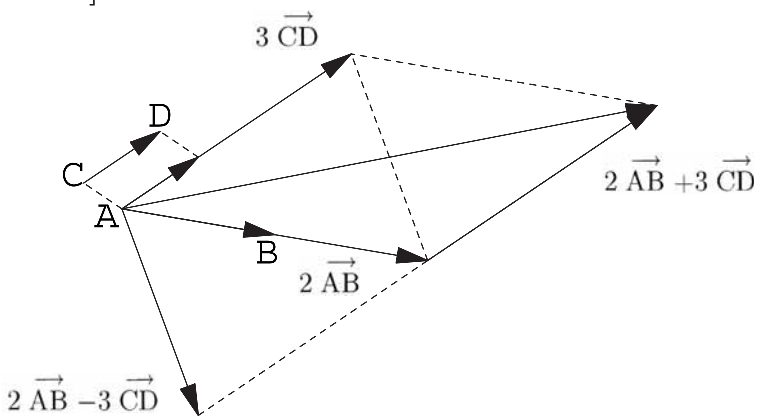
問題の解答について，演習書

[A] **「詳解演習 線形代数」サイエンス社，２０００年**

にあるものは省略した。該当部分はそれを参照して欲しい。

[第１章]

[問題 1.1]



[問題 1.2] $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(2,3)$

[問題 1.3] (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,1)$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,4)$ (3) $2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(13,14)$
(4) $2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-5,-10)$

[問題 1.4] (1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ (2) $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$
(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3+2=5$ (4) $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\theta=45^\circ$

[問題 1.5] (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$ より，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$
(2) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|\leqq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

[問題 1.6] (1) $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ とすると

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = (a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2 &= (a_1^2+a_2^2)+2(a_1b_1+a_2b_2)+(b_1^2+b_2^2)\\ &= (a_1^2+2a_1b_1+b_1^2)+(a_2^2+2a_2b_2+b_2^2)\\ &= (a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2\end{aligned}$$

よって，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$

(2)

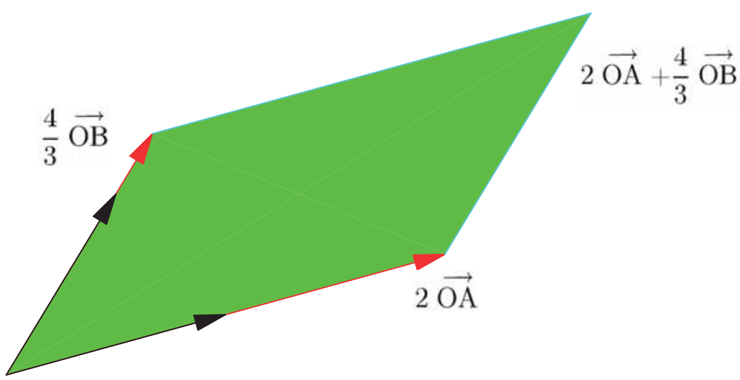
$$\left|\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right|^2+\left|\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}\right|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{|\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2}{4} + \frac{|\boldsymbol{a}|^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2}{4} \\
&= \frac{|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2}{2}
\end{aligned}
$$

[**問題 1.7**] 直線上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ とすると，$x = 1-t, y = 2+3t$。よって，$x^2 + y^2 = (1-t)^2 + (2+3t)^2 = 10t^2 + 10t + 5 = 10\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$ 。よって，$t = -\frac{1}{2}$ のとき，最小値 $\mathrm{OH} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 。

I 発展問題

1. $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
2. AP と BC の交点を Q とすると，$0 \leqq s \leqq 1, 0 \leqq t \leqq 1$ で
   $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{AQ}}, \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
   となるものが存在する。したがって，
   $$
   \begin{aligned}
   \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s((1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\
   &= (1 - s(1-t) - st)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + st\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}
   \end{aligned}
   $$
   $\ell = (1 - s(1-t) - st) = 1 - s \geqq 0, m = s(1-t) \geqq 0, n = st \geqq 0$ とおくと，$\ell + m + n = 1$。
3. 求める範囲は図の平行四辺形の内部および周



4. (1) 条件から，
   $$3\,\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathbf{0}$$
   $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}, t \geqq 1,$ とすると
   $$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$

よって，$\frac{t}{3}+\frac{t}{3}=1$ だから，$t=\frac{3}{2}$ 。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}$$

より，Q は BC の中点である。BQ : QC = 1 : 1

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ だから，AP : PQ = 2 : 1

5. (1) $\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}=(5,3+t)$, $\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}=(-1,3-t)$ だから，平行となるのは

$$\frac{3+t}{5}=\frac{3-t}{-1}$$

これから，$t=\frac{9}{2}$ 。

(2) 垂直となるのは

$$(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}})\cdot(\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}})=-5+(3+t)(3-t)=0$$

より，$t=\pm 2$。

6. $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を θ とすると，三角形の面積は $\frac{1}{2}$ AB AC $\sin\theta$ である。よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\theta &= \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\mathrm{AB}^2\mathrm{AC}^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\\ &= (*)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(p_1,p_2),\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(q_1,q_2)$ とすると

$$\begin{aligned}(*) &= \sqrt{(p_1^2+p_2^2)(q_1^2+q_2^2)-(p_1q_1+p_2q_2)^2}\\ &= \sqrt{(p_1q_2-p_2q_1)^2}=|p_1q_2-p_2q_1|\\ &= |(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|\end{aligned}$$

[**第 2 章**]

[**問題 2.1**] (1) $3\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,6,9)$ (2) $2\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(4,6,8)$
(3) $3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(7,12,17)$ (4) $3\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-1,0,1)$

[**問題 2.2**] (1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$ (2) $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{9}=3$ (3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+0+2=3$
(4) $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より，$\theta=45^\circ$

[**問題 2.3**] (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$ より，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$
(2) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|\leqq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

[**問題 2.4**] 3 点 A, B, C を通る平面を $ax+by+cz+d=0$ とする。

A(1, 1, 0), B(1, 0, 1), C(0, 1, 1) を通るので

$$\begin{cases} a+b+d=0 \\ a+c+d=0 \\ b+c+d=0 \end{cases}$$

これを解くと，$a=b=c=-\frac{1}{2}d$。よって，

$$x+y+z-2=0$$

[**問題 2.5**] 平面上の点 P(x, y, z) と H(a, b, c) について

$$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2$$

係数を比較すると

$$\frac{a}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{2}, \frac{b}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{2}, \frac{c}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{2}$$

よって，$a=b=c=\frac{2}{3}$ より，H$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ である。

(2) OH $=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 。

[**問題 2.6**] (1) 平面に垂直なベクトルは $\boldsymbol{e}=(1, 2, 3)$ であるから，求める直線の方程式は

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

(2) 平面と上の直線との交点が垂線の足 H である。上の直線の方程式で等式を t とおくと

$$x=1+t, y=1+2t, z=1+3t$$

よって，$(1+t)+2(1+2t)+3(1+3t)=1$ から，$t=-\frac{5}{14}$ 。

H$(\frac{9}{14}, \frac{2}{7}, -\frac{1}{14})$ より，OH $=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

[**問題 2.7**] (1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{3}$ (2) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{29}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1, -2, 1)$

(4) O, A, B で作られる平行四辺形の面積は $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{6}$ 。

[**問題 2.8**] (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1, -2, 1)$

(2) O, A, B, C で作られる平行六面体の体積は

$$|(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|3-8+6|=1$$

II 発展問題

1. (1) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = 2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
   (2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ ならば,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = (-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$$

   (3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ ならば,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\\ &= \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

   よって，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の終点は同一直線上にある。
2. 略 ([A, 例題 4.7, p.90])
3. 平面 $ax+by+cz+d_1=0$ 上の点 (p,q,r) から平面 $ax+by+cz+d_2=0$ への距離は

$$\frac{|ap+bq+cr+d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-d_1+d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

4. OP の延長線が三角形 ABC と交わる点を Q とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = p\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}, p \geqq 0, q \geqq 0, r \geqq 0, p+q+r=1$$

   と表される。また,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\ (0 \leqq t \leqq 1)$$

   と表されるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = tp\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + tq\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + tr\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

   よって，$\ell=tp, m=tq, n=tr$ とおけばよい。
5. $\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{9}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \frac{2}{3}\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$

   よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$ 。
   (2) OP : PQ = 2 : 1
6. (1)

$$|\boldsymbol{x}_0+s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|^2 = (s+t+1)^2+(s-t)^2+(s+2t)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= 3s^2+4st+6t^2+2s+2t+1 \\
&= 3\left(s+\frac{2t+1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}\left(t+\frac{1}{14}\right)^2+\frac{9}{14}
\end{aligned}
$$

よって，$t=-\frac{1}{14}, s=-\frac{2}{7}$ のとき，最小値 $\frac{9}{14}$ をもつ。

(2) $\boldsymbol{x}_0-\frac{2}{7}\boldsymbol{a}-\frac{1}{14}\boldsymbol{b}=(\frac{9}{14},-\frac{3}{14},-\frac{3}{7})$ だから，

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\frac{2}{7}\boldsymbol{a}-\frac{1}{14}\boldsymbol{b})=0,\ \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\frac{2}{7}\boldsymbol{a}-\frac{1}{14}\boldsymbol{b})=0$

[**第 3 章**]

[**問題 3.1**] (1) $a=-1, b=1$ (2) $a=2, b=-1$

[**問題 3.2**] (1) $5+i$ (2) $-1+5i$ (3) 13 (4) $12+5i$ (5) $-i$ (6) $\dfrac{1-3i}{3}$

[**問題 3.3**] (1) $\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$ (2) $(1+i)^{10}=2^5\,(\cos 450^\circ+i\sin 450^\circ)=32i$

[**問題 3.4**] (1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると，$r^2=1, 2\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ 。よって，$z=1\cdot(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ z=1\cdot(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$

(2) 解の公式から，$z=i\pm 1$ 。

(3) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると，$r^4=1, 4\theta=\pi+2n\pi$ 。よって，

$z=1\cdot(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ z=1\cdot(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$z=1\cdot(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})=\frac{-1-i}{\sqrt{2}},\ z=1\cdot(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

III 発展問題

1. α,β は，$z^2+z+1=0$ の解である。
   (1) -1 (2) 1 (3) -1 (4) -1
2. $(2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ))^n=2^n(\cos n\cdot 30^\circ+i\sin n\cdot 30^\circ)$ が実数となるような最小の自然数は $n=6$ でそのときの値は -2^6。
3. (1) $|z+w|^2=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=|z|^2+|w|^2+(\overline{z}w+z\overline{w})$
   (2) $(|z|+|w|)^2=|z|^2+|w|^2+2|z||w|$ 。ここで，$z=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1), w=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とすると
   $$(\overline{z}w+z\overline{w})=2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)\leqq 2r_1r_2=2|z||w|$$
   よって，$|z+w|^2\leqq(|z|+|w|)^2$ 。
   (3) (2) で等式が成り立つのは $\theta_2-\theta_1=2n\pi$ (n : 整数) のとき，すなわち，z と w の偏角が一致するとき。
   (4) $|(1-t)z+tw|\leqq(1-t)|z|+t|w|<1$ 。
4. 三角不等式から $|z|\leqq|z-i|+|i|=4,\ |z-i|\leqq|z|+|-i|$ から，

$2 \leqq |z| \leqq 4$。等号は $z=-2i, 4i$ のとき。よって，$|z|$ の最小値は 2，最大値は 4 。

5. (1) a, b が実数のとき，

$$0=\overline{z^3+az^2+bz-4}=\overline{z}^3+a\overline{z}^2+b\overline{z}-4$$

より，$\overline{1+i}$ も解である。

(2) $z=1+i, 1-i$ を解とする 2 次方程式は $z^2-2z+2=0$ である。

よって，$z^3+az^2+bz-4=(z-c)(z^2-2z+2)$ とおくと，

$c=2,\ a=-c-2=-4,\ b=2c+2=6$ 。

6. $|z-\zeta|^2=(z-\zeta)(\overline{z}-\overline{\zeta})=z\overline{z}-\zeta\overline{z}-\overline{\zeta}z+\zeta\overline{\zeta}=1-\zeta\overline{z}-\overline{\zeta}z+|\zeta|^2$

$|1-\overline{\zeta}z|^2=(1-\overline{\zeta}z)(1-\zeta\overline{z})=1-\zeta\overline{z}-\overline{\zeta}z+|\zeta|^2|z|^2=1-\zeta\overline{z}-\overline{\zeta}z+|\zeta|^2$

よって，$|z-\zeta|=|1-\overline{\zeta}z|$ 。

7. $(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$ に対して

(1) x 軸，y 軸

(2) 2 直線 $y=x, y=-x$

8. (1) $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=(\alpha-\beta)(\gamma-\beta+\beta-\delta)=(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)+(\alpha-\beta)(\beta-\delta)$

右辺の第 1 項に $(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)$ を加えると $(\delta-\beta)(\gamma-\beta)$ で，

右辺の第 2 項に $(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)$ を加えると $(\gamma-\beta)(\beta-\delta)$ である。

よって，求める等式が示される。

(2) (1) より，$(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=-(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)-(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)$ 。

よって，三角不等式を用いると

$$\begin{aligned}|(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)| &= |-(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)-(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)| \\ &\leqq |(\alpha-\beta)||(\gamma-\delta)|+|(\alpha-\gamma)||(\delta-\beta)|\end{aligned}$$

[**第 4 章**]

[**問題 4.1**] $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

[**問題 4.2**] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

[問題 4.3] $\begin{pmatrix} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 16 & 0 \\ 21 & 8 & 1 \\ 8 & 14 & 4 \end{pmatrix}$

[問題 4.4] $a = b = c = d = e = f = 1$

[問題 4.5] $a = 3,\ b = 1,\ c = 3,\ d = 10$

[問題 4.6] A が $m \times n$ 行列とすると，${}^tA$ は $n \times m$ 行列である。これらが一致するならば，$m = n$ である。よって，A は正方行列である。

[問題 4.7] (1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 & 11 \\ 7 & 3 & 11 & 7 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

[問題 4.8] $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[問題 4.9] (1) $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ (2) $BA = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[問題 4.10] (1) ${}^tAA = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}$ (2) $A{}^tA = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{pmatrix}$

[問題 4.11] 左辺は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

また，右辺は

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

であるから，求める等式が示される。

[問題 4.12] (1) $(A+B)C = \begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 38 & 50 \end{pmatrix}$,

$AC + BC = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 16 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 38 & 50 \end{pmatrix}$

$(AB)C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 29 \\ 86 & 113 \end{pmatrix}$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 29 \\ 86 & 113 \end{pmatrix}$$

[問題 4.13] (1) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A^{10} = (A^3)^3 A = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

[問題 4.14] $(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$。これが，$A^2 - B^2$ に一致するのは，$-AB + BA = O$ のとき，すなわち，$AB = BA$。

[問題 4.15] (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = O, A^4 = O$ 。

(2) $B^5 = (E+A)^5 = E + 5A + \frac{5 \cdot 4}{2} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 55 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[問題 4.16] $A^2 = \begin{pmatrix} {A_{11}}^2 & O \\ O & {A_{22}}^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} {A_{11}}^3 & O \\ O & {A_{22}}^3 \end{pmatrix}$

VI 発展問題

1. (1) A の i 行と j 行を入れ替えた行列
   (2) A の i 行を c 倍した行列
   (3) A の i 行に j 行の c 倍を加えた行列
   (4) A の i 列と j 列を入れ替えた行列
   (5) A の i 列を c 倍した行列
   (6) A の i 列に j 列の c 倍を加えた行列
2. $A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right)$ が上三角行列のとき，$A+B$ の (i,j) 成分について

   $$i > j \text{ ならば，} \qquad a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0$$

   さらに，AB の (i,j) 成分について, $i > j$ ならば,

   $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \times 0 = 0$$

3. 略 ([A, 例題 1.18, p.18])

[第 5 章]

[問題 5.1] (1) $x=2, y=0$ (2) $x=-1, y=2$ (3) $x=\frac{1-i}{2}, y=\frac{1-i}{2}$ (4) $x=\frac{ac-bd}{a^2+b^2}, y=\frac{ad+bc}{a^2+b^2}$

[問題 5.2] $\Delta = \begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ 1 & k+1 \end{vmatrix} = (k+1)^2-1=k(k+2)$ だから,
(1) $k \neq 0, -2$ (2) $k=0$ (3) $k=-2$

[問題 5.3] (1) -2 (2) -2 (3) 2 (4) $4i$

[問題 5.4] (1) $\begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{vmatrix} = \alpha^2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3x+a_3y & a_4x+a_4y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3x & a_4x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3y & a_4y \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$

[問題 5.5] $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3 = (-1,2,-1)$

[問題 5.6] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を空間ベクトルとみなすと $(a_1,a_2,0),(b_1,b_2,0)$ となる。これらの外積から，求める面積は

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3\right| = \frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

[問題 5.7] (1) $D=20$ (2) $x=\frac{1}{5}$

[問題 5.8] (1) $-a_1b_3c_2$ (2) $a_1b_2c_3$ (3) 0 (4) 12

[問題 5.9] (1) $x=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}, z=1$ (2) $x=1, y=1, z=2$

V 発展問題

1. $z=1$ のとき，0 ; $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$-3\sqrt{3}i$; $z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$3\sqrt{3}i$
2. (1)

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

3. 連立１次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

において，３直線の交点を (x_0, y_0) とすると，$(x, y, z) = (x_0, y_0, 1)$ は解である。一方，$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ であれば,

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}}{D} = 0$$

よって，$z = 1$ は解とならない。

4. $-\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

5. $A = a_1 + b_2 + c_3$, $B = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

6.

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a^2-a & b^2-b \\ 0 & a^3-a^2 & b^3-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2-a)(b^2-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = ab(a-1)(b-1)(b-a)$$

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a+b & a & b \\ b & a+b & a \\ a & b & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b) & 2(a+b) & 2(a+b) \\ b & a+b & a \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a+b & a \\ a & b & a+b \end{vmatrix} = 2(a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & a-b \\ a & b-a & b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b)\begin{vmatrix} a & a-b \\ b-a & b \end{vmatrix} = 2(a+b)(a^2+b^2-ab)$$

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} 1 & a+b & ab \\ 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+b & ab \\ 0 & c-a & b(c-a) \\ 0 & c-b & a(c-b) \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(a-b)$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-a)$$

7. $x^3-1=0$ の実数でない解を ω とする。ここで,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$$

に注意しよう。
$x=1$ が $ax^2+bx+c=0$ の解であれば, $a+b+c=0$。
$x=\omega$ が $ax^2+bx+c=0$ の解であれば, $a+b\omega^2+c\omega=0$ 。
$x=\omega^2$ が $ax^2+bx+c=0$ の解であれば, $a+b\omega+c\omega^2=0$ 。

[**第 6 章**]

[**問題 6.1**] (1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$
$1-0+0-0=1$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2(0-12)-2(12-$
$0)=0$

[**問題 6.2**] (1) 0 (2) 0 (3) 160

[**問題 6.3**] (1) ２行，３行を１行に加えると

$$\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2a & x+2a & x+2a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x+2a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (*)$$

２列，３列からそれぞれ１列を引くと

$$(*) = (x+2a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & x-a & 0 \\ a & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+2a)(x-a)^2$$

(2) 2行，3行，4行からそれぞれ1行を引くと

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & a & c & c \\ a & a & a & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-a & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d-a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)$$

(3) 2行，3行，4行をそれぞれ1行に加えると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \\ &= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (*) \end{aligned}$$

2列，3列，4列からそれぞれ1列を引くと

$$(*) = (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3$$

[**問題 6.4**] (1) 転倒数は $N = 2+1 = 3$, 符号は $(-1)^N = -1$ (2) -1
[**問題 6.5**] (1) 転倒数は $N = 3+2+1 = 6$, 符号は $(-1)^N = +1$ (2) 1
[**問題 6.6**] (1) 転倒数は $N = 4+3+2+1 = 10$, 符号は $(-1)^N = 1$
(2) 1

[**問題 6.7**] (1) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D$

(2) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$

(3) $a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$

(4) $a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D$

(5) $a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$

(6) $a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$

[**問題 6.8**] $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$
[**問題 6.9**] (1) $(PAB)^n=(PAB)(PAB)(PAB)\cdots(PAB)$
$=PA(BP)A(BP)A\cdots(BP)AB=PAA\cdots AB=PA^nB$
(2) $|(PAB)^n|=|PA^nB|=|P||A^n||B|=|BP||A^n|=|A^n|=|A|^n$
[**問題 6.10**] (1) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ (2) 0
[**問題 6.11**] (1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
[**問題 6.12**] (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
[**問題 6.13**] $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

VI 発展問題

1. (1) $\tau(i)=j$ より小さいものは，$i<k<j$ となる k と $\tau(j)=i$ の $\{(i-j)+1\}$ 個ある。また，$i<k<j$ となる k より小さいのは $\tau(j)=i$ であるから，このような k の個数は $(j-i)$ 個ある。よって，τ の転倒数は

   $$N=\{(j-i)+1\}+(j-i)=2(j-i)+1$$

   さらに，符号は $\varepsilon(\tau)=(-1)^N=-1$ である。
   (2) $\sigma(i)<\sigma(j)$ としよう。このとき，$i<k<j$ に対して
   (i) $\sigma(i)<\sigma(k)<\sigma(j)$ ならば，$\sigma'(i)=\sigma(j)>\sigma'(k)=\sigma(k)$ かつ $\sigma'(k)=\sigma(k)>\sigma'(j)=\sigma(i)$ なので，転倒数は2つ増す。
   (ii) $\sigma(i)<\sigma(j)<\sigma(k)$ または$\sigma(k)<\sigma(i)<\sigma(j)$ ならば，転倒数に影響しない。

さらに，$\sigma'(i) = \sigma(j) > \sigma'(j) = \sigma(i)$ より，$\sigma'(i)$ の転倒数は１つ増すことから，σ' と σ の転倒数の差は奇数である。よって，

$$\varepsilon(\sigma') = -\varepsilon(\sigma)$$

2. (1) $D = -a\begin{vmatrix} -a & c \\ -b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -b & -c \end{vmatrix} = -a(bc) + b(ac) = 0$

(2) １行を f 倍し，３行の $(-c)$ 倍、４行の b 倍を１行にたすと

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{f}\begin{vmatrix} 0 & af & bf & cf \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{f}\begin{vmatrix} 0 & af-be+cd & 0 & 0 \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (*) \end{aligned}$$

３行の $(-e)$ 倍、４行の d 倍を２行にたすと

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{f^2}\begin{vmatrix} 0 & af-be+cd & 0 & 0 \\ -af & 0 & df & ef \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{f^2}\begin{vmatrix} 0 & af-be+cd & 0 & 0 \\ -af+be-cd & 0 & 0 & 0 \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} \\ &= (af-be+cd)^2 \end{aligned}$$

(3) K を転置すると, $(-1)^5K = -K$ となるので, $K = -K$, すなわち，$K = 0$。

3. 第 $(n+1)$ 列で展開すると

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+3} x_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1+n} x_n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

右辺の第 1 項は

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+2} x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix} \\ = & (-1)^{n+2} x_1 (-1)^{n-1} (y_1 A_{11} + y_2 A_{12} + \cdots + y_n A_{1n}) \\ = & -x_1 y_1 A_{11} - x_1 y_2 A_{12} - \cdots - x_1 y_n A_{1n} \end{aligned}$$

以下、同様である。

4.
$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x_1^2-1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & x_2^2-1 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2-1 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & x_4^2-1 \end{vmatrix} \\ = & x_1x_2x_3x_4 \begin{vmatrix} \frac{x_1^2-1}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & \frac{x_2^2-1}{x_2} & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \frac{x_3^2-1}{x_3} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \frac{x_4^2-1}{x_4} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
= \begin{vmatrix} x_1^2-1 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^2 & x_2^2-1 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2-1 & x_4^2 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2-1 \end{vmatrix} = (*)
$$

２列、３列、４列を１列にたして、$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$ を用いると

$$
(*) = \begin{vmatrix} 0 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ 0 & x_2^2-1 & x_3^2 & x_4^2 \\ 0 & x_2^2 & x_3^2-1 & x_4^2 \\ 0 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2-1 \end{vmatrix} = 0
$$

5. (1)

$$
\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ba+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ca+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+da+a^2 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ba+a^2 \\ 0 & c-b & c^2+ca-(b^2+ba) \\ 0 & d-b & d^2+da-(b^2+ba) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & c+b+a \\ 1 & d+b+a \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \\
&= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)
\end{aligned}
$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \end{vmatrix} = (2-3)(2-4)(2-5)(3-4)(3-5)(4-5) = 12$

6. $\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ 0 & x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ 0 & x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

最後の行列式の絶対値は４点が作る平行六面体の体積である。

7. 方程式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

を４行で展開すると

$$ax + by + cz + d = 0$$

の形であるから，平面の方程式を与える。行列式の性質から，上の方程式は３点を通る。

8. 方程式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x^2+y^2 & x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

を１列で展開すると

$$a(x^2+y^2) + cx + dy + e = 0$$

の形であるから，円の方程式を与える。行列式の性質から，この円は３点を通るので，３点が作る三角形の外接円の方程式である。

9. $A^{-1} = \begin{pmatrix} {A_{11}}^{-1} & O \\ O & {A_{22}}^{-1} \end{pmatrix}$

10. $\tilde{A}A = |A|E$ だから，

$$|\tilde{A}A| = |A|^n$$

これより，$|A| \neq 0$ であれば，$|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$。
極限移行により，一般のときにも成立する。

[**第 7 章**]

[**問題 7.1**] (1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

[**問題 7.2**] (1) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right.$

(2) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & - & x_2 & & & & & = & 1 \end{array} \right.$

[**問題 7.3**] (1) 掃き出し法によると

	A	$\boldsymbol{b}$	計算式
2	1	1	
$\boxed{1}$	2	-1	
1	2	-1	$=$
0	$\boxed{-3}$	3	$= \quad - \quad \times 2$
1	0	1	$= \quad - \quad \times 2$
0	1	-1	$= \quad \div (-3)$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	解	
	E		

解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) 掃き出し法によると

	A		$\boldsymbol{b}$	計算式
2	1	1	4	
$\boxed{1}$	2	1	4	
1	1	2	4	
1	2	1	4	$=$
0	-3	-1	-4	$=\quad - \quad \times 2$
0	$\boxed{-1}$	1	0	$=\quad -$
1	0	3	4	$=\quad + \quad \times 2$
0	1	-1	0	$= -$
0	0	$\boxed{-4}$	-4	$=\quad - \quad \times 3$
1	0	0	1	$=\quad - \quad \times 3$
0	1	0	1	$=\quad +$
0	0	1	1	$=\quad \div (-4)$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	解	
	E			

解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

[問題 7.4] (1) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ (2) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$

[問題 7.5] 掃き出し法で解くと $z = t$ として $x = -3t-1, y = t+2, z = t$。よって,

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$$

[問題 7.6] (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

[**問題 7.7**] $a = 4$

[**問題 7.8**] 直線の傾きが一致するので，$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$。よって，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

したがって，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は１次従属である。

[**問題 7.9**] 行列式を計算すると

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\ &= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\ &= (a+2)(a-1)^2 \end{aligned}$$

よって，$|A| = 0$ となるのは，$a = -2, 1$ 。

[**問題 7.10**] (1) 1

(2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$ だから，

$a \neq 1, -2$ のとき，3 ; $a = 1$ のとき, 1 ; $a = -2$ のとき，2

[**問題 7.11**] (1) 1 (2) B の列ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ について，掃き出し法によると

$$\boldsymbol{b}_3 = (-1)\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4 = (-2)\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_5 = (-3)\boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2$$

また，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は１次独立だから，$\mathrm{rank}\ B = 2$ である。

[**問題 7.12**] (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

VII 発展問題

1. $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$ のとき，

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + (-1)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

だから，解をもてば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}$ は１次従属になる。よって，ランクが一致する。

2. (1) 拡大係数行列において，

	A		$\boldsymbol{b}$	計算式
2	1	1	1	
$\boxed{1}$	2	1	2	
4	5	3	3	
1	2	1	2	$=$
0	$\boxed{-3}$	-1	-3	$=$ $-\,2\times$
0	-3	-1	-5	$=$ $-\,4\times$
1	0	1/3	0	$=$ $-\,2\times$
0	1	1/3	1	$=$ $\div\,(-3)$
0	0	0	-2	$=$ $-$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$			

これより，$\mathrm{rank}\ A = 2$, $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = 3$ であることがわかる。

(2) (1) から，連立１次方程式は

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ \qquad\qquad\quad 0 = -2 \end{cases}$$

と同値である。よって，第３式から，解は存在しないことがわかる。

3. 拡大係数行列において，

	A		$\boldsymbol{b}$	計算式
2	1	1	1	
$\boxed{1}$	2	1	2	
4	5	3	a	
1	2	1	2	$=$
0	$\boxed{-3}$	-1	-3	$= \quad - 2\times$
0	-3	-1	$a-8$	$= \quad - 4\times$
1	0	1/3	0	$= \quad - 2\times$
0	1	1/3	1	$= \quad \div(-3)$
0	0	0	$a-5$	$= \quad -$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$			

よって，連立１次方程式は

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & & + & \frac{1}{3}x_3 & = & 0 \\ & x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & 1 \\ & & & 0 & = & a-5 \end{array}\right.$$

と同値である。よって，解をもつためのは，$a=5$ のときである。このとき，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_3 \\ 1-\frac{1}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって，$x_3 = t$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. (1) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -(a-b)(a-c)(b-c) \neq 0$ 。よって，

$$x_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}$$

$$x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & d & c \\ a^2 & d^2 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{(a-d)(d-c)}{(a-b)(b-c)}$$

$$x_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix} = \frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}$$

(2) $x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = 3$

5. ２行から１行を引くとき，左から $P(2,1:-1)$ をかける。

３行から１行を引くとき，左から $P(3,1;-1)$ をかける。

このとき，$P(3,1;-1)P(2,1;-1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

２列と３列を入れ替えるとき，右から $P(2,3)$ をかける。

$P(3,1;-1)P(2,1:-1)AP(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

よって，$P = P(3,1;-1)P(2,1:-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$Q = P(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。

6. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_m$ の１次結合だから，

$$\boldsymbol{a}_i = a_{i1}\boldsymbol{e}_1 + a_{i2}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{im}\boldsymbol{e}_m$$

と表すことができる。そこで，

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m + x_{m+1}\boldsymbol{a}_{m+1} = \boldsymbol{0}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} & a_{(m+1)1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{mm} & a_{(m+1)m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

この連立１次方程式は変数が $m+1$ 個で式の数が m であるから，$\mathbf{0}$ でない解をもつ。よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}$ は $\boldsymbol{K}$ 上１次従属である。

7. $x_1 A\boldsymbol{a}_1 + x_2 A\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m A\boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}$ とすると

$$A(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m) = \mathbf{0}$$

A の逆行列を右からかけると

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m$ は $\boldsymbol{K}$ 上１次独立であるから，

$$x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_m = 0$$

したがって，$A\boldsymbol{a}_1, A\boldsymbol{a}_2, ..., A\boldsymbol{a}_m$ は $\boldsymbol{K}$ 上１次独立である。

8. rank $B = m$ とすると，B の列ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_m$ は $\boldsymbol{K}$ 上１次独立で他の列ベクトルはこれらの１次結合で表されるものが存在する。このとき，$A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, ..., A\boldsymbol{e}_m$ は AB の列ベクトルで $\boldsymbol{K}$ 上１次独立である。よって，

$$\text{rank } AB \geq m = \text{rank } B$$

A として，さらに A^{-1} を考えると

$$\text{rank } A^{-1}(AB) \geq \text{rank } AB$$

したがって，rank $B \geq$ rank $AB \geq$ rank B となり，等式が示される。

9. (1) $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。x_1, x_2 が実数のとき，$x_1 = x_2 = 0$ となるので，$\boldsymbol{R}$ 上１次独立である。
(2) $i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ だから，$\boldsymbol{C}$ 上１次従属である。

[第 8 章]

[問題 8.1] (1) $|i| = 1$ より $i \notin A$，$|i-1| = \sqrt{2} < 2$ より $i \in B$
(2) $|z| < 1$ のとき，$|z-1| \leq |z| + |-1| < 2$。したがって，$A \subset B$ である。

[問題 8.2] (1) $\boldsymbol{a}$ の成分の和をとると $2 + (-1) = 1$。よって，$\boldsymbol{a} \in V$。$\boldsymbol{b}$ の成分の和をとると $(-2) + 3 = 1$。よって，$\boldsymbol{b} \in V$。

(2) $t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$ の成分の和をとると

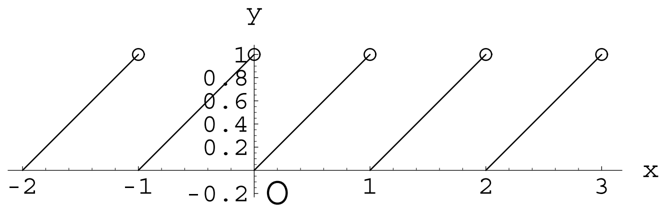
$$\{2t+(-2)(1-t)\}+\{(-1)t+3(1-t)\}=1$$

よって，$t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}\in V$ である。

[問題 8.3] $f(1)=D,\ f(2)=B,\ f(3)=E,\ f(4)=C,\ f(5)=A$

[問題 8.4] $f(5)=e,\ f(10)=c,\ f(15)=h,\ f(20)=i,\ f(25)=t$

[問題 8.5]



[問題 8.6] (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y\boldsymbol{a}+z\boldsymbol{b}$

$(\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = z\boldsymbol{c}\ (\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

[問題 8.7] 前問から

(1) V の基底は $\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\dim V=2$

(2) W の基底は $\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\dim W=1$

[問題 8.8] (1) 掃き出し法より，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は1次独立で $\boldsymbol{a}_3=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$ 。よって，V の次元は 2 で $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$ は V の基底を作る。

(2) 掃き出し法より，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は1次独立で $\boldsymbol{a}_3=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$ 。よって，W の次元は 2 で $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$ は W の基底を作る。

[問題 8.9] $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$ だから，

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{c}$$

$$T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + 2\boldsymbol{c}$$

よって，$\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ だから，$T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \neq T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$ である。

[**問題 8.10**] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

[**問題 8.11**] (1) $T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ だから，

$\mathrm{Im}\ T =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} >=< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} >$

掃き出し法から，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は１次独立で

$$\boldsymbol{c} = (-1)\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$$

よって，$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ は $\mathrm{Im}\ T$ の基底で $\dim\ \mathrm{Im}\ T = 2$ 。

また，$\mathrm{Ker}\ T =< \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} >$, $\dim\ \mathrm{Ker}\ T = 1$

(2) 掃き出し法を利用して解く。

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	計算式
2	1	1	
$\boxed{1}$	2	1	
3	3	2	
1	2	1	$=$
0	$\boxed{-3}$	-1	$= \quad - 2\times$
0	-3	-1	$= \quad - 3\times$
1	0	1/3	$= \quad - 2\times$
0	1	1/3	$= \quad \div(-3)$
0	0	0	$= \quad -$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$		

よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は１次独立で

$$\boldsymbol{a}_3 = (1/3)\boldsymbol{a}_1 + (1/3)\boldsymbol{a}_2$$

したがって，$\mathrm{Im}\ T = < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} >$
,

$\dim \mathrm{Im}\ T = 2$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\ T$ とすると，

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$$

掃き出し法から，$x_1 + (1/3)x_3 = 0, x_2 + (1/3)x_3 = 0$ より，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{Ker}\ T$ の基底は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ で, $\dim \mathrm{Ker}\ T = 1$ である。

VIII 発展問題

1. (1) (I) $\mathrm{Ker}\ F = \{\boldsymbol{0}\}$ のとき，F は１対１写像である。
実際，$F(\boldsymbol{x}_1) = F(\boldsymbol{x}_2)$ ならば，$F(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$ である。このとき，$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}\ F$ だから，仮定より，$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ 。すなわち，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ となるので，F は１対１である。
(II) F が１対１写像であれば，$\mathrm{Ker}\ F = \{\boldsymbol{0}\}$ である。
実際，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\ F$ とすると，$F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 。F が線形写像だから，$F(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である。よって，$F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{0})$ 。F は１対１だから，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるので，$\mathrm{Ker}\ F = \{\boldsymbol{0}\}$ である。
(2) $\alpha_1 F(\boldsymbol{x}_1) + \alpha_2 F(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + \alpha_m F(\boldsymbol{x}_m) = \boldsymbol{0}$ とすると，

$$F(\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{x}_m) = \boldsymbol{0} = F(\boldsymbol{0})$$

F が１対１写像だから，

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_m$ は１次独立だから，$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ である。
よって，$F(\boldsymbol{x}_1), F(\boldsymbol{x}_2), ..., F(\boldsymbol{x}_m)$ は１次独立である。

(3) $\dim V = m, V =< \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_m >$ とする。このとき，

$$\mathrm{Im}\ F =< F(\boldsymbol{x}_1), F(\boldsymbol{x}_2), ..., F(\boldsymbol{x}_m) >$$

かつ $F(\boldsymbol{x}_1), F(\boldsymbol{x}_2), ..., F(\boldsymbol{x}_m)$ は１次独立である。したがって，$\mathrm{Im}\ F = m$。

2. (1)

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\ &= (a+3)(a-1)^3 \neq 0 \end{aligned}$$

より，$a \neq -3, 1$。

(2) $a = -3$ のとき，

$$\mathrm{Im}\ F =< \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} >=< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 >$$

とする。掃き出し法から，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次独立で

$$\boldsymbol{a}_4 = (-1)\boldsymbol{a}_1 + (-1)\boldsymbol{a}_2 + (-1)\boldsymbol{a}_3$$

だから，$\mathrm{Im}\ F$ の次元は 3 で基底は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ である。さらに，連立１次方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$$

の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，Ker F の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で, dim Ker $F = 1$ である。

$a = 1$ のとき，Im $F = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ だから，Im F の次元は 1 で基底は$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$である。さらに，連立１次方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0}$$

の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，Ker F の基底は$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ で,
dim Ker $F = 3$ である。

3. $p(x) = ax^2 + bx + c$，$q(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ に対して

$$T(p+q) = \begin{pmatrix} a + a_1 \\ b + b_1 \\ c + c_1 \end{pmatrix} = T(p) + T(q)$$

$$T(kp) = \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix} = kT(p)$$

(3) $p'(x) = 2ax + b$ だから，

$$T(p') = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ b \end{pmatrix}$$

(4) $T(q) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a + 2c \\ -\frac{4}{3}b \\ \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c \end{pmatrix}$

[第 9 章]

[問題 9.1] (1) $\lambda = \pm 2$ (2) $\lambda = 2$

[問題 9.2] (1) 固有値 $\lambda = 2$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

固有値 $\lambda = -2$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

(2) 固有値 $\lambda = 1$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

固有値 $\lambda = 2$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

固有値 $\lambda = 3$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

(3) 固有値 $\lambda = 1 + 2i$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

固有値 $\lambda = 1 - 2i$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

(4) 固有値 $\lambda = 1$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

[問題 9.3] (1) 固有値 $\lambda = 0$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

固有値 $\lambda = 2$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

よって，$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) 固有値 $\lambda = 0$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

固有値 $\lambda = 3$ のとき，固有ベクトルは $s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$

よって，$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

[**問題 9.4**] (1) 固有値 $\lambda = 1 + 2i$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

固有値 $\lambda = 2$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

よって，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$

(2) 固有値 $\lambda = 1$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

固有値 $\lambda = 1 + i$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

固有値 $\lambda = 1 - i$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$

よって，$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$

(3) 固有値 $\lambda=-1$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$

このとき，$\dim V(-1)=1$ で A の次数より小さいので，定理 9.3 より，対角化できない。

(4) 固有値 $\lambda=1$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$

固有値 $\lambda=2$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$

このとき，$\dim V(1)+\dim V(2)=2$ で A の次数より小さいので，定理 9.3 より，対角化できない。

[**問題 9.5**] (1) $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

[**問題 9.6**] (1) $A=\begin{pmatrix}1&b&c\\a&c&a\\b&1&b\end{pmatrix}$

(2) $a=b=c=1$

[**問題 9.7**] (1) 固有値 $\lambda=1$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$

固有値 $\lambda=3$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$

$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ から，グラム・シュミットの方法で直交行列を作ると，

$P=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$。このとき，${}^tPAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ である。

(2) 固有値 $\lambda=1$ のとき，固有ベクトルは $s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\neq 0$

固有値 $\lambda = -1$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq \mathbf{0})$

よって，$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から，グラム・シュミットの直交化法で正規直交系を作り，それらを列ベクトルとする行列は $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$。よって，${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$。

[**問題 9.8**] (1) $A^2-2A+2E = O$ (2) $x^5 = (x^2-2x+2)(x^3+2x^2+2x)-4x$ だから，

$$A^5 = (A^2-2A+2E)(A^3+2A^2+2A)-4A = -4A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

また，$E = A(E - \frac{1}{2}A)$ より，

$$A^{-1} = E - \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

IX 発展問題

1. 固有ベクトルの数に関する数学的帰納法で示そう。すなわち，
「互いに異なる m 個の固有値に属する固有ベクトルは 1 次独立である。」
を示そう。
(I) $m = 1$ のときは明らかに成立する。
(II) $m = k$ のとき成立すると仮定して，$m = k+1$ のときを示そう。
そこで，$k+1$ 個の固有値 $\lambda_1, ..., \lambda_k, \lambda_{k+1}$ とこれらの固有値に属する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_{k+1}$ を考える：

$$A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1\boldsymbol{p}_1, ..., A\boldsymbol{p}_k = \lambda_k\boldsymbol{p}_k, A\boldsymbol{p}_{k+1} = \lambda_{k+1}\boldsymbol{p}_{k+1}$$

さて，

$$x_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{p}_k + x_{k+1}\boldsymbol{p}_{k+1} = \mathbf{0} \cdots\cdots$$

とおく。この式の左から A をかけると

$$x_1A\boldsymbol{p}_1 + \cdots + x_kA\boldsymbol{p}_k + x_{k+1}A\boldsymbol{p}_{k+1} = \mathbf{0}$$

よって，

$$x_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1+\cdots+x_k\lambda_{\mathrm{k}}\boldsymbol{p}_k+x_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{p}_{k+1}=\boldsymbol{0}\cdots\cdots$$

$\lambda_{k+1}\times\quad-\quad$ から

$$x_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\boldsymbol{p}_1+\cdots+x_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{0}$$

帰納法の仮定より $\boldsymbol{p}_1,...,\boldsymbol{p}_k$ は1次独立だから，

$$x_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)=0,\cdots,x_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)=0$$

固有値は異なるので，$x_1=0,...,x_k=0$ である。これらを　　に代入すると

$$x_{k+1}\boldsymbol{p}_{k+1}=\boldsymbol{0}$$

よって，$x_{k+1}=0$ となるので，$\boldsymbol{p}_1,...,\boldsymbol{p}_k,\boldsymbol{p}_{k+1}$ は1次独立である。
(I), (II) より，すべての m について成立することが示された。

2. $A\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_2$, $\lambda_1\neq\lambda_2$ とすると，${}^tA=A$ だから，

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{p}_1)\cdot\boldsymbol{p}_2 &= {}^t(A\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_2={}^t\boldsymbol{p}_1{}^tA\boldsymbol{p}_2={}^t\boldsymbol{p}_1(A\boldsymbol{p}_2)\\ &= {}^t\boldsymbol{p}_1(\lambda_2\boldsymbol{p}_2)=\lambda_2{}^t\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2=\lambda_2(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)\end{aligned}$$

一方，左辺は

$$(A\boldsymbol{p}_1)\cdot\boldsymbol{p}_2=\lambda_1(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)$$

よって，

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)=0$$

$\lambda_1\neq\lambda_2$ だから，$\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2=0$ となるので，$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ は直交する。

3. (1) ${}^tPP=E$ だから，

$$(P\boldsymbol{x})\cdot(P\boldsymbol{y})={}^t(P\boldsymbol{x})P\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{x}{}^tPP\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$$

よって，$P\boldsymbol{x},P\boldsymbol{y}$ も直交する。
(2) $|\boldsymbol{x}|=1$ とすると

$$(P\boldsymbol{x})\cdot(P\boldsymbol{x})={}^t(P\boldsymbol{x})P\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{x}{}^tPP\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=1$$

よって，$|P\boldsymbol{x}|=1$ である。

4. (1) 固有値 $\lambda = 0$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 固有値 $\lambda = 2$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq \mathbf{0})$

よって，$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から，グラム・シュミットの直交化法で正規直交系を作り，それらを列ベクトルとする行列は $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ である。このとき，${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) 固有値 $\lambda = 4$ のとき，固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda = 0$ のとき, 固有ベクトルは $t_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$

よって，$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から，グラム・シュミットの直交化法で正規直交系を作り，それらを

列ベクトルとする行列は $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ である。このとき，${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. (1) $A^3 - E = O$

(2) $x^5 = (x^3-1)x^2 + x^2$ だから，

$$A^5 = (A^3 - E)A^2 + A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

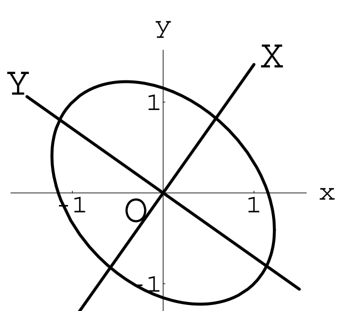
また，$E = A \cdot A^2$ より，

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[**第 10 章**]

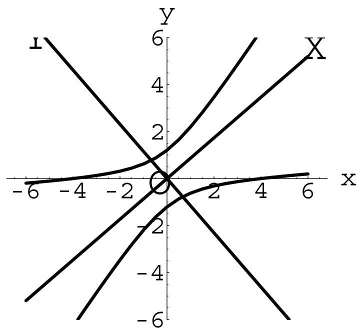
[**問題 10.1**] (1) $\tan 2\theta = \frac{2}{3-3}$, すなわち, $\theta = \frac{\pi}{4}$ だけ，座標軸を回転する。

$X^2 + \frac{Y^2}{2} = 1$



(2) $\tan 2\theta = \frac{-10\sqrt{3}}{1-11} = \sqrt{3}$, すなわち, $\theta = \frac{\pi}{6}$ だけ，座標軸を回転する。

$-\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$



[問題 10.2] (1) $2yz + 2zx + 2xy = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表される。

固有値 $\lambda = -1$ のときの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 $\lambda = 2$ のときの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ からグラム・シュミットの直交化法を用いて直交行列 $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ を作る。このとき,

$$2yz + 2zx + 2xy = (-1)X^2 + (-1)Y^2 + 2Z^2$$

(2) $y^2 + 2zx = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表される。

固有値 $\lambda = 1$ のときの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 $\lambda = -1$ のときの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ からグラム・シュミッ

トの直交化法を用いて直交行列 $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ を作る。変換 $(*)$ によって，

$$y^2 + 2zx = 1 \cdot X^2 + 1 \cdot Y^2 + (-1)Z^2 = X^2 + Y^2 - Z^2$$

[**問題 10.3**] (1) 問題 10.2 から，

$$2yz + 2zx + 2xy = (-1)X^2 + (-1)Y^2 + 2Z^2$$

よって，この 2 次形式は正値ではない。

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のとき，$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ である。また，不等式

$$-X^2 - Y^2 - Z^2 \leqq (-1)X^2 + (-1)Y^2 + 2Z^2 \leqq 2(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

に注意すると，最大値は 2 で最小値は -1 である。

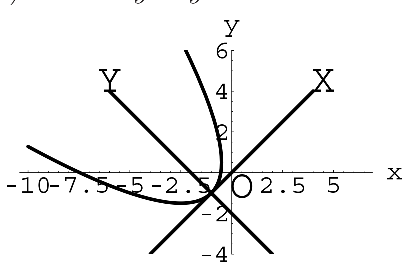
X 発展問題

1. (1) $\tan 2\theta = \frac{2}{1-1}$ より，$2\theta = \frac{\pi}{2}$ として，変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を行うと，

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2X^2$$

よって，曲線は放物線である。

(2) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 4 = 2(X + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}Y$

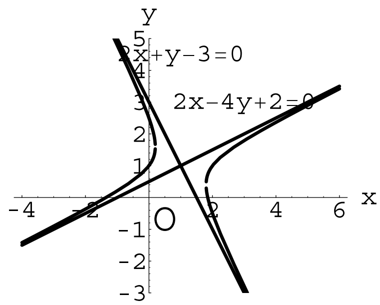


2. (1) $(2x - 4y + 2)(2x + y - 3) = 4x^2 - 6xy - 4y^2 - 2x + 14y - 6$ であるから，$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ を直交行列 P で対角化する。固有値は $\lambda = \pm 5$。変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ によって，

$$4x^2 - 6xy - 4y^2 = 5X^2 - 5Y^2$$

したがって，曲線は双曲線である。

(2)



3. (1) $2x_1x_2 + 2x_3x_4 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

(2) 固有値 λ は

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2 = 0$$

の解だから，$\lambda = \pm 1$ である。

$\lambda = 1$ の固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$ の固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ からグラム・シュミットの直交化法で正規直交系を作り，それらを列ベクトルとする直交行列は

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

である。このとき,

$$
\begin{aligned}
2x_1x_2+2x_3x_4 &= \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix} {}^tPAP \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \\
&= X_1^2+X_2^2+(-1)X_3^2+(-1)X_4^2
\end{aligned}
$$

したがって，2次形式は正値でない。

(3) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$ のとき，$X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2=1$ である。
よって,

$$X_1^2+X_2^2+(-1)X_3^2+(-1)X_4^2 \geqq -X_1^2-X_2^2-X_3^2-X_4^2=-1$$

$$X_1^2+X_2^2+(-1)X_3^2+(-1)X_4^2 \leqq X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2=1$$

したがって，最小値は -1，最大値 1 である。

4. A を直交行列 P で対角化すると，変換 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ に

よって,

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} {}^tPAP \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \cdots + \lambda_n X_n^2
\end{aligned}
$$

となる。これが，すべての $x_1, x_2, ..., x_n$ に対して正となるためには，固有値について

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, ..., \lambda_n > 0$$

である。

(2) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ とすると

$$
\begin{aligned}
1 &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} {}^tPP \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \\
&= X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2
\end{aligned}
$$

よって，

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \cdots + \lambda_n X_n^2 \geqq \lambda_*(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) = \lambda_*$$

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \cdots + \lambda_n X_n^2 \leqq \lambda^*(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) = \lambda^*$$