{div} (f(r)\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} (f(r)x) + \frac{\partial}{\partial y} (f(r)y) + \frac{\partial}{\partial z} (f(r)z) \\ &= 3f(r) + \text{grad } f(r) \cdot \mathbf{r} = 3f(r) + \frac{df}{dr} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} \\ &= 3f(r) + r \frac{df}{dr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \text{div grad } r &= \text{div } \hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r} \right) \\ &= \frac{3}{r} + \mathbf{r} \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{3}{r} - \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r} \end{aligned}$$

$$(6) \quad \text{div grad } f(r) = \text{div} \left( \frac{df}{dr} \hat{\mathbf{r}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{df}{dr} \frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{df}{dr} \frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{df}{dr} \frac{z}{r} \right) \\
&= \frac{3}{r} + \mathbf{r} \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) = \frac{3}{r} + \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) \\
&= \frac{3}{r} + r \left( -\frac{1}{r^2} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} \right) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr}
\end{aligned}$$

$$(7) \quad (\text{rot} \mathbf{r})_x = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \text{ etc.}$$

$$\begin{aligned}
(8) \quad (\text{rot} (f(r)\mathbf{r}))_x &= \frac{\partial}{\partial y} (f(r)z) - \frac{\partial}{\partial z} (f(r)y) = \frac{\partial f}{\partial y} z - \frac{\partial f}{\partial z} y \\
&= \left( \frac{y}{r} z - \frac{z}{r} y \right) \frac{df}{dr} = 0, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

6.4 対称性から考えて，同心球面  $S$  上では電場は球面に垂直で，その大きさは中心からの距離  $r$  のみの関数  $E(r)$  で表されるはずである．ガウスの法則 (6.44) を適用すれば

$$\begin{aligned}
\int_S D_n dS &= \varepsilon_0 E(r) \int_S dS = 4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r) \\
&= \int_V \rho dV = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho & (r \leq a) \\ \frac{4\pi}{3} a^3 \rho & (r \geq a) \end{cases} .
\end{aligned}$$

したがって

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \right) \frac{1}{r^2} & (r \leq a) \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{4\pi}{3} a^3 \rho \right) \frac{1}{r^2} & (r \geq a) \end{cases} .$$

この結果を見ると，電場は考えている同心球面内のすべての電荷が中心に集まった場合と同じであることがわかる．

## 第7講の解答

7.1  $P_1$  を座標原点にとり， $x$  軸を鉛直下方に， $y$  軸を水平にとる．質点の質量を  $m$ ，重力加速度を  $g$  とすれば，エネルギーの保存法則により

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g x, \quad v = \sqrt{2 g x}.$$

軌道の方程式を  $y = y(x)$  とすれば軌道に沿った線要素は  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$  であるから

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2 g x}} dx.$$

したがって、質点が  $P_1 = (0, 0)$  から  $P_2 = (x_2, y_2)$  まで移動する時間は

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}} dx$$

で与えられる。そこで

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}$$

とおけば、オイラーの方程式 (7.10) は

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y'} &= \left\{ \frac{y'^2}{x(1+y'^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} = \text{定数, より } \frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a} \text{とおけば} \\ \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{x}{2a-x}}, \quad y(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{t}{2a-t}} dt. \end{aligned}$$

この積分を実行するために  $t = a(1 - \cos \varphi)$   $0 \leq \varphi \leq \theta$ ,  $x = a(1 - \cos \theta)$  とおけば

$$\int_0^x \sqrt{\frac{t}{2a-t}} dt = 2a \int_0^\theta \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = a \int_0^\theta (1 - \cos \varphi) d\varphi = a(\theta - \sin \theta).$$

したがって、軌道の方程式はパラメータ表示

$$\begin{cases} x = a(1 - \cos \theta) \\ y = a(\theta - \sin \theta) \end{cases}$$

で与えられ、サイクロイドと呼ばれる曲線である。  $a$  はこの曲線が  $P_2(x_2, y_2)$  を通ることから定まる。

## 7.2 これらのラグランジアンに対する作用積分は

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(t, q, \dot{q}) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt \\ &= S + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1). \end{aligned}$$

$S'$  と  $S$  の差は両端のみの関数なので変分には寄与しない。したがって  $\delta S' = \delta S$  であるから、同一のラグランジュ方程式が得られる。

7.3 図3のように振り子の振動面内で、支点が運動する軸を  $x$  軸にとり、支点の運動の中心を座標原点とする。  $y$  軸を鉛直下方にとり、振り子の長さを  $\ell$ , 振れの角度を  $\theta$  とすれば

$$x = a \cos \gamma t + \ell \sin \theta, \quad y = \ell \cos \theta$$

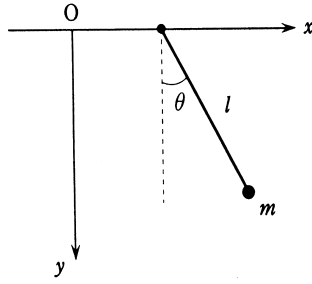


図 3: 支点が運動する単振動

である．これより

$$\dot{x} = -a\gamma \sin \gamma t + \ell \dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y} = -\ell \dot{\theta} \sin \theta.$$

おもりの質量を  $m$  , 重力加速度を  $g$  とすれば , ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg(\ell - \ell \cos \theta) \\ &= \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 + m a \ell \gamma^2 \cos \gamma t \sin \theta + m g \ell \cos \theta \\ &+ \frac{d}{dt} \left\{ m a \gamma \ell \sin \gamma t \sin \theta - m g \ell t + \frac{m}{4} a^2 \gamma^2 t - \frac{m}{8} a^2 \gamma \sin 2\gamma t \right\} \end{aligned}$$

となる．前問の結果により最後の項は無視できるから , ラグランジュ方程式は

$$\ell \ddot{\theta} - a\gamma^2 \cos \gamma t \cos \theta + g \sin \theta = 0$$

と求まる．微小振動の場合には ,  $\sin \theta \simeq \theta$  ,  $\cos \theta \simeq 1$  と近似して

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A \cos \gamma t, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}, \quad A = \frac{a\gamma^2}{\ell}.$$

これは第 3 講で学んだ 2 階線形常微分方程式である．3.3.2 項の解法にしたがって解く．  
 斉次方程式の解は ,  $\theta_1(t) = \sin \omega_0 t$  ,  $\theta_2(t) = \cos \omega_0 t$  である．ロンスキアンは (3.32) 式により ,  $W[\theta_1(t), \theta_2(t)] = -1$  となる． $f(t) = A \cos \gamma t$  として (3.33) 式を計算することにより

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{A}{2} \left\{ \frac{\sin(\omega_0 + \gamma)t}{\omega_0 + \gamma} + \frac{\sin(\omega_0 - \gamma)t}{\omega_0 - \gamma} \right\} + C_1, \\ C_2(t) &= \frac{A}{2} \left\{ \frac{\cos(\omega_0 + \gamma)t}{\omega_0 + \gamma} + \frac{\cos(\omega_0 - \gamma)t}{\omega_0 - \gamma} \right\} + C_2. \end{aligned}$$

これらを用いて解は (3.30) 式により

$$\theta(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{A\omega_0}{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \gamma t$$

と求まる．右辺第3項は支点の振動によるもので， $\gamma$ が固有振動数 $\omega_0$ に近づくと，この振動系は外部からエネルギーを吸収して振幅が増大する．このような場合にはもはや微小振動の近似の範囲を超えるのでより厳密な取り扱いが必要となる．

#### 7.4

- (1) 無限に広がった平面を  $xy$  面とすれば，場のポテンシャル・エネルギーは  $z = 0$  で一定の値を持ち， $x, y$  には依存しない．したがってラグランジアンは  $xy$  面内での平行移動および  $z$  軸の周りの回転に対して不変であり，位置座標  $x, y$  および  $z$  軸の周りの回転角がサイクリック座標となる．このことから， $P_x, P_y, L_z$  が保存量となる．
- (2) 半平面として  $xy$  面の上半面を考えれば，場のポテンシャルエネルギーは  $x$  軸方向の平行移動に対して不変であり， $x$  がサイクリック座標となる．したがって  $P_x$  が保存されることになる．
- (3) 円柱の軸を  $z$  軸にとれば，この場のポテンシャル・エネルギーは  $z$  軸方向の平行移動と  $z$  軸の周りの回転に対して不変である．したがって  $z$  および  $z$  軸の周りの回転角がサイクリック座標となる．これより， $P_z, L_z$  が保存される．
- (4) らせんの軸を  $z$  軸にとり，らせんのあゆみを  $\ell$  とする．ポテンシャル・エネルギーおよびラグランジアンは  $z$  軸の周りに  $\delta\varphi$  回転し，さらに  $z$  軸に沿って  $(\ell/2\pi)\delta\varphi$  だけ移動することに対して不変である．したがって

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial\varphi}\delta\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}\right)\delta z + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)\delta\varphi \\ &= \frac{d}{dt}\left(P_z\frac{\ell}{2\pi} + L_z\right)\delta\varphi = 0.\end{aligned}$$

これより

$$P_z\frac{\ell}{2\pi} + L_z = \text{一定}.$$

- (5) 中心力の場のポテンシャルエネルギーは力の中心からの距離  $r$  のみの関数であるから，例 7.3 と同様に角運動量ベクトルは運動の軌道面に垂直な一定方向 ( $z$  軸方向) を向いており， $L$  の大きさ ( $L_z$ ) および方向が保存される．すなわち， $L_x, L_y, L_z$  が保存されることになる．

#### 7.5

- (a) 直交座標では

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + G\frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$



球座標 ,  $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$  では線要素  $ds$  が

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (r \sin \theta)^2(d\varphi)^2$$

と表される .  $v^2 = (ds/dt)^2$  であるから

$$L = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + (r \sin \theta)^2\dot{\varphi}^2 \right) + G\frac{Mm}{r}$$

である .

(b) 直交座標での運動方程式は  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  と表せば

$$m\ddot{x}_i = -G\frac{Mm}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad i = 1, 2, 3.$$

球座標では

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - G\frac{Mm}{r^2} \\ m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 \\ m\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}$$

7.6 変数が  $t, x$  の場合の連続的な場に対するオイラー方程式は (7.47) 式で与えられる .

変数の数が増えても同様の公式が成り立つ . (7.46) 式に対応する作用積分は

$$S[\varphi] = \int \mathcal{L} d^4x$$

で与えられ , オイラー方程式は次のように与えられる .

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0.$$

ただし , ここでアインシュタインの縮約規則を用いた . これを実際に計算すれば

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \varphi = 0$$

を得る . ここで ,  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  はラプラシアンと呼ばれる微分演算子である .

## 第 8 講の解答

8.1 (8.4) 式に自由端の境界条件  $y'(a) = y'(b) = 0$  を課すことにより

$$\begin{aligned} c_1 e^{i\sqrt{\lambda}a} - c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}a} &= 0, \\ c_1 e^{i\sqrt{\lambda}b} - c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}b} &= 0. \end{aligned}$$

固定端の場合と同様に、この  $c_1, c_2$  に関する連立 1 次方程式が自明でない解をもつためには (8.9) 式および (8.10) 式が成り立つ必要がある。ただし、今度は  $n = 0$  を含めてよい。上式より、 $c_1 = c \exp(-i\sqrt{\lambda}a)$ 、 $c_2 = c \exp(i\sqrt{\lambda}a)$  とおくことができる。したがって、自由端の場合の解は

$$y(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-a)\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

および、これらの 1 次結合が解である。

8.2  $n = 0$  のときは  $H_0(x) = 1$  で、明らかに成り立つ。そこで  $n$  に対してこの公式が成り立つと仮定して、 $n + 1$  のときに成り立つことを示せばよい。仮定により

$$\frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-x^2} \right) = (-1)^n \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s \frac{n!}{s!(n-2s)!} e^{-x^2} (2x)^{n-2s}.$$

これをもう一度  $x$  について微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left( e^{-x^2} \right) &= (-1)^{n+1} e^{-x^2} \sum_{s=0}^{[n/2]} \left\{ (-1)^s \frac{n!}{s!(n-2s)!} (2x)^{n+1-2s} \right. \\ &\quad \left. - (-1)^s \frac{n!}{s!(n-2s)!} 2(n-2s)(2x)^{n-1-2s} \right\}. \end{aligned}$$

右辺の  $s$  に関する和において、第 1 項の  $s = m$  と第 2 項の  $s = m - 1$  とを組み合わせると和をとれば

$$\begin{aligned} &(-1)^m \frac{n!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n+1-2m} + \\ &(-1)^m \frac{n!}{(m-1)!(n-2m+2)!} 2(n-2m+2)(2x)^{n+1-2m} \\ &= (-1)^m (2x)^{n+1-2m} \frac{1}{m!} \{ (n-2m+1)(n-2m+2) \cdots n + \\ &\quad 2m(n-2m+2)(n-2m+3) \cdots n \} \\ &= (-1)^m (2x)^{n+1-2m} \frac{1}{m!} (n-2m+2) \cdots n(n+1) \\ &= (-1)^m (2x)^{n+1-2m} \frac{(n+1)!}{m!(n+1-2m)!} \end{aligned}$$

となるので、結局、 $s$  に関する和は次のようになる。

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left( e^{-x^2} \right) = (-1)^{n+1} e^{-x^2} \sum_{s=0}^{[(n+1)/2]} (-1)^s \frac{(n+1)!}{s!(n+1-2s)!} (2x)^{n+1-2s}.$$

したがって  $n + 1$  に対して与えられた公式が成り立つ。

8.3 (8.39) 式によりフーリエ係数を求める。

(1)  $f(x) = |x|$  は偶関数であるから,  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi^2.$$

$a_n (n = 1, 2, \dots)$  を計算するために, 次の積分を考える.

$$\int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx.$$

これを  $n$  で微分することにより

$$\int x \cos nx dx = \frac{1}{n^2} \cos nx + \sin nx.$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

これらにより

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right\}.$$

(2)  $f(x) = x^2$  は偶関数であるから,  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{3} \pi^3.$$

$a_n$  を計算するために

$$\int \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx$$

を  $n$  について 2 回微分することにより

$$\int x^2 \cos nx dx = -\frac{2}{n^3} \sin nx + \frac{x}{n^2} \cos nx + x \sin nx$$

を得る. したがって

$$a_n = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{4\pi}{n^2} (-1)^n.$$

これらにより

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left\{ \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right\}.$$

(3)  $f(x)$  は奇関数であるから,  $a_n = 0$  である.

$$b_n = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left\{ -\int_{-\pi}^0 \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right\} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{2}{n} (1 - (-1)^n).$$

したがって

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right\}.$$

8.4 (8.47) 式によりフーリエ変換を求める.

$$(1) \quad F(k) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} e^{-iky} \, dy = \frac{\sin k\ell}{k\ell}$$

$$(2) \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(a-ik)y} \, dy + \int_0^{\infty} e^{-(a+ik)y} \, dy \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}$$

$$(3) \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a+ik)y} \, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + ik}$$

$$(4) \quad F(k) = \frac{1}{2} \int_{-\ell}^{\ell} \cos \alpha y e^{-iky} \, dy = \int_0^{\ell} \cos \alpha y \cos ky \, dy \\ = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (\cos(\alpha + k)y + \cos(\alpha - k)y) \, dy \\ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(\alpha + k)\ell}{\alpha + k} + \frac{\sin(\alpha - k)\ell}{\alpha - k} \right\}$$

8.5  $f(x)$  は  $x = 0$  あるいは  $x = \pm a$  を含む適当な区間で十分に滑らか, すなわち  $f(x)$  は連続で, かつどんな次数の導関数も連続であるような任意の関数とする. このとき  $x = 0$  を含む適当な区間での積分

$$\int \delta(ax) f(x) \, dx = \frac{1}{|a|} \int \delta(t) f(t/a) \, dt = \frac{1}{|a|} f(0)$$

より, (1) がいえる. (2) については  $f(x)$  は  $x = 0$  で有限であるから

$$\int x \delta(x) f(x) \, dx = \int \delta(x) \{x f(x)\} \, dx = 0$$

である. (3) は部分積分を行って

$$\int \delta'(x) f(x) \, dx = - \int \delta(x) f'(x) \, dx = -f'(0)$$

より成り立つ. (4) は  $x = \pm a$  を含む適当な区間での積分を  $x \geq 0$  と  $x < 0$  の領域に分け,  $x^2 - a^2 = t$  と変数変換をすれば

$$\int \delta(t) \{f(\sqrt{t^2 + a^2}) + f(-\sqrt{t^2 + a^2})\} \frac{dt}{2\sqrt{t^2 + a^2}} = \frac{1}{2|a|} (f(a) + f(-a))$$

であることからいえる.

## 8.6

(1)  $\exp \theta = \cos \theta + i \sin \theta$  で,  $\sin \theta$  は奇関数であることから, (8.52) 式に帰着する.

(2) フーリエ展開式 (8.40) において,  $f(x)$  が奇関数の時は  $a_n = 0$  である. したがって

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{L/2} f(y) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dy.$$

$L = 2\ell$  とおくことにより, 問題の公式が得られる.

(3) フーリエ展開式 (8.40) において,  $f(x)$  が偶関数の時は  $b_n = 0$  である. あとは前問と同様にして問題の公式が得られる.

## 8.7

(a) 二項級数の公式で  $a = 1, x = -t, k = -1/2$  とおく.

$$\begin{aligned} k(k-1)\cdots(k-s+1) &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-s+1\right) \\ &= \frac{(-1)^s}{2^s} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s-1), \end{aligned}$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s-1) = \frac{(2s)!}{2^s s!}.$$

これらにより問題の公式が導ける.

(b) 2 項級数の公式より

$$(2xh - h^2)^s = \sum_{r=0}^s \frac{s!}{r!(s-r)!} (-1)^r 2^{s-r} x^{s-r} h^{s+r}.$$

これと前問の結果を用いて

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^s \frac{(2s)!}{2^{s+r} s! r! (s-r)!} (-1)^r x^{s-r} h^{s+r}.$$

そこで  $s+r = n$  とおき, 級数の和を

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^s \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdots$$

と変換する. ここで

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} n/2 & n : \text{偶数} \\ (n-1)/2 & n : \text{奇数} \end{cases}$$

である．あとは  $n$  が偶数 ( $n = 2\ell$ ) の時は  $s - r = 2\ell - 2r = 2m$  とおき， $n$  が奇数 ( $n = 2\ell + 1$ ) の時は  $s - r = 2\ell - 2r + 1 = 2m + 1$  とおいて  $r$  に関する和を  $m$  に関する和に直し，

$$(2\ell - 2m)!! = 2^{\ell-m}(\ell - m)!, \quad (2\ell + 2m - 1)!! = \frac{(2\ell + 2m)!}{2^{\ell+m}(\ell + m)!}$$

に注意して，ルジャンドル多項式の定義式 (8.13), (8.14) と比較すればよい．

## 第9講の解答

9.1 正則な関数  $\exp(-z^2/2)$  を閉じた積分路  $C$  に沿って積分したものはコーシーの積分定理によりゼロである．したがって

$$\begin{aligned} \int_{-L+ik}^{L+ik} e^{-z^2/2} dz &= e^{k^2/2} \int_{-L}^L e^{-y^2/2} e^{-iky} dy \\ &= \int_{-L}^L e^{-y^2/2} dy + \int_L^{L+ik} e^{-z^2/2} dz + \int_{-L+ik}^{-L} e^{-z^2/2} dz. \end{aligned}$$

ところで，右辺第2項と第3項は

$$\begin{aligned} \left| \int_L^{L+ik} e^{-z^2/2} dz \right| &\leq e^{-L^2/2} \int_0^k e^{t^2/2} dt \rightarrow 0 \quad (L \rightarrow \infty), \\ \left| \int_{-L+ik}^{-L} e^{-z^2/2} dz \right| &\leq e^{-L^2/2} \int_0^k e^{t^2/2} dt \rightarrow 0 \quad (L \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

であるから

$$e^{k^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} e^{-iky} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}.$$

ここで，第1講演習問題 1.6 の結果を用いた．したがって

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} e^{-iky} dy = e^{-k^2/2}.$$

9.2  $f(z)$  のローラン展開は次の形をしている．

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots.$$

両辺に  $(z - z_0)^n$  をかけると， $(z - z_0)^n f(z)$  は  $(z - z_0)$  の冪級数になり，それを  $n - 1$  回微分すると，初項が  $(n - 1)!c_{-1}$  の冪級数になる．

9.3  $f(z)$  は次のように部分分数に展開できる．

$$f(z) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 2} \right)$$

$$\frac{1}{z-1} = \begin{cases} -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n & |z| < 1 \\ \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} & |z| > 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{z+2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{1+z/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n & |z| < 2 \\ \frac{1}{z(1+2/z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z}\right)^n & |z| > 2 \end{cases}$$

したがって

$$f(z) = \begin{cases} -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n & |z| < 1 \\ \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n & 1 < |z| < 2 \\ \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n 2^{n-1}) \frac{1}{z^n} & |z| > 2 \end{cases}$$

次に,  $z=1$  を中心とするローラン展開を求める.  $z-1=t$  とおけば

$$f(z) = \frac{1}{t(t+3)}$$

$$\frac{1}{t+3} = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{1}{1+t/3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{3}\right)^n & |t| < 3 \\ \frac{1}{t} \frac{1}{1+3/t} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{t}\right)^n & |t| > 3 \end{cases}$$

したがって

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n & |z-1| < 3 \\ \frac{1}{9} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(z-1)^n} & |z-1| > 3 \end{cases}$$

#### 9.4

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

であるから,  $f(z)$  は  $z = \pm i$  に 1 位の極をもち, このうち  $z = i$  における留数は問題 9.2 の結果を用いて

$$\text{Res}[f(z); z = i] = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \frac{1}{2i}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= 2\pi i \frac{1}{2i} \\ &= \int_{-R}^R f(x)dx + \int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta.\end{aligned}$$

このうち，円周上の積分は  $R \rightarrow \infty$  のとき

$$\left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta \right| = \left| \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta} + 1}d\theta \right| = O\left(\frac{1}{R}\right) \rightarrow 0.$$

したがって

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \pi.$$

$f(z) = 1/(1+z^2)^2$  のときは， $z = \pm i$  は 2 位の極となる．この場合， $z = i$  での留数は

$$\text{Res}[f(z); z = i] = \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2}{(1+z^2)^2} \right) = \frac{1}{4i}$$

と求められる．したがって

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}dx &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}dx \\ &= 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

## 9.5

(1)  $f(x) = \sin ax = (e^{iax} - e^{-iax})/2i$  を (9.19) 式に代入して計算する．

$$\int_0^\infty e^{-(s \mp ia)x} dx = \frac{1}{s \mp ia}$$

であるから，これらの組み合わせにより求める結果が得られる．

(2)  $f(x) = \cos ax = (e^{iax} + e^{-iax})/2$  として，(1) と同様に計算すればよい．

(3)  $f(x) = e^{bx} \sin ax = (e^{(b+ia)x} - e^{(b-ia)x})/2i$  を (9.19) 式に代入して計算する．

$$\int_0^\infty e^{-(s-b \mp ia)x} dx = \frac{1}{(s-b) \mp ia}$$

であるから，これらの組み合わせにより求める結果が得られる．

(4)  $f(x) = e^{bx} \cos ax = (e^{(b+ia)x} + e^{(b-ia)x})/2$  として，(3) と同様に計算すればよい．



## 9.6

(1) この微分方程式のラプラス変換を計算する．

$$\mathcal{L}[y''](s) + 3\mathcal{L}[y'](s) - 4\mathcal{L}[y](s) = 0,$$

$$(s^2 + 3s - 4)\mathcal{L}[y](s) - \{(s + 3)y(0) + y'(0)\} = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y](s) &= \frac{(s + 3)y(0) + y'(0)}{(s + 4)(s - 1)} \\ &= \frac{y(0)}{5} \left( \frac{4}{s - 1} + \frac{1}{s + 4} \right) + \frac{y'(0)}{5} \left( \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s + 4} \right).\end{aligned}$$

これを逆変換することにより

$$y(x) = \frac{1}{5}(4y(0) + y'(0))e^x + \frac{1}{5}(y(0) - y'(0))e^{-4x}$$

が解として得られる． $y(0)$  および  $y'(0)$  は初期条件として与えられる．

(2) 与えられた微分方程式のラプラス変換を計算し， $\mathcal{L}[y](s)$  について解く．

$$(s^2 + s - 2)\mathcal{L}[y](s) - (s + 1)y(0) - y'(0) = \frac{1}{s^2 + 1},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y](s) &= \frac{y(0)(s + 1) + y'(0)}{(s - 1)(s + 2)} + \frac{1}{(s - 1)(s + 2)(s + i)(s - i)} \\ &= \frac{y(0)}{3} \left( \frac{2}{s - 1} + \frac{1}{s + 2} \right) + \frac{y'(0)}{3} \left( \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s + 2} \right) \\ &\quad + \left( \frac{3i - 1}{20} \frac{1}{s - i} - \frac{3i + 1}{20} \frac{1}{s + i} + \frac{1}{6} \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{15} \frac{1}{s + 2} \right).\end{aligned}$$

これを逆変換することにより

$$\begin{aligned}y(x) &= -\frac{3}{10} \sin x - \frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{6}e^x - \frac{1}{15}e^{-2x} \\ &\quad + \frac{y(0)}{3}(2e^x + e^{-2x}) + \frac{y'(0)}{3}(e^x - e^{-2x})\end{aligned}$$

が解として得られる．

## 第 10 講の解答

### 10.1

(a)  $f(t, x) = T(t)X(x)$  とおいて (10.7) 式に代入すれば

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dT}{dt}X(x) = \kappa T(t) \frac{d^2 X}{dx^2}.$$

これより，次式を得る．

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT}{dt} = \kappa \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2}.$$

この式の左辺は  $t$  だけの関数であり，右辺は  $x$  だけの関数である． $x, t$  は独立な変数であるから，この式が成り立つためには左右両辺が定数でなければならない．

これを  $-\kappa\mu^2$  とおけば

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa\mu^2 T, \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = -\mu^2 X.$$

(b)  $C, \mu, \lambda$  を任意定数として

$$f(t, x) = C e^{-\kappa\mu^2 t} \cos[\mu(x - \lambda)]$$

が常微分方程式の解である．一般解は  $C, \mu, \lambda$  のすべての可能な値について加え合わせた

$$f(t, x) = \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty C(\lambda) e^{-\kappa\mu^2 t} \cos[\mu(x - \lambda)] d\lambda.$$

で与えられる．

(c) 一般解で  $t = 0$  とおけば

$$g(x) = \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty C(\lambda) \cos[\mu(x - \lambda)] d\lambda.$$

一方，フーリエの積分定理 (8.45) 式より

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty g(\lambda) \cos(\mu(x - \lambda)) d\lambda$$

が成り立つから，これらの2式を比較することにより

$$C(\lambda) = \frac{1}{\pi} g(\lambda)$$

である．

(d) 次に  $\mu$  に関する積分を実行するために第1講演習問題 1.6 で導いた公式を利用する．

$$\int_0^\infty e^{-\kappa\mu^2 t} \cos[\mu(x - \lambda)] d\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa t}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\kappa t}}.$$

したがって，与えられた初期条件に対する解は

$$f(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi t}} \int_{-\infty}^\infty g(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\kappa t}} d\lambda$$

となる．

10.2

- (a) 第1種グリーン関数は境界条件  $G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0$  を満たすものである。  $-1 \leq x < 0$  における  $G(x, \xi)$  を  $G(x, \xi) = -G(-x, \xi)$  と定義すれば,  $G(x, \xi)$  は  $-1 \leq x \leq 1$  で奇関数であるから, 次のようなフーリエ級数展開ができる。

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\xi) \sin n\pi x.$$

これを与えられたポアソン方程式に代入し, デルタ関数に関する第8講演習問題 8.6(2) の公式を用いれば

$$\begin{aligned} \frac{d^2 G(x, \xi)}{dx^2} &= - \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\xi) (n\pi)^2 \sin n\pi x \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \sin n\pi \xi \end{aligned}$$

より, フーリエ係数  $g_n$  は

$$g_n(\xi) = -2 \frac{\sin n\pi \xi}{(n\pi)^2}$$

と定まる。これより問題の表式が得られる。

- (b)  $f(x) = G(x, \xi)$  とおき, 前問と同様に  $-1 \leq x < 0$  での  $f(x)$  を  $f(x) = -f(-x)$  によって定義すれば  $f(x)$  は奇関数であるから (8.40) 式により次のフーリエ展開ができる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \\ b_n &= 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx \\ &= -2(1 - \xi) \int_0^{\xi} x \sin n\pi x dx - 2\xi \int_{\xi}^1 (1 - x) \sin n\pi x dx \\ &= -\frac{2}{n^2 \pi^2} \sin n\pi \xi. \end{aligned}$$

これは前問で求めた表式に一致する。

なお, 上の積分を実行するために次の公式を用いた。

$$\int x \sin n\pi x dx = \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi x - \frac{x}{n\pi} \cos n\pi x.$$

これを導くには

$$\int \cos n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x$$

を  $n$  で偏微分すればよい。

(c) 1次元の場合の (10.23) 式は

$$\begin{aligned} u(x) &= u(1) \left[ \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} - u(0) \left[ \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} \\ &= Bx + A(1-x) \end{aligned}$$

一方,  $d^2u/dx^2 = 0$  を直接解けば,  $u(x) = ax+b$  となり, 境界条件  $u(0) = A, u(1) = B$  を満たすように  $a, b$  を選べば, 上で得たものと同じ解が得られる.

### 10.3

(10.33) 式において次の形の積分を行えばよい.  $x+a = r \cos \theta, y+b = r \sin \theta$  と変数変換を行って積分を実行する.

$$\begin{aligned} \iint \frac{dx dy}{[(x+a)^2 + (y+b)^2 + c^2]^{3/2}} \\ = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + c^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{c} \quad (c > 0) \end{aligned}$$

これを用いて求める結果が得られる.

## 第 11 講の解答

11.1  $H$  がエルミートであることから  $H^\dagger = H$ . したがって

$$V^\dagger V = e^{-iH^\dagger} e^{iH} = e^{-iH} e^{iH} = 1$$

同様にして,  $VV^\dagger = 1$  がいえる.

11.2  $\psi$  の展開式 (11.8) と  $\{u_k\}$  の正規直交性より

$$\begin{aligned} (\psi, \psi) &= \sum_{k,\ell} f_k^* f_\ell (u_k, u_\ell) = \sum_k |f_k|^2 \\ (\psi, \hat{A}\psi) &= \sum_{k,\ell} f_k^* f_\ell (u_k, \hat{A}u_\ell) = \sum_{k,\ell} f_k^* f_\ell \lambda_\ell (u_k, u_\ell) = \sum_k \lambda_k |f_k|^2 \end{aligned}$$

11.3 前問と同様にして

$$\mathbf{x} = \sum_k f_k \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{x}^* \mathbf{x} = \sum_k |f_k|^2, \quad \mathbf{x}^* \hat{A} \mathbf{x} = \sum_{k,\ell} \lambda_k |f_k|^2$$

と展開すれば

$$F = \frac{\lambda_1 |f_1|^2 + \cdots + \lambda_n |f_n|^2}{|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2}$$

$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  に注意すれば, 常に  $\lambda_1 \leq F \leq \lambda_n$  が成り立つ. 特に,  $x = u_1$  (したがって,  $f_1 = 1, f_2 = \dots = f_n = 0$ ) ととれば,  $F(u_1) = \lambda_1$  であるから,  $\lambda_1$  は  $F$  の最小値である. 同様に,  $F(u_n) = \lambda_n$  は  $F$  の最大値になる.

#### 11.4

- (a)  $(MM^\dagger)^\dagger = MM^\dagger$  より  $MM^\dagger$  はエルミートである. したがって,  $A = MM^\dagger$  の固有値は実数であるから, それらを  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  とする. 前問の結果により,  $F(x)$  の最小値は  $\lambda_1$  であり, 任意の  $x$  に対して

$$F(x) = \frac{x^* Ax}{x^* x} = \frac{x^* MM^\dagger x}{x^* x} = \frac{(M^\dagger x)^* (M^\dagger x)}{x^* x} \geq 0.$$

したがって,  $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  であるから,  $MM^\dagger$  の固有値は負にならない.

- (b) 前問の結果により  $MM^\dagger$  は適当なユニタリ行列  $S$  によって次のように対角行列  $M_d^2$  にできる.

$$S^\dagger (MM^\dagger) S = M_d^2$$

ここで  $M_d$  は対角成分が  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  であるような対角行列であり,  $MM^\dagger$  の固有値は  $(m_1^2, m_2^2, \dots, m_n^2)$  である. エルミート行列  $H = SM_d S^\dagger$  を定義すると,  $U = H^{-1} M$  で定義される行列はユニタリ行列である. 実際に

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= H^{-1} MM^\dagger H^{-1} = H^{-1} SM_d^2 S^\dagger H^{-1} \\ &= H^{-1} (SM_d S^\dagger) (SM_d S^\dagger) H^{-1} = H^{-1} H H H^{-1} = 1. \end{aligned}$$

これで題意が示せた.

- (c) 行列  $H$  および  $U$  の定義より

$$M_d = S^\dagger H S = S^\dagger M U^{-1} S = S^\dagger M T$$

ただし,  $T = U^{-1} S = U^\dagger S$  とおいた.  $TT^\dagger = U^{-1} S S^\dagger U = 1, T^\dagger T = S^\dagger U U^{-1} S = 1$  であるから,  $T$  はユニタリである. これで問題の前半部分が証明できた.

次に, 対角行列

$$F = \begin{bmatrix} e^{i\phi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\phi_n} \end{bmatrix}$$

を定義し,  $S' = SF$  としても,  $S'^\dagger (MM^\dagger) S' = (SF)^\dagger (MM^\dagger) (SF) = M_d^2$  が成り立つ. つまり,  $MM^\dagger$  を対角化するためのユニタリ行列  $S$  は  $F$  のような位相因子

の自由度がある． $S$  の代わりに  $S'$  を用いると

$$S'^{\dagger}MT = F^{\dagger}S^{\dagger}MT = F^{\dagger}M_d = \begin{bmatrix} e^{-i\phi_1}m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-i\phi_n}m_n \end{bmatrix}$$

であるから，この自由度を利用して  $M_d$  のゼロでない固有値の符号を正にとることができる．

11.5 正方行列  $A$  は適当な正則行列  $F$  によって対角行列  $A_d$  にすることができる．したがって， $F^{-1}AF = A_d$ ， $A = FA_dF^{-1}$ ．対角行列  $A_d$  の対角成分を  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  とすれば

$$\exp A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = F \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_d^n}{n!} \right) F^{-1} = F \begin{bmatrix} e^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_n} \end{bmatrix} F^{-1}$$

これより， $\det(\exp A) = e^{a_1}e^{a_2} \dots e^{a_n} = \exp(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ ．ところで

$$\begin{aligned} \text{Tr}A &= \text{Tr}(FA_dF^{-1}) = \sum_{i,j,k} F_{ij}(A_d)_{jk}F_{ki}^{-1} \\ &= \sum_{i,j,k} (F_{ki}^{-1}F_{ij})(A_d)_{jk} = \sum_{j,k} \delta_{kj}(A_d)_{jk} = \sum_j a_j, \end{aligned}$$

すなわち，行列の対角成分の和（トレース）は相似変換に対して不変である（第4講演習問題4.5参照）このことから，問題の公式が成り立つ．

11.6 まず，運動量演算子  $p_m = -i\hbar\partial_m$  と  $x_j$  との交換関係を導く．

$$[p_m, x_j] = p_mx_j - x_jp_m = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial x_m}x_j - x_j\frac{\partial}{\partial x_m} \right) = -i\hbar\delta_{mj}.$$

角運動量演算子の定義より， $L_i = \sum_{k,m} \varepsilon_{ikm}x_kp_m$  である．

$$\begin{aligned} (1) \quad [L_i, x_j] &= \sum_{k,m} \varepsilon_{ikm}[x_kp_m, x_j] = \sum_{k,m} \varepsilon_{ikm}x_k[p_m, x_j] \\ &= -i\hbar \sum_k \varepsilon_{ikj}x_k = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk}x_k \\ (2) \quad [L_i, p_j] &= \sum_{k,m} \varepsilon_{imk}[x_mpk, p_j] = \sum_{k,m} \varepsilon_{imk}[x_m, p_j]p_k \\ &= i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk}p_k \end{aligned}$$

## 第 12 講の解答

12.1  $H$  が  $G$  の部分群なら (1), (2) が成り立つことは群の定義から明らかである．逆に (1), (2) が成り立てば  $H$  が群であることをいう．(1) より  $H$  は積の演算に関して閉じている．結合律は  $H$  が  $G$  の部分集合であるから成り立つ．また (2) より逆元の存在がいえ, (1), (2) より単位元  $hh^{-1} = e$  が  $H$  に含まれる．よって群の 3 条件がすべて満たされるので  $H$  は群である．

12.2  $\{e, \sigma_1\}, \{e, \sigma_2\}, \{e, \sigma_3\}, \{e, \theta, \theta^2\}$

### 12.3

(a)  $H$  がエルミートなら  $V = \exp(iH)$  はユニタリ行列である．実際に,  $VV^\dagger = e^{iH}e^{-iH} = 1, V^\dagger V = e^{-iH}e^{iH} = 1$  である．また,  $n$  次ユニタリ行列の独立な成分の数は  $2n^2 - n^2 = n^2$  であり,  $n$  次エルミート行列の独立な成分の数も  $2n^2 - n^2 = n^2$  個である．したがって任意のユニタリ行列  $V$  は  $\exp(iH)$  と表される．次に,  $SU(n)$  に属する行列は  $\det V = 1$  を満たす必要がある．第 11 講演習問題 11.5 により,  $\det V = \det(\exp(iH)) = \exp(i\text{Tr}H)$  であるから,  $\text{Tr}H = 0$  であるような  $H$  に対して,  $\det V = 1$  となる．

(b) 複素数を成分とする  $n$  次の正方行列の自由度は  $2n^2$  である．エルミート性の条件  $H^\dagger = H$  は行列成分の間に  $n^2$  個の関係を与えるから, エルミート行列の独立な自由度は  $n^2$  となる．さらに, トレースがゼロの条件が加わり, 結局, トレースがゼロのエルミート行列の独立な成分の数は  $n^2 - 1$  となる．したがって,  $n^2 - 1$  個の独立変数  $t_i$  ( $i = 1, \dots, n^2 - 1$ ) とエルミート行列  $X_i$  を用いて  $H = \sum_i X_i t_i$  と表すことができる．

(c) パウリ行列は次の交換関係に従うことが示せる．

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = \sum_k \varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}$$

(d)  $SU(2)$  の構造定数は  $f_{ijk} = i\varepsilon_{ijk}$  であるから,  $SU(2)$  の随伴表現は  $SO(3)$  の随伴表現と同じ行列で表される．また, 随伴表現の定義 (12.24) 式において,  $SU(n)$  の場合には,  $i, j, k = 1, \dots, n^2 - 1$  であるから, 表現行列は  $n^2 - 1$  次元である．

## 12.4

$$\begin{aligned}\exp(i\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})^{2m+1}}{(2m+1)!}\end{aligned}$$

ところで，前問のパウリ行列の定義式により， $\sigma_i^2 = E, \sigma_i\sigma_j = i \sum_k \varepsilon_{ijk}\sigma_k$  が成り立つから

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})^2 &= \sum_{i,j} \sigma_i\sigma_j n_i n_j = \sum_i \sigma_i^2 n_i^2 + \sum_{i\neq j} \sigma_i\sigma_j n_i n_j \\ &= \sum_i n_i^2 + i \sum_{i\neq j} \varepsilon_{ijk} n_i n_j \sigma_k = 1\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\exp(i\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\theta)^{2m}}{(2m)!} E + i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\theta)^{2m+1}}{(2m+1)!} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) \\ &= \cos\theta E + i \sin\theta (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\end{aligned}$$

12.5 第5講 5.3 で述べたように，ローレンツ変換の行列  $A$  は一般に

$$A^T g A = g$$

を満たす．ここで  $g$  はローレンツ計量で，2次元ミンコフスキー空間では

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

で与えられる．ローレンツ計量を不変にするような行列全体の集合  $G$  を考える． $G$  に属する任意の2つの元， $A_1, A_2$  があるとき，これらは  $A_i^T g A_i = g$  ( $i = 1, 2$ ) を満たしている．このとき，積  $A_1 A_2$  もまた

$$(A_1 A_2)^T g (A_1 A_2) = A_2^T (A_1^T g A_1) A_2 = A_2^T g A_2 = g$$

を満たすから，積  $A_1 A_2$  はローレンツ変換の行列であり  $G$  に属する．単位行列を単位元に，逆行列を逆元に対応させれば，この行列の集合  $G$  は群である．



## 第 13 講の解答

### 13.1

(1)

$$\begin{aligned} & (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz) \wedge (B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz) = \\ & (A_2 B_3 - A_3 B_2) dy \wedge dz + (A_3 B_1 - A_1 B_3) dz \wedge dx + (A_1 B_2 - A_2 B_1) dx \wedge dy \end{aligned}$$

これはベクトル  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  とベクトル  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$  のベクトル積に対応している。

(2)

$$\begin{aligned} & (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz) \wedge (B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy) \\ & = (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

これはベクトル  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  とベクトル  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$  のスカラー積に対応している。

### 13.2

(1)

$$df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz$$

これは関数  $f(x, y, z)$  に対する勾配 (gradient) に対応している。

(2)

$$\begin{aligned} d\omega &= dV_x \wedge dx + dV_y \wedge dy + dV_z \wedge dz \\ &= \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ &\quad + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + \frac{\partial V_y}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &\quad + \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} dx + \frac{\partial V_z}{\partial y} dy + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

これはベクトル  $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$  に対する回転 (rotation) に対応している。

(3)

$$\begin{aligned}d\sigma &= dS_x \wedge dy \wedge dz + dS_y \wedge dz \wedge dx + dS_z \wedge dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

これはベクトル  $S = (S_x, S_y, S_z)$  に対する発散 (divergence) に対応している .

### 13.3

(1)  $\partial f/\partial x = f_x, \partial f/\partial y = f_y, \partial f/\partial z = f_z$  と表す . 前問の (2) より

$$\begin{aligned}d(df) &= d\left( \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz \right) \\ &= df_x \wedge dx + df_y \wedge dy + df_z \wedge dz \\ &= \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy\end{aligned}$$

ところで ,  $f_{xy} = f_{yx}, f_{yz} = f_{zy}, f_{zx} = f_{xz}$  であるから ,  $d(df) = 0$  がいえる . これは  $\text{rot}(\text{grad}f) = 0$  に対応している .

(2) 前問の (2), (3) により

$$\begin{aligned}d(d\omega) &= d(dV_x \wedge dx + dV_y \wedge dy + dV_z \wedge dz) \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \right\} \\ &\quad \times dx \wedge dy \wedge dz \\ &= 0\end{aligned}$$

これは  $\text{div}(\text{rot}V) = 0$  に対応している .

13.4  $\omega = f, \eta = V_x dx + V_y dy + V_z dz$  のとき , 13.2 (1) および (2) より

$$\begin{aligned}d\omega &= (\text{grad}f)_x dx + (\text{grad}f)_y dy + (\text{grad}f)_z dz \\ d\eta &= (\text{rot}V)_x dy \wedge dz + (\text{rot}V)_y dz \wedge dx + (\text{rot}V)_z dx \wedge dy\end{aligned}$$

(13.23) 式の左辺は

$$\begin{aligned}d(\omega \wedge \eta) &= d(fV_x dx + fV_y dy + fV_z dz) \\ &= (\text{rot}(fV))_x dy \wedge dz + (\text{rot}(fV))_y dz \wedge dx + (\text{rot}(fV))_z dx \wedge dy\end{aligned}$$

(13.23) 式の右辺は

$$\begin{aligned}
 & d\omega \wedge \eta + \omega \wedge d\eta \\
 = & ((\operatorname{grad} f)_x dx + (\operatorname{grad} f)_y dy + (\operatorname{grad} f)_z dz) \wedge (V_x dx + V_y dy + V_z dz) \\
 & + f((\operatorname{rot} \mathbf{V})_x dy \wedge dz + (\operatorname{rot} \mathbf{V})_y dz \wedge dx + (\operatorname{rot} \mathbf{V})_z dx \wedge dy) \\
 = & (\operatorname{grad} f \times \mathbf{V})_x dy \wedge dz + (\operatorname{grad} f \times \mathbf{V})_y dz \wedge dx + (\operatorname{grad} f \times \mathbf{V})_z dx \wedge dy \\
 & + (f \operatorname{rot} \mathbf{V})_x dy \wedge dz + (f \operatorname{rot} \mathbf{V})_y dz \wedge dx + (f \operatorname{rot} \mathbf{V})_z dx \wedge dy \\
 = & (\operatorname{grad} f \times \mathbf{V} + f \operatorname{rot} \mathbf{V})_x dy \wedge dz + (\operatorname{grad} f \times \mathbf{V} + f \operatorname{rot} \mathbf{V})_y dz \wedge dx \\
 & + (\operatorname{grad} f \times \mathbf{V} + f \operatorname{rot} \mathbf{V})_z dx \wedge dy
 \end{aligned}$$

両辺を比較することにより，問題の公式が得られる．

13.5 与えられた  $\omega$  に対して

$$d\omega = \left( \frac{dA_x}{dx} + \frac{dA_y}{dy} + \frac{dA_z}{dz} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \operatorname{div} \mathbf{A} dx \wedge dy \wedge dz$$

これをストークスの定理 (13.35) に適用すれば

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dx \wedge dy \wedge dz = \int_{S=\partial V} (A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy)$$

すなわち

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz = \int_{S=\partial V} (A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy) = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

を得る．

13.6 与えられた  $\omega$  に対して

$$d\omega = \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

これをストークスの定理 (13.35) に適用すれば

$$\int_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{C=\partial D} (u dy + v dx)$$

これはグリーンの公式 (9.7) に他ならない．

13.7

(a) 与えられた  $\omega$  の外微分は

$$\begin{aligned}
 d\omega &= df(z) \wedge dz = (du + idv) \wedge (dx + idy) \\
 &= (du \wedge dx - dv \wedge dy) + i(dv \wedge dx + du \wedge dy) \\
 &= -\left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy + i \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy
 \end{aligned}$$

第9講の定理9.1で述べたように，複素関数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  が解析関数であるための必要十分条件はコーシー - リーマンの微分方程式 (9.2)，すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

が成り立つことである．上式により  $d\omega = 0$  とコーシー - リーマンの微分方程式は等価であるから， $f(z)$  が解析関数であるための必要十分条件は  $d\omega = 0$  である．

(b)  $f(z)$  が解析関数のとき，ストークスの定理により

$$\begin{aligned} \int_D d\omega &= 0 \\ &= \int_{C=\partial D} \omega = \int_C f(z)dz \end{aligned}$$

である．これはコーシーの積分定理 (9.6) に他ならない．

## 第14講の解答

14.1 全事象の数は36．このうち同じ目の出る事象の数は6通りであるから，異なった目の出る事象の数は  $36 - 6 = 30$ ．したがって，異なる目の出る確率は  $30/36 = 0.833$ ．

あるいは，次のように考えてもよい．1つのサイコロで，1の目が出る確率は  $1/6$ ．もう一つのサイコロで，6つの目のうち，ある目以外の目が出る確率は  $5/6$ ．ある目は6つの目のうちのどれでもよいから， ${}_6C_1 = 6$  をかけて， ${}_6C_1 \times (1/6) \times (5/6) = 0.833$

### 14.2

(1) 6個のサイコロのうちどれか1個の目が1で，残りは1以外の確率は， $5^5/6^6$ ．1の目が出るサイコロは6個のうちどれでもよいから， $5^5/6^6 \times 6 = 5^5/6^5 = 0.402$ ．

(2) 1の目が全くでない確率は  $5^6/6^6$  であるから，1の目が少なくとも一つ出る確率は， $1 - 5^6/6^6 = 0.665$ ．

(3) 6個のサイコロのうちどれか2個の目が1で，残りは1以外の確率は， $5^4/6^6$ ．1の目が出るサイコロは6個のうちどの2個でもよいから， $(5^4/6^6) \times 6!/(2!4!) = 0.201$ ．

14.3 試料がBで，かつブザーが鳴る確率は  $0.6 \times 0.8$ ，試料がAで，かつブザーが鳴る確率は  $0.4 \times 0.1$ ．したがってブザーの鳴ったこの検査試料がBである確率は  $0.6 \times 0.8 / (0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.1) = 0.92$ ．

#### 14.4

- (1) 含まれる誤植の平均密度は  $1/\lambda = 600/600 = 1$  であるから，1 ページに含まれる誤植の分布は (14.14) 式で  $x = 1$  として  $P_n(1) = e^{-1}/n!$  である．したがって，誤りの全くない確率は  $P_0(1) = e^{-1} = 0.368$  .
- (2) 全確率 1 から，誤りが 0, 1, 2 個含まれる確率を引くことによって得られる．すなわち， $1 - (P_0(1) + P_1(1) + P_2(1)) = 1 - (1 + 1 + 1/2)e^{-1} = 0.080$ .

14.5  $n$  の期待値を計算するために，次の関係に着目する．

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N n {}_N C_n p^n q^{N-n} &= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^N P(n) \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N = pN(p+q)^{N-1} \end{aligned}$$

ここで， $p+q=1$  とおけば， $\langle n \rangle = Np$  を得る．

$n$  の分散を求めるために，まず  $\langle n^2 \rangle$  を計算する．そのために，次の関係に着目する．

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N n^2 {}_N C_n p^n q^{N-n} &= p \frac{\partial}{\partial p} \left( p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^N P(n) \right) = p \frac{\partial}{\partial p} \left( p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \right) \\ &= pN(p+q)^{N-1} + p^2 N(N-1)(p+q)^{N-2} \end{aligned}$$

ここで， $p+q=1$  とおけば， $\langle n^2 \rangle = N^2 p^2 + pN(1-p)$  を得る．したがって，

$$\sigma^2 = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = pN(1-p)$$

14.6  $n$  の期待値を計算するために，次の関係に着目する．

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{t^n}{n!} = t \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = t \frac{d}{dt} e^t = t e^t$$

ポアソン分布 (14.14) において  $x/\lambda = t$  とおけば

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{t^n}{n!} e^{-t} = t = \frac{x}{\lambda}$$

分散を求めるために，次の関係に着目する．

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{t^n}{n!} = t \frac{d}{dt} \left( t \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) = t \frac{d}{dt} \left( t \frac{d}{dt} e^t \right) = t(t+1) e^t$$

したがって， $\langle n^2 \rangle = t(t+1)$  であるから，

$$\sigma^2 = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = t = \frac{x}{\lambda} .$$

14.7 正規分布の確率変数  $x$  の期待値  $\langle x \rangle$  を求めるには (14.21) 式の積分を実行するのであるが、ここで  $t = x - \mu$  において積分変数を  $t$  に変えれば、積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t + \mu) \exp \left[ -\frac{t^2}{2\sigma^2} \right] dt$$

となる。  $(t + \mu)$  のうち、  $t$  の項は非積分関数が奇関数となるから積分はゼロとなる。これより (14.21) 式のように  $\langle x \rangle = \mu$  が得られる。

分散を求めるには (14.25) 式の積分を実行するのであるが、ここで次の積分公式を利用すればよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \quad (a > 0)$$

これは次の積分公式 (第1講演習問題 1.6 (1), ガウス積分と呼ばれる。)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

を  $a$  で微分することによって得られる。

#### 14.8

(a) 対数関数に関するテイラー展開の公式 (1.17) により、  $\ln(1-p) \approx -p$  ( $p \ll 1$ ) である。したがって対数関数の定義により、  $(1-p) \approx e^{-p}$ 。これより、  $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$ 。

(b)  $N!/(N-n!) = (N-n+1)(N-n+2)\cdots(N-1)N \approx N^n$ 。

(c) (14.6) 式より、

$$P(n) \approx \frac{N^n}{n!} p^n e^{-Np} = \frac{\kappa^n}{n!} e^{-\kappa}$$

ここで、  $\kappa = Np$  とおいた。

#### 14.9

(a) 面積要素  $a^2$  に金属原子が衝突する確率を  $p$  とする。入射する原子の総数を  $N$  とし、そのうち  $n$  個が面積要素  $a^2$  に衝突する確率は二項分布 (14.6) で与えられる。基板の面積を  $S$  とすれば、  $p \approx a^2/S \ll 1$  であり、また  $n/N \approx a^2/S \ll 1$  であるから、前問により、二項分布はポアソン分布で近似される。

(b) 面積要素  $a^2$  に  $n$  個の原子が積み上げられる確率は  $P(n) = (\kappa^n/n!)e^{-\kappa}$  と表される。  $\kappa = Np$  は基板上に積み上げられる原子層の平均の厚さを表すから、ここでは  $\kappa = 6$  である。  $n$  原子層で覆われる面積を  $S_n$  とすれば、  $S_n/S \approx P(n)$  であるから、  $P(0) = e^{-6} = 0.0025$ ,  $P(3) = (6^3/3!)e^{-6} = 0.089$ ,  $P(6) = (6^6/6!)e^{-6} = 0.161$  と求められる。

## 第 15 講の解答

15.1  $x(t)$  の展開式を運動方程式に代入し,  $\varepsilon$  のべきごとに整理すれば

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^{(0)}}{dt^2} + \omega_0 x^{(0)} &= 0 \\ \frac{d^2 x^{(1)}}{dt^2} + \omega_0 x^{(1)} &= -(x^{(0)})^2 \\ \dots &\dots \dots\end{aligned}$$

初期条件を考慮して, 第 1 式より

$$x^{(0)}(t) = A \sin \omega_0 t$$

が得られる. これを第 2 式に代入して第 3 講 3.3.2 節の解法を適用することにより

$$x^{(1)}(t) = -\frac{\varepsilon A^2}{2\omega_0^2} \left( 1 - \frac{4}{3} \cos \omega_0 t + \frac{1}{3} \cos 2\omega_0 t \right)$$

が得られる.  $x^{(1)}$  には  $\cos 2\omega_0$  が表れている. これは摂動によって基本振動数  $\omega_0$  の倍の振動が励起されることを表している. 更に高次の項を考えれば, いっそう高い振動数を持った振動が励起されることがわかる. 一般に非線形振動を調和振動の重ね合わせとして表せば, 無限に多くの倍振動項が含まれることになる.

## 15.2

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(x + 4\tau, \tau) &= -12 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\cosh(4x - 48\tau) + 4\cosh(2x) + 3}{\{\cosh(3x - 24\tau) + 3\cosh(x - 24\tau)\}^2} \\ &= -12 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \exp(-4x + 48\tau)}{\left\{ \frac{3}{2} \exp(-x + 24\tau) + \frac{1}{2} \exp(-3x + 24\tau) \right\}^2} \\ &= \frac{-6}{\left\{ \frac{3}{2} \exp(x) + \frac{1}{2} \exp(-x) \right\}^2} \\ &= \frac{-6}{\exp(2\theta) \left\{ \frac{1}{2} \exp(x + \theta) + \frac{1}{2} \exp(-x - \theta) \right\}^2} \\ &= -2 \operatorname{sech}^2(x + \theta).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(x + 16\tau, \tau) &= -12 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\cosh(4x) + 4\cosh(2x + 24\tau) + 3}{\{\cosh(3x + 12\tau) + 3\cosh(x - 12\tau)\}^2} \\ &= -12 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{4\frac{1}{2}\exp(2x + 24\tau)}{\{\frac{3}{2}\exp(-x + 12\tau) + \frac{1}{2}\exp(3x + 12\tau)\}^2} \\ &= \frac{-24}{\{\frac{3}{2}\exp(-2x) + \frac{1}{2}\exp(2x)\}^2} \\ &= \frac{-8}{\exp(2\theta) \{\frac{1}{2}\exp(-2x + \theta) + \frac{1}{2}\exp(2x - \theta)\}^2} \\ &= -8 \operatorname{sech}^2(2x - \theta).\end{aligned}$$

(c) 前問 (a), (b) と同様にして

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \eta(x + 4\tau) &= -2 \operatorname{sech}^2(x - \theta) \\ \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \eta(x + 16\tau) &= -8 \operatorname{sech}^2(2x + \theta)\end{aligned}$$

がいえる。