問・章末問題 正解・略解

Last update: 2007/7/19

第 1 章

1.3 [問] $|t\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2t^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})t + |\mathbf{b}|^2 \geqq 0$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ より、判別式 $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$ は $\leqq 0$ である。

1.4 [問] (i) 行列式の性質 $\begin{vmatrix} b_i & a_i \\ b_j & a_j \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}$ から直ちに従う。

(ii) $\begin{vmatrix} a_i+c_i & b_i \\ a_j+c_j & b_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_i & b_i \\ c_j & b_j \end{vmatrix}$ から直ちに従う。 (iii) (ii) と同様。

(iv) $\begin{vmatrix} \lambda a_i & b_i \\ \lambda a_j & b_j \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}$ から直ちに従う。 (v) $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ の第 1 列に関する余因子展開で左辺の内積を得る。

[問] 1) $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$ は、平行六面体の底面積に等しい。また、θ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ のなす角度とすると、$|\mathbf{a}|\cos\theta$ は $\mathbf{b},\mathbf{c}$ が張る底面に対する平行六面体の高さに等しいので、値 $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$ は平行六面体の体積である。

2) $(c_{11}\mathbf{b}_1 + c_{21}\mathbf{b}_2)\times(c_{12}\mathbf{b}_1 + c_{22}\mathbf{b}_2) = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2$ であることは直ちに確かめられる。

3) $\mathbf{x} = {}^t(x_1,x_2,x_3)$ とおくと、直接の計算で $\Omega\mathbf{x} = {}^t(\omega_2x_3-\omega_3x_2, \omega_3x_1-\omega_1x_3, \omega_1x_2-\omega_2x_1) = \omega\times\mathbf{x}$ であることが分かる。

[章末問題] (1.1) (i) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$, (ii) ${}^t(x,y,z) = t\,{}^t(1,1,1) + {}^t(1,2,3)$ または $x-1 = y-2 = z-3$, (iii) ${}^t(x,y,z) = t\,{}^t(1,0,1) + {}^t(1,2,1)$ または $x-1 = z-1, y=2$

(1.2) (i) $x+y+z=3$, (ii) $-x-2y+z=-2$, (iii) $x-y+z=5$

(1.3) $a(x-z+2)+b(y-z+1)=0$ (a,b は任意) と表される直線すべて。

(1.4) この領域 (3 角錐) の体積は $1/(6abc)$。 (1.5) 3。

(1.6) (i) ${}^t(0,0,a_1b_2-a_2b_1)$, (ii) ${}^t(a_2b_3,-a_1b_3,a_1b_2)$, (iii) ${}^t(0,-a_1b_3,a_1b_2)$

(1.7) グラスマンの恒等式の両辺の各成分を比較する。$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ を $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})) = \det(\mathbf{x},\mathbf{a},(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))$ $\mathbf{x}\cdot((\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(x\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{c})$ に代入すれば、各成分が得られる。$x = \mathbf{e}_1$ とすると、それぞれ $a_2(b_1c_2-b_2c_1) - a_3(b_3gc_1-b_1c_3)$, $b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) - c_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$ を得て、両者は一致する。残りの場合も同様。

ヤコビの恒等式は、グラスマンの恒等式を使えば直ちに示せる。

(1.8) (i) $\cos\theta = 1/3$, (ii) $\cos\theta = 6/\sqrt{42}$

(1.9) (i) $\sqrt{42}/7$ (直線に直交し、点 $(1,2,3)$ を通る平面 $x+2y+3z=14$ と直線の交点を求める),
(ii) $5/\sqrt{3}$

(1.10) $x-1 = \dfrac{y-2}{-2} = z-3$ (直線の方向ベクトルの平面への射影を求める)

(1.11) 図は省略。定義方程式から z を消去すると、$(x-1)(y-1) = \dfrac{1}{2}$ を得る。パラメータ表示は、例えば ${}^t(x,y,z) = {}^t\big(1+s, 1+\dfrac{1}{2s}, -1-s-\dfrac{1}{2s}\big)$ $(s\neq 0)$。

第 2 章

2.1 [問] (1) (i) ${}^t(y,x,1)$, (ii) ${}^t(-\sin x\sin(yz), z\cos x\cos(yz), y\cos x\cos(yz))$,
(iii) ${}^t(y+z, x-z, x-y)e^{xy-yz+zx}$, (2) (i) は明らかで、(ii) はライプニッツの法則から直ちに得られる。

[問] (i)、(iii) は成分ごとに考えて、どれもライプニッツの法則から直ちに得られる。

2.2 [問] (i) $\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial\theta} = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$, (ii) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$

2.5 [問] (i) $\operatorname{rot}\mathbf{F} = {}^t(0,0,0)$, $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3$, (ii) $\operatorname{rot}\mathbf{F} = {}^t(0,0,0)$, $\operatorname{div}\mathbf{F} = -\sin x + \cos y + 2z$, (iii) $\operatorname{rot}\mathbf{F} = {}^t(-ye^{yz}, -ze^{zx}, -xe^{xy})$, $\operatorname{div}\mathbf{F} = ye^{xy} + ze^{yz} + xe^{zx}$

[問]　$\mathbf{F} = {}^t(f_1, f_2, f_3), \mathbf{G} = {}^t(g_1, g_2, g_3), \partial_i = \partial/\partial x_i\ (i = 1, 2, 3)$ とする。

1),4) はライプニッツの法則から直ちに得られる。2) の両辺 (の第 1 成分) はどちらも、${}^t(\partial_2\partial_1 f_2 + \partial_3\partial_1 f_3 - (\partial_2^2 f_1 + \partial_3^2 f_1), \partial_3\partial_2 f_3 + \partial_1\partial_2 f_1 - (\partial_1^2 f_2 + \partial_3^2 f_2), \partial_1\partial_3 f_2 1 + \partial_2\partial_3 f_2 - (\partial_1^2 f_3 + \partial_2^2 f_3))$ に等しい。

3) は次の等式から分かる:

$$\partial_2(f_1 g_2 - f_2 g_1) - \partial_3(f_3 g_1 - f_1 g_3) = (\operatorname{div} G) f_1 - (\partial_1 g_1) f_1 - ((\operatorname{div} \mathbf{G}) \cdot F - (\partial_1 g_1) f_1)$$

5) は $\partial_1(f_2 g_3 - f_3 g_2) + \partial_2(f_3 g_1 - f_1 g_3) + \partial_3(f_1 g_2 - f_2 g_1) = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) g_1 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) g_2 + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) g_3 - (\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2) f_1 + (\partial_3 g_1 - \partial_1 g_3) f_2 + (\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1) f_3$ より分かる。

また、6) は右辺の半分 $(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\operatorname{rot} \mathbf{G})$ の第 1 成分が次のようになることから分かる:

$$(f_1\partial_1 + f_2\partial_2 + f_3\partial_3) g_1 + f_2(\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1) - f_3(\partial_3 g_1 - \partial_1 g_3) = f_1\partial_1 g_1 + f_2\partial_2 g_2 + f_3\partial_3 g_3$$

[章末問題]

(2.1)　(i)　$\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial f}{\partial y}$

(ii)　$\dfrac{\partial f}{\partial u} = (-2u + 4)\dfrac{\partial f}{\partial x} = \pm 2\sqrt{4 - x}\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

(2.2)　$\dfrac{d}{dt} g(\mathbf{r}(t)) = e^{x+y}(\cos(xy) - y\sin(xy)) + 2te^{x+y}(\cos(xy) - x\sin(xy))\big|_{x=t, y=t^2}$
$= e^{t+t^2}\left((1 + 2t)\cos t^3 - 3t^2 \sin t^3\right)$

(2.3)　$f(X, Y) = f(xy, \frac{1}{y})$ を微分して、$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial X} y,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial X} x + \dfrac{\partial f}{\partial Y}\left(\dfrac{-1}{y^2}\right)$ となり、それぞれ x, y を掛けて示すべき式が得られる。

(2.4)　$\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t, \cos t, -\sin t),\ \ddot{\mathbf{r}}(t) = (2, -\sin t, -\cos t)$ ゆえ、$t = 0$ で速度 $(0, 1, 0)$、加速度 $(2, 0, -1)$ となる。

(2.5)　(i)　$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ として $\dfrac{\partial r}{\partial x_i}$ を計算すると、$r^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \ \Rightarrow\ 2r\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = 2x_i \ \Rightarrow\ \dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{x_i}{r}$ となるから、

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^n}\right) = \frac{-n}{r^{n+1}}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{-n}{r^{n+1}}\frac{x_i}{r} \ \Rightarrow\ \operatorname{grad} f = \frac{-n}{r^{n+2}}{}^t(x_1, x_2, x_3)$$

(ii)　$\operatorname{grad} f = {}^t(y, x, 1)$　(iii)　$\operatorname{grad} f = {}^t\left(\dfrac{1 - x^2 - y^2 + 2xz}{(1 + x^2 - y^2)^2}, \dfrac{2y(x - z)}{(1 + x^2 - y^2)^2}, \dfrac{-1}{1 + x^2 - y^2}\right)$

(2.6)　(i)　$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, 0),\ \operatorname{div} \mathbf{F} = 2(x + y + z)$,　(ii)　$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (-1, -1, -1),\ \operatorname{div} \mathbf{F} = 3$

(iii)　$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, 0),\ \operatorname{div} \mathbf{F} = xye^z$

(2.7)　(i)　$\operatorname{rot} \mathbf{F} = {}^t(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})$,　(ii)　$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{F}} = 0$、すなわち、$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y})$ なら、定義域が平面 R^2 全体の C^1 級ベクトル場については、$\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ なる関数 f が存在する。

しかし、定義域が平面 R^2 全体でない場合は成り立たない。ベクトル場 $\mathbf{F} = (\dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2})$ について、$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{F}} = 0$、$\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ (C は単位円周) はすぐに確かめられる。しかし、もし $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ なる関数 f が存在すれば、$\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(t_1)) - f(\mathbf{r}(t_0)) = 0$ となるはずである。

(2.8)　2.5 節の基本性質 3),5) により、$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \neq 0,\ \mathbf{F} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{G}) \neq 0$ なるベクトル場 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ を考えればよいが、3) では $\mathbf{F} = (x, y, z), \mathbf{G} = (1, 1, 1)$ と、5) では $\mathbf{F} = (1, 1, 1), \mathbf{G} = (z, x, y)$ とおけばよい。

(2.9)　2.6 節の例題で見たとおり、$\mathbf{F} = P\mathbf{G},\ \operatorname{grad} f = P \operatorname{grad} g$ である。これから関数を除けば $\nabla_x = P\nabla_y$ に他ならない。

第 3 章

3.2　[問]　1. の円周　$\dot{\mathbf{r}} = (-\sin t, \cos t, 0)$ ゆえ、$\displaystyle\int_C |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$

2. の螺旋　$\dot{\mathbf{r}} = (-\sin t, \cos t, 1)$ ゆえ、$\displaystyle\int_C |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi.$

3. の放物線　章末問題 3.2, b) より、$\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{4}\left(2\cdot 2\sqrt{1+4\cdot 2^2}+\log(2\cdot 2+\sqrt{1+4\cdot 2^2}\right) = \sqrt{17}+\frac{1}{4}\log(4+\sqrt{17})$.

4. のサイクロイド $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt = \int_0^{2\pi} 2\sin\tfrac{t}{2}dt = 8$.

5. の心臓型 $\dot{\mathbf{r}} = (-\sin t-\sin 2t, \cos t+\cos 2t, 0)$ ゆえ、$\displaystyle L(s) = \int_C |\dot{\mathbf{r}}(t)|dt = \int_0^s \sqrt{2(1+\cos t)}dt = \int_0^s 2\left|\cos\tfrac{t}{2}\right|dt$ である。$s \leqq \pi$ のとき、$\displaystyle L(s) = \int_0^s 2\cos\tfrac{t}{2}dt = 4\sin\tfrac{s}{2}$ $\pi \leqq s \leqq 2\pi$ のとき、$\displaystyle L(s) = L(\pi)+\int_\pi^s -2\cos\tfrac{t}{2}dt = 8-4\sin\tfrac{s}{2}$.

3.4 [問] (1) S を単位円盤とする。グリーンの公式により、$\displaystyle\int_C (x^2+xy^2)dx+2x^2ydy = \int_S (-2xy+4xy)dxdy$ となる。極座標に移行して $\displaystyle\int_S 2xydxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi} 2r^2\cos\theta\sin\theta rdrd\theta = \int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{2\pi} = 0$ となる。

(2) (i) この曲線は $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とパラメータ表示できる。この曲線で囲まれた領域の面積は $\displaystyle\frac{1}{2}\int_C(-fdx+xdy) = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(3\cos^2\theta\sin^4\theta+3\cos^4\theta\sin^2\theta\right)d\theta = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta = \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)d\theta = \frac{3}{8}\pi a^2$

(ii) この領域の x 軸に沿った部分を C_1、サイクロイドに沿った部分を C_2 とし、正の向きをつける。C_1 上 $y=0$ ゆえ、$\displaystyle\int_{C_1} -ydx = 0$。一方、(正の向きの)$C_2$ に沿った積分は $\displaystyle\int_{C_2} -ydx = -\int_0^{2\pi} -(1-\cos t)d(t-\sin t) = \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt = 3\pi$。ゆえに、$C_1+C_2$ で囲まれた領域の面積は、3π である。

3.5 [問] (1) 被積分関数 ($\times$ 積分要素) を $\omega = (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ とおく。ω を積分路 C_1 上で考えた $\omega|_{C_1}$ は $\omega|_{C_1} = (\beta t+\gamma t)d(\alpha t)+(\gamma t+\alpha t)d(\beta t)+(\alpha t+\beta t)d(\gamma t) = 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)tdt$ となるので、C_1 上の線積分は $\displaystyle\int_{C_1}\omega = 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\int_0^1 tdt = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ となる。

ω を積分路 C_2 上で考えた $\omega|_{C_2}$ は $\omega|_{C_2} = (\beta t+0)d(\alpha)+(0+\alpha)d(\beta t)+(\alpha+\beta t)d(0) = \alpha\beta dt$ となるので、C_2 上の線積分は $\displaystyle\int_{C_2}\omega = \alpha\beta\int_0^1 dt = \alpha\beta$ となる。

(2) $\displaystyle I = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$ とおく。

(i) $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$　(ii) この C 上で $dx = dy = 0$ ゆえ、$I = 0$.

(iii) $C = C_1+C_2+C_3+C_4$ と分ける。ただし、$C_1 : (x,y) = (1-t, t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, $C_2 : (x,y) = (-t, 1-t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, $C_3 : (x,y) = (t-1, -t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, $C_4 : (x,y) = (t, t-1)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. すると、$\displaystyle\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_4}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ であり、よって $\displaystyle I = 4\int_0^1\frac{dt}{1-2t+2t^2} = 4\int_0^1\frac{2dt}{1-(2t-1)^2} = 8\int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = 8\Big[\arctan x\Big]_0^1 = 4\pi$.

[章末問題]

(3.1) a) の曲線は、$y = x^2, z = y^2(= x^2)$ で与えられる。b) の曲線は、xy 平面上で $y = (e^x+e^{-x})/2$ で与えられる. 図は略す。

(3.2) a) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$ ゆえ、弧の長さは $\displaystyle\int_0^s\sqrt{2}dt = \sqrt{2}s$.

b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 2t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (0, 2)$ ゆえ、弧の長さは $\displaystyle\int_0^s\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{4}\left(2s\sqrt{1+4s^2}+\log(2s+\sqrt{1+4s^2}\right)$.
ここで、$\displaystyle\int\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ を使った。

c) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1-\cos t, \sin t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t)$ ゆえ、弧の長さは $\int_0^s \sqrt{2-2\cos t}dt = \int_0^s \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}dt = \int_0^s 2\sin\frac{t}{2}dt = 4(1-\cos\frac{s}{2})$.

(3.3) (i) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 2t, \cos t - t\sin t)$ であり、$\dot{\mathbf{r}}(\pi) = (1, 2\pi, -1)$, $\mathbf{r}(\pi) = (\pi, \pi^2, -\pi)$ となる。$t = \pi$ での接線の式は、$(x, y, z) = (\pi, \pi^2, -\pi) + s(1, 2\pi, -1)$ あるいは $x - \pi = \dfrac{y-\pi^2}{2\pi}, \dfrac{z+\pi}{-1}$.

(ii) yz 平面 $x = 0$ と直線の交点で $s = -\pi$ ゆえ、その交点は $(0, -\pi^2, 0)$.

(3.4) (i) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}}(t) = -\cos^2 t\sin t + \sin^2 t\cos t + t^2$ であるから、$\int_0^{\pi/2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \left[\dfrac{1}{3}\cos^3 t + \dfrac{1}{3}\sin^3 t + \dfrac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi^3}{24}$.

(ii) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t, 4t^3, 6t^5)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (t^{26}, 2t^{24}, 3t^{22})$ であるから、$\int_0^1 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 28t^{27}dt = 1$.

(3.5) 積分路に次のパラメータ表示をする： $OP : (x, y) = (t, 0)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ $PQ : (x, y) = (1, 2t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ $QR : (x, y) = (1-t, 2)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ $RO : (x, y) = (0, 2-2t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$

OP, PQ, QR, RO 上でそれぞれ $\dot{\mathbf{r}} = (1, 0), (0, 2), (-1, 0), (0, -2)$ となり、$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ はそれぞれ、$\int_0^1 tdt = \dfrac{1}{2}$, $\int_0^1 2t\cdot 2dt = 2$, $\int_0^1 (1-t)e^2(-1)dt = -\dfrac{1}{2}e^2$, $\int_0^1 0dt = 0$ である。従って、$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}e^2$ となる。

(3.6) (i) $C_1 = PQ$ のパラメータ表示を $(1-2t, 0)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とすると、$\int_{C_1} (x^2+y^2)dx + xdy = \int_0^1 (1-2t)^2(-2)dt = -\dfrac{2}{3}$. (ii) $\int_{C_2} (x^2+y^2)dx + xdy = \int_0^\pi (-\sin t + \cos^2 t)dt = \dfrac{\pi}{2} - 2$

(iii) $\int_{C_3} (x^2+y^2)dx + xdy = \int_\pi^{2\pi} (-\sin t + \cos^2 t)dt = \dfrac{\pi}{2} + 2$

(3.7) 線積分はグリーンの公式により $\int_{x^2+y^2\leqq 1} (-2+1)dxdy = -\pi$ となる。

(3.8) 3.5 節、[例題] (勾配ベクトル場の線積分) の式 $\int_C (\mathrm{grad}\, f)\cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(t))|_a^b = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$ により、$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (a+1)^2(b+1)(c+1) - a^2bc$.

(3.9) この領域の第 1 象限を S_1 として、$A(S_1) = \dfrac{1}{2}\int_{\partial S_1} (xdy - ydx)$ を考える。境界を $\partial S_1 = C_x + C + C_y$ (C_x, C_y はそれぞれ x, y 軸に沿った部分) と分ける。C を $(x, y) = (a\cos^4\theta, a\sin^4\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2})$ とパラメータ表示する。

C_x 上では $y = 0$ ゆえ、$xdy - ydx = 0$ である。同様に、C_y 上で $xdy - ydx = 0$ である。従って、$A(S_1) = \dfrac{1}{2}\int_C [a\cos^4\theta\cdot 4a\sin^3\theta\cos\theta + (-a\sin^4\theta)\cdot 4a\cos^3\theta(-\sin\theta)]d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\sin^3\theta d\theta = \dfrac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^3 2\theta d\theta = \dfrac{a^2}{8}\int_0^\pi \sin^3 tdt = \dfrac{a^2}{8}\left[-\cos t + \dfrac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^\pi = \dfrac{a^2}{6}$ となり、$A(S) = 4A(S_1) = \dfrac{2}{3}a^2$ となる。

第 4 章

4.1 [問] 1) $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-1}}{2}$, $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-1}}{2}$ を双曲線関数とする。

1. 楕円面 $(x, y, z) = (a\cos\theta\cos\varphi, b\cos\theta\sin\varphi, c\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2})$
2. 1 葉双曲面 $(x, y, z) = (a\cosh t\cos\varphi, b\cosh t\sin\varphi, c\sinh t)$ $(-\infty < t < \infty,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$
3. 2 葉双曲面 $(x, y, z) = (a\cosh t, b\sinh t\cos\varphi, c\sinh t\sin\varphi)$ $(-\infty < t < \infty,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$
4. 関数 $g(x, y)$ のグラフ $(x, y, z) = (x, y, g(x, y))$ $((x, y) \in\ g$ の定義域)

2) 図は略す。

4.3 [問] 1) 曲面の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面を考える。 1. 楕円面 $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} + \dfrac{z_0z}{c^2} = 0$

2. 1 葉双曲面 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}-\dfrac{z_0z}{c^2}=0$ 3. 2 葉双曲面 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}-\dfrac{z_0z}{c^2}=0$

4. 関数 $g(x,y)$ のグラフ $z-z_0=\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

2) $f=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1$ として $\mathrm{grad}\, f=\big(\dfrac{x_1}{a^2},-\dfrac{y_1}{b^2},-\dfrac{z_1}{c^2}\big)$ だから、P_0P_1 と接平面の直交条件は、ある λ について $\lambda\,\mathrm{grad}\, f=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$ となる。これを解いて $(x_1,y_1,z_1)=\big(x_0/(1+\frac{\lambda}{a^2}),y_0/(1-\frac{\lambda}{b^2}),z_0/(1-\frac{\lambda}{c^2})\big)$ 。ただし、λ は $\dfrac{x_0^2}{(a+\frac{\lambda}{a})^2}-\dfrac{y_0^2}{(b-\frac{\lambda}{b})^2}-\dfrac{z_0^2}{(c-\frac{\lambda}{c})^2}=1$ の解である。

[章末問題]

(4.1) 図は略す。

(4.2) 図は略す。パラメータ表示は、例えば $(x,y,z)=(az\cos\theta,bz\sin\theta,z)$ $(-\infty<z<\infty,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ で与えられる。

(4.3) (i) $3x-y+z=0$ (ii) $z=0$

(4.4) 曲面の法線ベクトル $(-\dfrac{\partial z}{\partial x},-\dfrac{\partial z}{\partial y},1)=(-2x,-6y,1)$ が、$(4,3,-1)$ に並行になればよい。よって、$(2,\dfrac{1}{2},\dfrac{19}{4})$。

(4.5) a) F の Jacobi 行列は

$$J(F)_{(a,b,c)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\f_x(a,b,c)&f_y(a,b,c)&f_z(a,b,c)\end{pmatrix}$$ となる。ここで、$f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x},f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y},f_z=\dfrac{\partial f}{\partial z}$ 。

従って、$\det J(F)_{(a,b,c)}=\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\neq 0$ ゆえ、rank $J(F)_{(a,b,c)}=3$ である。

b) $F^{-1}(u,v,w):=(g_1(u,v,w),g_2(u,v,w),g_3(u,v,w))$ の両辺を F で写像すると、$F(F^{-1}(u,v,w))=F(g_1(u,v,w),g_2(u,v,w),g_3(u,v,w))=(g_1(u,v,w),g_2(u,v,w),f(g_1(u,v,w),g_2(u,v,w),g_3(u,v,w)))$ となる。一方、逆写像の定義により $F(F^{-1}(u,v,w))=(u,v,w)$ であるから、$g_1(u,v,w)=u,\quad g_2(u,v,w)=v,\quad f(g_1(u,v,w),g_2(u,v,w),g_3(u,v,w))=w$ を得る。

c) b) の最後の式で、$w=0$ とおくと、$f(u,v,g_3(u,v,0))=0$ となる。$x=u,y=v$ と書き換えれば、g_3 の定義に注意して、$f(x,y,g(x,y))=0$ を得る。

第 5 章

[章末問題]

(5.1) (i) $A(S)=\displaystyle\int_S dxdy=\int_{D^*}4(u^2+v^2)dudv=\int_0^1\int_0^{\pi/2}4r^2\cdot rdrd\theta=\frac{\pi}{2}$

(ii) 極座標で表すと、y 軸の右の部分が $r^2=2a^2\cos 2\theta$ $(-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4})$ となるから、

$$A(S)=2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\Big(\int_0^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}}rdr\Big)d\theta=2a^2.$$

(5.2) $dxdy=d(4u)d(3v)=12dudv$ ゆえ、$\displaystyle\int_D xydxdy=\int_D 4u(2u+3v)12dudv=48\int_D(2u^2+3uv)dudv=140.$

(5.3) $\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta={}^t(-r^2\cos\theta,-r^2\sin\theta,r)$ であり、$dA=r\sqrt{1+r^2}drd\theta$ となる。よって、$A(S)=\displaystyle\int_S dA=\int_0^a r\sqrt{1+r^2}dr\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{3\pi}{2}((1+a^2)^{3/2}-1).$

(5.4) (i) $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y={}^t(-z_x,-z_y,1)={}^t(-2x,-1,1)$ であり、$dA=\sqrt{2+4x^2}dxdy$ となる。よって、$\displaystyle\int_S xdA=\frac{1}{6}(6^{3/2}-2^{3/2}).$

(ii) 球の対称性により、$\displaystyle\int_S z^2dA=\int_S y^2dA=\int_S x^2dA$ であり、$\displaystyle\int_S z^2dA=\frac{1}{3}\int_S(x^2+y^2+z^2)dA=\frac{1}{3}\int_S dA$ となる。よって、(単位球面の表面積は 4π であるから) $\displaystyle\int_S z^2dA=\frac{4}{3}\pi.$

(5.5) $d\mathbf{A}=\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta drd\theta={}^t(\sin\theta,-\cos\theta,r)drd\theta$ となるから、面積は $A(S)=\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1+r^2}drd\theta=2\pi\Big[\frac{r}{2}\sqrt{1+r^2}+\frac{1}{2}\log|r+\sqrt{1+r^2}|\Big]_0^1=\big(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\big)\pi.$

(5.6) (i) S をグラフ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(D:\ x^2+y^2\leqq 1)$ とみて、$d\mathbf{A}={}^t\big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\big)$ となる。よって、$\int_S\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\int_D\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\theta}{\sqrt{1-r^2}}=2\pi.$

(ii) S をグラフ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ とみて、S の向きを xy 平面の向きで入れ、さらに、x,y を極座標 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ $(1\leqq r\leqq 2,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ に換える。$d\mathbf{A}={}^t(-\cos\theta,-\sin\theta,1)drd\theta$ となる。よって、$\int_S\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\int_1^2\int_0^{2\pi}r^3(1-\cos^3\theta-\sin^3\theta)drd\theta=\frac{15}{2}\pi.$

(iii) $(x,y,z)=(\cos\theta,\sin\theta,z)$ $(D:\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ 0\leqq z\leqq 1)$ とパラメータ表示する。$d\mathbf{A}={}^t(\cos\theta,\sin\theta,0)d\theta dz$ となる。よって、$\int_S\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\int_D(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta dz=2\pi.$

(5.7) $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ とみて、$d\mathbf{A}={}^t(\frac{cx}{a^2}/\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\frac{cy}{b^2}/\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},1)dxdy$ となる。よって、$\int_S\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\frac{2\pi}{5}a^3bc.$

第6章

[章末問題]

(6.1) 円柱を底面、上面、側面に分ける: $S=S_0+S_1+S_2$. パラメータ表示は、次の通り。

$S_0:\ (x,y,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,0)$ $(0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$, $S_1:\ (x,y,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,1)$ $(0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$, $S_2:\ (x,y,z)=(a\cos\theta,a\sin\theta,z)$ $(0\leqq z\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$。

S_i 上の面積分を I_i とする。S_0,S_1 で $dz=0$ であるから、$-I_0=\int_{S_0}(z-y)dxdy=\int_0^a\int_0^{2\pi}(-r\sin\theta)rdrd\theta=-\int_0^a r^2dr\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta=0$, $I_1=\int_{S_1}(z-y)dxdy=\int_0^a\int_0^{2\pi}(1-r\sin\theta)rdrd\theta=\int_0^a\int_0^{2\pi}rdrd\theta-\int_0^a\int_0^{2\pi}(-r\sin\theta)rdrd\theta=\pi a^2$. ($S_1$ の正の向きは、下向き：$-dxdy$ が正。)

S_2 の法線ベクトルは xy 平面に平行ゆえ、S_2 上 $dxdy=0$ である。また、$dydz=a\cos\theta d\theta dz,\ dzdx=a\sin\theta d\theta dz$ である。よって、

$I_2=\int_0^1\int_0^{2\pi}\big[(a\cos\theta-z)a\cos\theta+a(\sin\theta-\cos\theta)\big]d\theta dz=(a^2-az\cos\theta+a^2\sin\theta\cos\theta)d\theta dz=2\pi a^2.$

以上より、$I=I_0+I_1+I_2=3\pi a^2$.

(6.2) (i) $f=x^2\cos y$ (ii) (i) の f を用いて、線積分は $\int_C\operatorname{grad}f\cdot d\mathbf{r}=f(\mathbf{r}(t_1))-f(\mathbf{r}(t_0))=e^{2t_1-2}\cos\sin\frac{\pi}{t_1}-e^{2t_0-2}\cos\sin\frac{\pi}{t_0}$.

(6.3) ストークスの公式を使うと計算は比較的楽である。(i) -2π (ii) -16π

(6.4) ∂S 上で $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ として、$\int_{\partial S}(ydx-xdy+e^{xy}dz)=\int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta-\cos^2\theta)d\theta=-2\pi$ である。

$\mathbf{F}=(y,-x,e^{xy})$ としてストークスの公式により、$\int_{\partial S}(ydx-xdy+e^{xy}dz)=\int_S xe^{xy}dydz-ye^{xy}dzdx-2dxdy$ である。

(6.5) (i) $\mathbf{a}={}^t(a_1,a_2,a_3)$ とおくと $\mathbf{a}\times\mathbf{F}={}^t(a_2z-a_3y,a_3x-a_1z,a_1y-a_2x)$ だから、$\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{F})={}^t(2a_1,2a_2,2a_3)=2\mathbf{a}$ となる。

(ii) ストークスの公式を $\mathbf{a}\times\mathbf{F}$ に適用する。(i) により面積分は、$\int_S\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A}=2\int_S\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dA$ となるので、関係式 $2\int_S\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dA=\int_{\partial S}(\mathbf{a}\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{r}$ が示せた。

(6.6) 第2章の章末問題 (2.9) にある通り、$\nabla_x = P\nabla_y$ が成り立つ。$\det P = 1$ であるような直交変換は、空間内の回転に他ならないので、$P(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (P\mathbf{a})\times(P\mathbf{b})$ が成り立ち、$\nabla_x\times\mathbf{F} = (P\nabla_y)\times\mathbf{F} = P(\nabla_y\times P^{-1}\mathbf{F})$ となる。

(6.7) (i) rot $(f\nabla g)$ の x 成分は、$\partial_y(f\partial_z g) - \partial_z(f\partial_y g) = (\partial_y f)(\partial_z g) - (\partial_z f)(\partial_y g)$ であるが、これは $(\nabla f)\times(\nabla g)$ の x 成分に等しい。他の成分も同様。

(ii) $\mathrm{rot}(f\nabla g + g\nabla f) = (\nabla f)\times(\nabla g) + (\nabla g)\times(\nabla f) = 0$ とストークスの公式により明らか。

(6.8) グリーンの公式と f の条件により $\int_C (\frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy) = \int_S (-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2})dxdy = 0$ となる。

第7章

7.4 [問] $\frac{\partial\phi}{\partial t} = -vf'(x-vt)$ (または $vf'(x+vt)$), $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = v^2 f''(x-vt)$ (または $v^2 f''(x+vt)$) ゆえ、方程式 $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})\phi(x,t) = 0$ は直ちに分かる。

[章末問題]

(7.1) Ω を単位球 (の内部) とする。$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{F}dV = \int_\Omega 2(1+y+z)dV = 2\int_\Omega dV = \frac{8\pi}{3}$ となる。ここで、対称性により、$\int_\Omega ydV = \int_\Omega zdV = 0$ であることを使った。

(7.2) $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = y^2+x^2$ である。円柱の内部 Ω で、$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ -1 \leqq z \leqq 1$ とパラメータをとれば $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{F}dV = \int_{-1}^{1} dz \int_0^1 r^2\cdot rdr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi$ を得る。

(7.3) $\mathrm{div}\,\mathbf{r} = 3$ であり、ガウスの公式により $\int_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}dA = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{r}dV = 3\ \times Vol(\Omega)$.

(7.4) $\mathbf{F} = \mathbf{n}$ とすれば、$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 1$ である。S の内部を Ω とすると、ガウスの公式により $\int_S 1dA = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{F}dV$ である。

$\mathrm{div}\,\mathbf{F} = \frac{2}{r}$ となる。$(x,y,z) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ とパラメータをとると、$dxdydz = r^2\cos\theta drd\varphi d\theta$ となり、$\int_S 1dA = \int_\Omega \frac{2}{r}r^2\cos\theta drd\varphi d\theta = 2\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = 4\pi R^2$.

(7.5) $I = \int_{\partial V}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ をガウスの公式で計算する。V のパラメータ表示は $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ $(0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ r^2 \leqq z \leqq 1)$

(i) $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = x$ であり、$I = \int_V xdxdydz = \int_0^1 r^2dr\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta \int_{r^2}^1 dz = 0$.

(ii) $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 3$ であり、$I = \int_V 3dV = 3\int_V rdrd\theta dz = \frac{3}{2}\pi$.

(7.6) ガウスの公式により、$\int_S xdydz = \int_\Omega 1dV$ であり、他の積分も同じ Ω の体積となる。

(7.7) 電磁誘導の法則を S 上積分して、ストークスの公式を使えば、$\int_{\partial S}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_S \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}$ となるから、後は積分と $\frac{\partial}{\partial t}$ との順序交換をすればよい。

(7.8) 静電場では $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = 0$ であるから、一般化されたアンペールの法則を S 上積分してストークスの公式を使えば、求める関係式を得る。

第8章

8.2 [問] $\omega_i = a_{i1}dx_1 + a_{i2}dx_2 + a_{i3}dx_3$ $(i = 1,2)$ とおいて計算する。

$\omega_1\wedge\omega_2 = (a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + a_{13}dx_3)\wedge(a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 + a_{23}dx_3) = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})dx_2\wedge dx_3 + (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})dx_3\wedge dx_1 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})dx_1\wedge dx_2$ となる。

同様に $\omega_2\wedge\omega_1$ を計算して、$\omega_2\wedge\omega_1 = -\omega_1\wedge\omega_2$ なる結果を得る。

8.6 [問] 例えば、$\mathbf{F} = {}^t(1,1,1) = \mathrm{grad}(x+y+z) = \mathrm{rot}\,{}^t(z,x,y)$ は $\mathrm{grad}\,\phi$ とも $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ とも表される。

[章末問題]

(8.1) $\omega_1 = \omega_{\mathbf{A}}, \omega_2 = \omega_{\mathbf{B}}$ とおけば、条件 $\omega_1 \wedge \omega_2 = \eta$ は、$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{G} = (g_1, g_2, g_3)$ に他ならない。$\mathbf{G}$ に直交する平面の 2 つのベクトルで張る平行四辺形の面積が $|\mathbf{G}|$ であるものを ($\mathbf{G}$ について連続微分可能に) とればよい。

(8.2) (i) $f_2 f_3 df_1 + f_1 f_3 df_2 + f_1 f_2 df_3$,

(ii) $(\partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_x f) dy \wedge dz + (\partial_z \partial_y f - \partial_x \partial_z f) dz \wedge dx + (\partial_x^2 f - \partial_y^2 f) dx \wedge dy$

(8.3) (i) $du \wedge dx + dv \wedge dy = \dfrac{\partial u}{\partial y} dy \wedge dx + \dfrac{\partial v}{\partial x} dx \wedge dy = \left(-\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy$

(ii) $dP \wedge dx + dQ \wedge dy = (dp + du) \wedge dx + (dq + dv) \wedge dy = dp \wedge dx + dq \wedge dy + du \wedge dx + dv \wedge dy$ だから、求める条件は $du \wedge dx + dv \wedge dy = 0$ すなわち、$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ である。

(8.4) (i) $2s^2(1+t^2) ds \wedge dt$, (ii) $\dfrac{\partial f}{\partial s} ds + \dfrac{\partial f}{\partial t} dt = df$

(8.5) $d(f dx \wedge dy + g dy \wedge dz) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dz$ となるので、求める条件は $\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0.$

(8.6) (i) $f = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, (ii) $d(xydx + xydy) \neq 0$ ゆえ、ポテンシャル関数 f を持たない。 (iii) $f = \dfrac{1}{3}x^3 + xy^2$

(8.7) すべて $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 0$ を満たす。

(i) $\mathbf{G} = (0, xy, xyz)$, (ii) $\mathbf{G} = (0, -\cos x, x \sin y)$, (iii) $\mathbf{G} = (\frac{1}{2}z^2, xy - z, x^2 y)$,

(8.8) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0$ ゆえ、$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, f$ なる関数 f が存在する。すると、$0 = \mathrm{div}\,\mathbf{F} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \nabla^2 f$ ゆえ、f が求めるものである。

(8.9) (i) 直接計算して確かめられる。 (ii) $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とパラメータをとる。$\displaystyle\int_C \omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$