第 4 章

標本分布は学生にとってはかなりわかりにくい概念のようです.3 章までは高校で学んだ「確率」の延長で理解できるのですが,標本分布からやっと統計学らしい内容が始まることも難しさの原因です.

しかし 3 章までで学んだ内容では,例えば標本平均の分布はどうなるのかといった疑問には答えられません.特定の確率変数の分布はわかっても,同じ分布を持つ「複数の確率変数の関数」の分布は改めて導かないといけません.基本的には,標本平均がなぜ分布を持つのだろうかといった疑問があるようです.これは,確率変数の和であるからと答えても学生は理解できないようなので,私は「ランダムサンプルだから,標本が変わるごとに平均が変わる」と説明します.ゼミ単位では,各学生がさいころを 100 回投げて,どの目が出たか集計する.そして各学生の集計を比べる.以下この手続きを繰り返す.この実験はできます.硬貨投げの実験により,有限回数の実験と二項分布の差違を確かめることも意味があります.

　標本分布は概念的に難しいと言いながら,次の章の「推定」と「検定」に至れば,この難しさは忘れてしまうようです.

図 4.1　 X, Y を (0, 1) 上で一様に分布する独立な確率変数とする. この 2 個の一様確率変数から定義される標本平均の分布を導出してみる. そのためにまず和(X+Y)の分布, $P(X+Y<t)$ を, 任意の実数 t について求める. つまり, 任意の t について, 不等式 $X+Y<t$ が生じる確率を上の 2 図を用いて求める.

　　　X と Y は共に正で 1 より小である. また $X+Y<t$ が満たされるとは, $Y<t-X$ が満たされることに他ならない. そして t が 1 より小の場合は, 左の図より, X, Y が斜線の三角形の内側にあるならば, $Y<t-X$ が満たされる. この事象が生じる確率は斜線の三角形の面積に他ならない. だから,

i)　$0 \le t \le 1$　のとき　$F(t) = P(X+Y<t) = \dfrac{t^2}{2}$ となる.

同様に,$1 \le t \le 2$ の場合は,X, Y が右図の斜線中であれば不等式 $Y < t - X$ が満たされる.だから,（大きい 3 角形から小さい 3 角形を 2 個引いて）

ii)　$1 \le t \le 2$　のとき　$F(t) = P(X+Y<t) = \dfrac{1}{2}t^2 - 2 \times \dfrac{1}{2}(t-1)^2$.

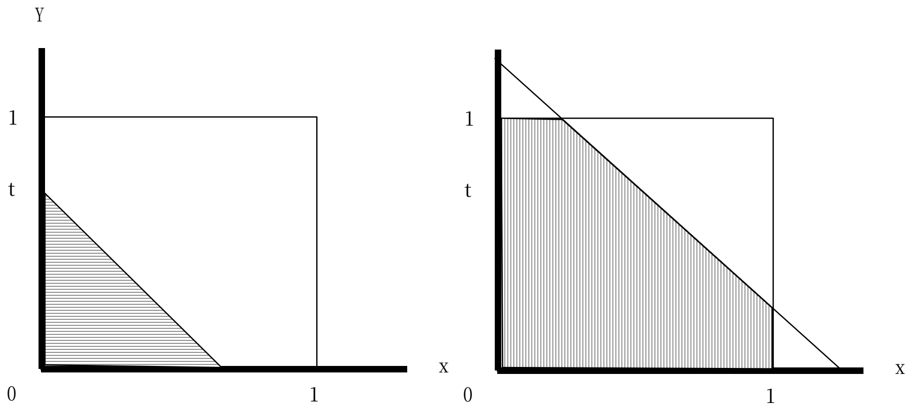
と和の分布が求まる.和の分布が求まれば次に平均の分布を求める.平均の分布とは, $P(\dfrac{X+Y}{2} \le z)$ であるが, $P(\dfrac{X+Y}{2} \le z) = P(X+Y \le 2z)$ だから, i) と ii) の結果を使って t を(2z)に置き換えて,

$0 \le t \le 1$ のとき, $P(X+Y \le 2z) = \dfrac{1}{2}(2z)^2 = 2z^2$,

$1 \le t \le 2$ のとき, $P(X+Y \le 2z) = -2z^2 + 4z - 1$

となる.微分すれば.密度関数が得られる.

$f(z) = 4z, (0 \le z \le \dfrac{1}{2})$,　　$f(z) = 4(1-z), (\dfrac{1}{2} \le z \le 1)$.　これは図 4.1 の分布である.



例4.3　ポアソン確率変数の再生性を証明しよう.X をパラメーターがλのポアソン確率変数,同じく Y をパラメーターがδのポアソン確率変数とする.したがって各々の確率関数は,

$$p_X(i)=\frac{\lambda^i\exp(-\lambda)}{i!}\quad i=1,2,\cdots,\quad p_Y(j)=\frac{\delta^j\exp(-\delta)}{j!}\quad j=1,2,\cdots$$

となる.以下,和の分布 $P(X+Y=k)$ を求める.結果は

$$P(X+Y=k)=\frac{(\lambda+\delta)^k\exp(-(\lambda+\delta))}{k!}\quad k=1,2,\cdots$$

となる.つまりパラメーターが($\lambda+\delta$)のポアソン分布である.

証明： $P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$ である.この右辺の積和を計算すればよい.X と Y の性質により,

$$\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i\exp(-\lambda)}{i!}\frac{\delta^{k-i}\exp(-\delta)}{(k-i)!}=\exp(-\lambda-\delta)\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i\delta^{k-i}}{i!(k-i)!}$$

となる.ところで二項展開により

$$(\lambda+\delta)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\delta^{k-i}=k!\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i\delta^{k-i}}{i!(k-i)!}$$

となるから,

$$\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)=\frac{(\lambda+\delta)^k\exp(-(\lambda+\delta))}{k!}$$

となる.

例 4.4 分散を求めてみよう.

$$V(x)=\frac{1}{3}\{\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\mu)^2+(\frac{1}{2}(x_2+x_3)-\mu)^2+(\frac{1}{2}(x_3+x_1)-\mu)^2\}$$

だが, $\mu=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$ だから

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\mu=\frac{1}{6}(x_1+x_2-2x_3)=\frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3)-\frac{1}{2}x_3=\frac{1}{2}(\mu-x_3)$$

従って $$V(\bar{x})=\frac{1}{12}\{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+(x_3-\mu)^2\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{2}.$$

となる.もちろん $\sigma^2=\frac{1}{3}\{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+(x_3-\mu)^2\}$ である.

χ^2 分布の自由度について

観測個数が 2 の場合は,平均平方和は

$$W=(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^2$$

と 1 項の 2 乗になる.また母分布が $n(0, 1)$ であれば, $(\frac{1}{\sqrt{2}})\ (x_1-x_2)$ の分散は 1 であり, $(\frac{1}{\sqrt{2}})\ (x_1-x_2)$ は $n(0, 1)$ となる.だから W は自由度 1 の χ^2 分布をもつ.

上級：観測個数が偶数個で 4, $1'=(1,1,1,1)$ とする．$A=I-1(1'\ 1)^{-1}1'$ の固有ベクトルは $q_0=\frac{1}{2}(1,1,1,1)',\ q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)',\ q_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)',\ q_3=\frac{1}{\sqrt{12}}(1,1,1,-3)',$ としてよい．固有ベクトルのノルムは 1 に調整してある．また q_0 は固有値 0 に対応し, q_1,q_2,q_3 は固有値 1 に対応する固有ベクトルである.平均平方和 $\sum_{i=1}^{4}(x_i-\overline{x})^2$ は $x'Ax$,ただし $x'=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ である．$Q=(q_0,q_1,q_2,q_3)$ と定義すれば, $Q'Q=QQ'=I$ だから

$$x'Ax=x'Q(Q'AQ)Q'x$$

となる.この右辺を計算すると

$$x'Ax=(x'q_0,x'q_1,x'q_2,x'q_3)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'q_0\\x'q_1\\x'q_2\\x'q_3\end{pmatrix}=(x'q_1)^2+(x'q_2)^2+(x'q_3)^2$$

となる．明らかなように

$$x'q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2),\quad x'q_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(x_1+x_2-2x_3),\ x'q_3=\frac{1}{\sqrt{12}}(x_1+x_2+x_3-3x_4)$$

となり,正規性の仮定の下ではこの 3 統計量は $n(0, 1)$ でかつ独立である．結局 4 個の 2 乗和が 3 個の $n(0, 1)$ の 2 乗和で書ける．一般化を試みなさい.

以上の変換は**シュミットの直交化**に拡張できる．変換により,

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{1.2}}(x_1 - x_2),\ Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2.3}}(x_1 + x_2 - 2x_3), \ldots$$

$$Y_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}(x_1 + \cdots + x_{n-1} - (n-1)x_n),\ \ Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

と互いに独立変数となる.この変換を使えば$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 + n\overline{x}^2$,つまり,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2,$$

となる. n 項の２乗和が,(n-1)項の独立中区立変数の２乗和になっている.

先の２次形式に戻ると,Q 行列の各ベクトル q は

$$q'_1 = (1, -1,\ 0, \cdots, 0)/\sqrt{2},\ q'_2 = (1, 1, -2, 0, \cdots, 0)/\sqrt{6}, \ldots$$

$$q'_{n-1} = (1, \cdots, 1, -(n-1))/\sqrt{n(n-1)},\ \ q'_n = (1, 1, \cdots, 1)/\sqrt{n}$$

となり,各固有ベクトルのノルムは 1,かつ各固有ベクトルは直交している.

χ^2 分布についての補足（上級）

χ^2 分布については種々疑問が出たので,その簡単な場合の導出をここでする.X と Y が独立に分布する標準正規確率変数であるとしよう.X と Y の同時密度は

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy$$

となる.ここで極座標変換を利用する.ϖ は実数,角 θ は $-\pi/2$ から $\pi/2$ を変域とする.変換を,$x = \varpi\cos\theta$,$y = \varpi\sin\theta$,とする.ヤコビ行列は,

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varpi\sin\theta \\ \sin\theta & \varpi\cos\theta \end{pmatrix}.$$

だから $|J| = |\varpi|$ となる.したがって,変数変換により,

$$f_{\varpi,\theta}(\varpi, \theta) = \frac{1}{\pi}\varpi e^{-\varpi^2/2} d\varpi\, d\theta,$$

となる．ϖ の周辺密度は正の ϖ について $f_\varpi(\varpi)=\varpi e^{-\varpi^2/2}d\varpi$ である．ところで

χ^2 確率変数 $Z=X^2+Y^2$ は ϖ^2 に等しいから，$f_Z(z)=\frac{1}{2}e^{-z/2}dz$ である．これは自由

度が 2 の χ^2 密度関数に等しい．ヤコビアンは $|J|=\left|\frac{d\varpi}{dz}\right|=\frac{1}{2\varpi}$．

　自由度が r の χ^2 確率関数は，$f_r(x)=\frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}}x^{r/2-1}e^{-x/2}dx$ である．

順序統計量について

(4.37)式および(4.38)式は，通常の確率計算の方法で導出できる．最小値については，$X_{(1)}$ が x 以下である確率であるから，{X_1 から X_n のすべての X が x よりも大である} という事象の排反事象になる．{　} の中の確率は

$P\{X_1>x\}\times\cdots\times P\{X_n>x\}=P\{X>x\}^n=(1-F(x))^n$ である．背反事象の確率だから，1

から $(1-F(x))^n$ を引いて，(4.37)が求まる．

最大値については，{X_1 から X_n のすべての X が x よりも小である} 確率となる．

これは，$P\{X_1<x\}\times\cdots\times P\{X_n<x\}=P\{X<x\}^n$

第 i 順序統計量 $X_{(i)}$ の分布関数（もちろん上級）

(1)　　$P(X_{(i)}\le x)=P\{(\text{すべての}X\le x),\text{or }((n-1)\text{個の}X\le x),\cdots,\text{or }(i\text{個の}X\le x)\}$

となる．もし x よりも小である X が i 個より少なければ，$X_{(i)}\le x$ は成立しない．

波括弧の内側の事象は互いに排反だから

$$(1)=P\{\text{すべての}X\le x\}+P\{(n-1)\text{個の}X\le x\}+\cdots+P\{i\text{個の}X\le x\}$$

$$=\sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}F(x)^k(1-F)^{n-k}$$

となり，確率分布関数が求まる．ところで密度関数は

$$\frac{\partial}{\partial x}P(x)=\sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}k\,F^{k-1}(1-F)^{n-k}(f)-\sum_{k=i}^{n-1}\binom{n}{k}F^{k}(n-k)(1-F)^{n-k-1}(f)$$
$$=\sum_{k=i}^{n}\frac{n!}{(k\text{-}1)!(n\text{-}k)!}F^{k-1}(1-F)^{n-k}(f)-\sum_{k=i}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}F^{k}(1-F)^{n-1-k}(f)$$
$$=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}F^{i-1}(1-F)^{n-i}(f)$$

と簡略化できる.最終式は他の教科書でよく見られる.

問題解答(4章)

3. 本文および式(4.23)では X は総和になっているので,同じ記号を 踏襲する.

X の平均と分散は np, npq である. だから

$$P\left(\{\overline{X}\le b\}\right)=P\left(\{X\le 50b\}\right)\ =P\left(\left\{Z\le\frac{50b-50p+0.5}{\sqrt{50pq}}\right\}\right)=P\left(\left\{Z\le\frac{50b-34.5}{\sqrt{10.5}}\right\}\right).$$

階級	〜0.525	〜0.575	〜0.625	〜0.675	〜0.725	〜0.775	〜0.825	〜0.875
実験確率	0.02	0.04	0.10	0.33	0.64	0.90	0.98	1.00
正規確率	0.0055	0.0384	0.1587	0.409	0.7044	0.9049	0.9812	0.9978

近似の精度は良くない.n=10 の時と較べてあまり良くなってない.

4. a) 平均=106.5, $S^2=\frac{1}{3}(12.25+0.25+72.25+30.25)=\frac{115}{3}$,標準偏差=$\sqrt{\frac{115}{3}}$

b) $P\left(\overline{X}\le 96\right)=P\left(\overline{X}-106.5\le -10.5\right)=P\left(\left\{\frac{2(\overline{X}-106.5)}{\sqrt{115/3}}\right\}\le -\frac{21}{\sqrt{115/3}}\right)$

$=P\left(\{t\le -3.39\}\right)$ 0.021.(詳しい表を使う)

5. n(0,1)から大きさが 20 の無作為標本を得た場合である.標本分散 S^2 のパーセント点を求めたいので,自由度 19 である χ^2 分布を使えば良い.

$W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{(20-1)S^2}{1}=19S^2$. 従って,

50%点…19 S^2=18.34, S^2=0.965. 75%点…19 S^2=22.72, S^2=1.196.

90%点…19 S^2=27.2, S^2=1.432. 95%点…19 S^2=30.14, S^2=1.586

6.　この確率を正規近似すれば，X の平均も分散も 13 だから

$$P(\{20 \le X \le 30\}) = P(\{X \le 30.5\}) - P(\{X \le 19.5\})$$

$$= P\left(\left\{Z \le \frac{17.5}{\sqrt{13}}\right\}\right) - P\left(\left\{Z \le \frac{6.5}{\sqrt{13}}\right\}\right) = 0.0359.$$

7.　検査基準を y とする．$P(\{(\overline{X}-800) \le -y\}) = P\left(\left\{\frac{\sqrt{12}(\overline{X}-800)}{12} \le -y\frac{\sqrt{12}}{12}\right\}\right) =$ 0.01 を満たすような y を決める．自由度 11 の 1%点 2.718 より，$y\frac{\sqrt{12}}{12} = 2.718$ となるので，y＝9.42.　正規分布では，確率が 1%で $y\frac{\sqrt{12}}{12} = 2.33$ だから，y＝8.06.

8.　(i)標本平均が少なくとも 5 分になる確率（真の平均 μ＝4.75 分）．

$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}$ だから，n=144 ，$\overline{X}$=5 ， μ＝4.75, S＝1.5 を上式に代入すると，$Z = \frac{12(5-4.75)}{1.5} = 2$.　標準正規分布表より，Z が 2 以下の確率は，$\Phi(2) = 0.9773$.　2 以上の確率は 0.0227.

(ii)標本平均が高々 5 分になる確率(真の平均 μ＝31/6).　n=144 ，$\overline{X}$=5 ， μ=31/6, S＝1.5 を上式に代入すると，$Z = \frac{12(5-31/6)}{1.5} = -\frac{4}{3} = -1.33$.　標準正規分布表より，$\Phi(-1.33) = 1 - \Phi(1.33) = 0.0918$.

9.　(4.10)式より，$V(\overline{X}) = \frac{N-r}{N-1} \times \frac{\sigma^2}{n} = \frac{50 \times 50 \times 50}{99 \times 50} = \frac{2500}{99}$.　標準偏差=$\frac{50}{3\sqrt{11}}$.

復元抽出可能な時，$V(\overline{X}) = \frac{50 \times 50}{50} = 50$.　標準偏差=$5\sqrt{2}$.

10.　t 分布の方が標準正規分布に較べて中央値が低く，裾が重いので，確率変数が 2 よりも大きい場合には，棄却する可能性が高くなることがわかる．

11.　問題を読めば，「宣伝は過大広告である」と思えようが，それをいかに理

論的に叙述するかの問題である.成功確率を使った解答.「少なくとも 15 回の爽快な切れ味を保証する」という文章をどう理解するかが問題になる.例えば,「100 人中少なくとも 95 人は 15 回満足して使える」と理解すれば,15 回に到らぬ人の割合は 5%となり,この割合が帰無仮説となる. $H_0 : p = 0.05$. データでは 5 人中 4 人が 15 回に到っていないから,この比率は 80%ととなる. $\hat{p} = 0.8$. 帰無仮説「100 人中 95 人は 15 回満足して使える」は成立しないと見て良い.

さらに,6 章の検定手法を使えば,検定統計量は(6.15)式により, $Z_0 = (0.8-0.05)/\sqrt{0.05(1-0.05)/5} = 7.7$ となり強く有意である.

別解:各人の使用回数を確率変数 X とし,使用回数の期待値を μ 回,分散を σ^2 とすると, μ は 15 より大でないといけない. $H_0 : \mu > 15$, $H_a : \mu < 15$. 帰無仮説の下で,X が 15 以下の値を取る確率は 5%である. $\overline{X}$ については,期待値は μ,分散は $\sigma^2/5$ となるから, $\overline{X}$ を検定統計量と考えると $\overline{X}$ の 5%境界値は 15 より μ に近い値,つまり 15 より大でないといけない.106 頁図 3.8 の関係.ところが $\overline{X} = \frac{1}{5}(12+16+10+14+8) = 12$. $\overline{X}$ の値は 12 だから,明らかに境界値より小であり棄却域に含まれる.帰無仮説は棄却される.(帰無仮説の下で, $P(X \le 15) = 0.05$. $P(\overline{X} \le 15) < 0.05$.)

12. 分散は 20.16. 補正を入れると, $P\left(\{X \le 29\}\right) = P\left(\{X - 28 \le 1\}\right)$

$= P\left(\left\{Z \le \frac{1.5}{\sqrt{20.16}}\right\}\right) = P\left(\{Z \le 0.334\}\right)$ 0.63.だから,1-0.63=0.37.

13. $\frac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$ は標準正規分布, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ は自由度 n-1 の χ^2 分布に従い,各々独立に分布する. 本文中の k は自由度であるので,k=n−1 と置く. 比をとる

と, $\dfrac{(\overline{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\dfrac{1}{n-1}}}=\dfrac{\sqrt{n}}{S}(\overline{X}-\mu)=t$ より(4.33)式が導かれる.　ただし,分母と分子の独立性は別に証明が必要.シュミットの直交化を使う.分母は, $Y_1=\dfrac{1}{\sqrt{1.2}}(x_1-x_2),\ Y_2=\dfrac{1}{\sqrt{2.3}}(x_1+x_2-2x_3),\ldots$

$Y_{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)n}}(x_1+\cdots+x_{n-1}-(n-1)\,x_n)$, から成立し,分子は $Y_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}x_i$ からできている.また Y は全て独立に分布する.

14.　全て x より小である確率は $F(x)^3$,3 個のうち 2 個が小である確率は組合せが 3 あるから, $3F(x)^2(1-F(x))$.　求める確率は両者の和である.

詳細な証明をあたえると,

事象{二番目の値が x より小さい}

= {全て x より小さい} ∪ {一個は x より大きいが,他の二個は x より小さい} となる.また {一個は x より大きいが,他の二個は x より小さい} 組合せは 3 個ある.従って

P {二番目の値 < x}=P{三個とも < x}+3×P{一個は > x、二個は < x}

$$=F(x)^3+3F(x)^2(1-F(x))\ .$$

15.　$E(X)=\int_0^\infty xf(x)dx=2\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{2+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^\infty\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{2+m}{2}\right)\cdot 2^{\frac{2+m}{2}}}x^{\frac{2+m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$

$$=2\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=2\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\frac{m}{2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=m$$

b)　$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = 2^2 \cdot \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{m+4}{2}\right)\cdot 2^{\frac{4+m}{2}}} x^{\frac{4+m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$

$$= 2^2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = 4 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot \frac{m}{2}\,\frac{m+2}{2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = m(m+2).$$

t 分布の分散の計算：$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = \int_0^\infty \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\cdot \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{m}} \cdot \left(1+\dfrac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}} \cdot x^2 dx$

$$= \int_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{m}} \cdot \left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}} \cdot \left\{m\left(1+\frac{x^2}{m}\right) - m\right\}dx$$

$$= m\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m}} \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)\sqrt{m-2}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)\cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{m-2}} \cdot \left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{(m-2)+1}{2}} dx - m$$

ここで，$z = \dfrac{\sqrt{m-2}}{\sqrt{m}} x$ と変換する．ヤコビアンは $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-2}}$ だから，

$$= m\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)\cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{m-2}} \cdot \left(1+\frac{z^2}{m-2}\right)^{-\frac{(m-2)+1}{2}} dz - m$$

$$= m\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} - m = m\frac{m-1}{2}\,\frac{2}{m-2} - m = \frac{m}{m-2}.$$

F分布の期待値：$E(\cdot) = \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\cdot \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left[1+\dfrac{m}{n}x\right]^{-\frac{m+n}{2}} x^{\frac{m+2}{2}-1} dx$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{n-2}{m+2}\right)^{\frac{m+2}{2}}$$

$$\bullet\int_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left(\frac{m+2}{n-2}\right)^{\frac{m+2}{2}}\left[1+\frac{m}{n}x\right]^{-\frac{m+n}{2}}x^{\frac{m+2}{2}-1}dx$$

ここで$z=\frac{n-2}{m+2}\frac{m}{n}x$と変換すれば, ヤコビアンは$\frac{m+2}{n-2}\frac{n}{m}$である. 積分は

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m-2}{2}}\left(\frac{n-2}{m+2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{m+2}{n-2}\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{2}}$$

$$\bullet\int_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left(\frac{m+2}{n-2}\right)^{\frac{m+2}{2}}\left[1+\frac{m+2}{n-2}z\right]^{-\frac{m+n}{2}}z^{\frac{m+2}{2}-1}dx$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{n-2}\,.$$