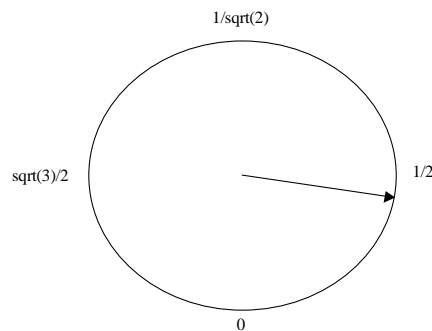
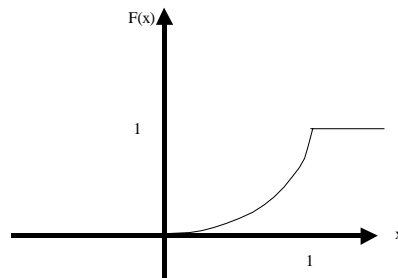


### 第3章

**連続な標本空間の例** 図のように距離の平方根でメモリをうった円において、ルーレットのように針を回転し、停止した位置のメモリの値を確率変数とする。確率変数を  $X$  とすると  $X$  が座標値  $x$  より小さい値を取る確率は、原点  $0$  から座標  $x$  までの距離に等しい。ところが、原点から座標  $x$  までの距離は  $x$  の2乗になる。



**例 3.5**  $x < 0$  なら  $F(x) = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$  なら  $F(x) = x^2$ ,  $x > 1$  なら  $F(x) = 1$  と定義される。  $0 \leq F(x) \leq 1$  かつ  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(\infty) = 1$ 。さらに  $x \leq y$  のとき  $F(x) \leq F(y)$  なので、 $F(x)$  は分布関数の性質を満たす。



**例 3.6**  $x \leq 0$  なら  $F(x) = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1/2$  なら  $F(x) = x^2$ ,  $1/2 \leq x \leq 1$  なら  $F(x) = 1 - 3(1-x)^2$ ,  $x \geq 1$  なら  $F(x) = 1$  だから、  $0 \leq F(x) \leq 1$  かつ  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(\infty) = 1$ 。さらに、  $x \leq y$  なら  $F(x) \leq F(y)$  だから、  $F(x)$  は分布関数の性質を満たす。密度関数は  $f(x) = 0(x \leq 0)$ ,  $2x(0 \leq x \leq 1/2)$ ,  $6-6x(1/2 \leq x \leq 1)$ ,  $0(x \geq 1)$  となる。

**期待値の意味** 確率変数  $X$  が有限の値  $x_1, x_2, \dots, x_m$  を, 確率  $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_m)$  をもってとるとする. この場合, 値  $x_1, x_2, \dots, x_m$  の算術平均は,  $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i$  となる. この式では各値が生じる可能性(確率)は考慮されていない. 重み ( $1/n$ ) の和は 1 である. 他方, 期待値

$$E(X) = P(x_1)x_1 + P(x_2)x_2 + \dots + P(x_m)x_m = \sum_{i=1}^m x_i P(x_i)$$

は, 各値をその値が生じる確率で重みづけした加重平均である. 重みの和は 1 になる. 繰り返すが,  $x_i$  の発生する可能性を考慮して, 確率  $P(x_i)$  で重みづける. つまり起こりにくい値には小さな重みを与え, 起こりやすい値には大きな重みを与えており, 理にかなう.

$E(X)$  と同じく, 分散  $V(X)$  は,  $\mu = E(X)$  からの偏差の 2 乗

$$(x_1 - \mu)^2, (x_2 - \mu)^2, \dots, (x_m - \mu)^2$$

を, 各値の生じる可能性によって重みづけした平均  $\sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^2 P(x_i)$  である.

### コーシー・シュワルツ不等式

簡便のため  $E(X) = E(Y) = 0$  とし, 二個の確率変数の任意の線形関数,  $X \pm \rho Y$  の分散を求めると,  $V(X \pm \rho Y) = V(X) \pm 2\rho \text{COV}(X, Y) + \rho^2 V(Y) \geq 0$  となる. 分散は非負だから, この式を  $\rho$  に関する二次式とみなせば, 判別式は負または 0 にならないといけない. この判別式より, コーシー・シュワルツ不等式が得られる.

判別式が負になるときは実根は存在しない. 二次式は上向きで  $x$  軸(横軸)と交差せず, 常に正である. 判別式が 0 になるときは重根が存在し,  $V(X \pm \rho Y) = 0$  となる重根  $\rho$  を定めることができる. この分散が 0 だから, この  $\rho$  について  $X \pm \rho Y = 0$  となる. つまり二個の確率変数の間に線形関係がある.

### 二項分布 $B(n, p)$ に従う確率関数の平均値と分散の計算(3.31)

あるベルヌーイ試行において事象  $A$  の起こる確率を  $p$  とする.  $n$  回の独立試行を行うから、確率変数  $X_k$  は  $A$  が起これば 1, 起こらなければ 0 の値をとる. だから,  $P(X_k = 1) = p$ ,  $P(X_k = 0) = q$ ,  $q = 1 - p$  である. したがって, 平均と分散は

$$E(X_k) = 1p + 0q = p, \quad E(X_k^2) = 1^2p + 0^2q = p,$$

$$V(X_k) = E(X_k^2) - \{E(X_k)\}^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

今,  $X = \sum_{k=1}^n X_k$  とおくと,  $X$  も確率変数である. この  $X$  は,  $n$  回の試行のうち  $A$  が起こる回数を示すから, 二項分布  $B(n, p)$  に従う.

期待値は,  $E(X) = E(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n p = np$ . 確率変数  $X_k$  は互いに

独立であるから,  $X$  の分散は次のように分解できる.

$$\begin{aligned} V(X) &= V(\sum_{k=1}^n X_k) = E\{(\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k))^2\} = E\{(\sum_{k=1}^n X_k - np)^2\} \\ &= E\{[(X_1 - p) + \dots + (X_n - p)]^2\} = E\{(X_1 - p)^2\} + \dots + E\{(X_n - p)^2\} \\ &= \sum_{k=1}^n V(X_k) = \sum_{k=1}^n pq = npq. \end{aligned}$$

(独立性により,  $E\{(X_1 - p)(X_2 - p)\} = E\{(X_1 - p)\}E\{(X_2 - p)\} = 0$  などとなる. この性質を, 「積の期待値は期待値の積である」という.)

以上とはまったく異なるアプローチを用い, 同じ結果を導く. これが (3.31) 式に基づく導出となる. 確率関数は (3.31) であるから, 期待値の公式により,  $E(X) = \sum_{x=1}^n x {}_n C_x p^x q^{n-x}$  となる. (シグマにおいて,  $x=0$  の項は 0 になる.) この式を整理すると,

$$E(X) = \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^n \frac{n!}{(n-x)!(x-1)!} p^x q^{n-x} \quad (\text{分母分子の } x \text{ は共通})$$

$$\begin{aligned}
&= np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{((n-1)-(x-1))!(x-1)!} p^{x-1} q^{(n-1)-(x-1)} \quad (\text{シグマの上限と下限から 1 を引いて}) \\
&= np \sum_{x-1=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(x-1))!(x-1)!} p^{x-1} q^{(n-1)-(x-1)} \quad ((n-1) \text{ を } m \text{ に, } (x-1) \text{ を } y \text{ に変換する.}) \\
&= np \sum_{y=0}^m \frac{m!}{(m-y)!y!} p^y q^{m-y} = np. \quad (B(m, p) \text{ の確率関数の総和は } 1)
\end{aligned}$$

次に分散を求めてみる.  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$  であるから,  $E(X^2)$  をまず計算し, 平均の 2 乗を引いて分散を求めればよい. しかし, 二項確率関数においては,  $E\{X(X-1)\} = E(X^2) - E(X)$  を最初に計算し, この結果から  $E(X^2)$  を求める方が簡潔である. つまり,

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \{E(X^2) - E(X)\} + E(X) - E(X)^2 \\
&= E\{X(X-1)\} + E(X) - E(X)^2.
\end{aligned}$$

$E\{X(X-1)\}$  を計算する.

$$\begin{aligned}
E\{X(X-1)\} &= \sum_{x=2}^n x(x-1) \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=2}^n \frac{n!}{(n-x)!(x-2)!} p^x q^{n-x} \\
&\quad (\text{シグマ計算において、} x=0 \text{ と } x=1 \text{ の項は } 0 \text{ になる.}) \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{((n-2)-(x-2))!(x-2)!} p^{x-2} q^{(n-2)-(x-2)} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x-2=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{((n-2)-(x-2))!(x-2)!} p^{x-2} q^{(n-2)-(x-2)} \quad (\text{シグマの上下限から } 2 \text{ を引く}) \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^m \frac{m!}{(m-y)!y!} p^y q^{m-y} = n(n-1)p^2. \quad ((n-2) \text{ を } m \text{ に, } (x-2) \text{ を } y \text{ に変換する.})
\end{aligned}$$

だから,  $V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = npq$ .

### Poisson 確率変数の平均値と分散の導出(3.34)

$\exp(\lambda) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}$  に等しい. 右辺は左辺のテイラー展開であるが, 単純に両者は同

じであると理解しても良い. この関係により,  $\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \exp(-\lambda) = 1$  となる.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1} \exp(-\lambda)}{(x-1)!} = \lambda \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z \exp(-\lambda)}{z!} = \lambda.$$

$V(X)$ を導出するにあたり,準備として $E\{X(X-1)\}$ を求めておこう.

$$E\{X(X-1)\} = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) p(x) = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} = \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2} \exp(-\lambda)}{(x-2)!}$$

$$= \lambda^2 \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z \exp(-\lambda)}{z!} = \lambda^2. \quad \text{こ こ で } E\{X(X-1)\} = E(X^2 - X) = E(X^2) - \lambda = \lambda^2 \quad \text{だ か}$$

ら,  $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ , さらに  $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ ,  $E(X) = \lambda$  だから,  $V(X) = \lambda$ .

### (S)小数の法則: 二項確率関数から,Poisson 確率変数の導出(抄)

ポアソン確率変数の性質により,全時間  $s$  を  $n$  分割し,細分された時間を  $(s/n)$  と

する. その細分時間内に事象が起きる確率は  $p = \frac{\lambda s}{n}$  となる.細分時間内に起き

る事象の回数は高々1回と考えればよい.つまりベルヌーイ実験になっている.全

体として細分された時間は  $n$  回あるから,これは実験回数が  $n$ ,成功確率が  $p$  の二

項実験である. $n$  回の実験の内, $k$  回成功する確率関数は

$$p(X = k) = {}_n C_k \left(\frac{\lambda s}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda s}{n}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \text{ となる. 以下, } n \text{ に関して極限を求め,}$$

二項確率関数を近似する.確率関数を書き直すと

$$p(X = k) = \frac{(\lambda s)^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda s}{n}\right)^{n-k} \text{ となる.ここで中央の分数は, } k \text{ が有}$$

限の定数であるから,分母分子とも  $k$  個の  $n$  が含まれ,1で近似できる.最終項にお

いても  $k$  は有限の定数だから,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda s}{n}\right)^n = \exp(-\lambda s)$  となる. 全時間  $s$  を 1

$$\text{単位とみなせば, } p(X = k) = \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, \infty$$

### 一様確率変数の平均値と分散の導出

$[a, b]$ で一定の正值,  $(-\infty, a)$ 及び  $(b, \infty)$ では0の値をとる密度関数をもつ一様分

布の平均値と分散を導出しよう。

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_a^b = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### 練習問題(3章)

$$1. \quad Z=2 (1,1), P_z(2) = \frac{1}{36}, Z=3 (1,2), P_z(3) = \frac{1}{18}, Z=4 (2,2) (1,3), P_z(4) = \frac{1}{12}$$

$$Z=5 (2,3), (1,4), P_z(5) = \frac{1}{9}, Z=6 (1,5) (2,4) (3,3), P_z(6) = \frac{5}{36}$$

$$Z=7 (1,6) (2,5) (3,4), P_z(7) = \frac{1}{6}, Z=8 (2,6) (3,5) (4,4), P_z(8) = \frac{5}{36}$$

$$Z=9 (3,6) (4,5), P_z(9) = \frac{1}{9}, Z=10 (4,6) (5,5), P_z(10) = \frac{1}{12}, Z=11 (6,5), P_z(11) = \frac{1}{18}$$

$$Z=12 (6,6), P_z(12) = \frac{1}{36}$$

$$F_z(2) = \frac{1}{36}, F_z(3) = \frac{1}{12}, F_z(4) = \frac{1}{6}, F_z(5) = \frac{5}{18}, F_z(6) = \frac{5}{12}, F_z(7) = \frac{7}{12}, F_z(8) = \frac{13}{18},$$

$$F_z(9) = \frac{5}{6}, F_z(10) = \frac{11}{12}, F_z(11) = \frac{35}{36}, F_z(12) = 1.$$

$$P(5 \leq Z \leq 8) = F_z(8) - F_z(5) + P_z(5) = F_z(8) - F_z(4) = \frac{13}{18} - \frac{1}{6} = \frac{5}{9}$$

$$2. \quad F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt + \int_2^{\infty} f(t) dt = \int_0^2 c dt = 2c.$$

$F(\infty) = 1$  だから,  $2c=1$  が成立し,  $c = 1/2$ .

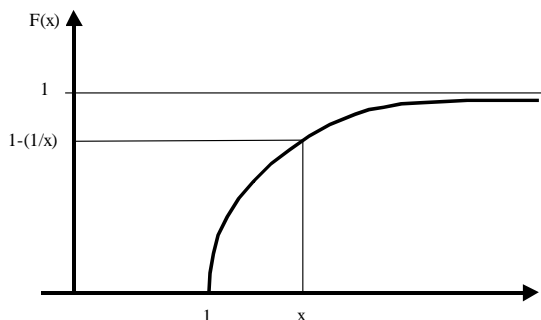
(積分計算をしなくても, 長方形の面積は求まる.)

$$\text{平均 } \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(t) dx = \int_0^2 x \frac{1}{2} dx = 1. \quad \text{分散 } V(x) = E(x^2) - \mu^2 = \int_0^2 x^2 \frac{1}{2} dx - 1 = \frac{1}{3}.$$

$$3. \quad \mu = \sum_{i=1}^6 xp(x) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^6 (x_i - \frac{7}{2})^2 p(x) = \sum_{i=1}^6 (x_i^2 - \frac{49}{4}) \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i^2 - (\frac{49}{4}) = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

4.  $P(1 \leq x \leq 4) = P(0 \leq \frac{x-1}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{3}) = 0.458$  (表より)



95%点  $P(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \leq 1.65) = 0.95$  を満たす  $x$  は 3.855.

5.  $F(x) = 0, (x \leq 1)$ .  $F(x) = 1 - \frac{1}{x}, (1 < x)$ .

a)  $0 \leq F(x) \leq 1, F(\infty) = 1, x \leq y$  なら  $F(x) \leq F(y)$  だから条件を満たす

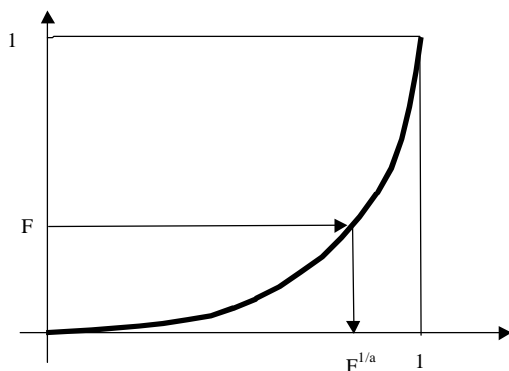
b)  $x$  が 1 以下の時は 0.  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} (x \geq 1)$ ,

c)  $F(3) - F(2) = (1 - \frac{1}{3}) - (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$

d)  $E(x) = \int_1^{\infty} x f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\log |x| + c]_1^{\infty} = \infty$  (発散する)

e)  $1 - \frac{1}{x} = 0.75, 0.25$  を解いて,  $x = 4, \frac{4}{3}$

6. 例えば,  $x^3 = 0.75$  を満たす  $x$  を求めると,  $0.75^{1/3}$ .  $\alpha$  については,  $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{100}}$ , となる.



7.  $p(x) = {}_4C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}$ . 自明だが, 数値も求めること.

8. a) 1分に0.1台なら1時間に6台. だから Poisson パラメーターを6として計算する. Poisson パラメーターを6とすると確率関数は  $p(x) = \frac{6^x \exp(-6)}{x!}$ .

$$P(x \geq 6) = 1 - P(x \leq 5) = 1 - (0.002 + 0.015 + 0.045 + 0.089 + 0.134 + 0.161) = 0.554$$

b) 1分に0.1台のなら10分で1台. Poisson パラメーターは1である. 先の問いと同様に  $P(x \geq 1) = 1 - p(0) = 0.632$ .

c) 上の2問は, 平均すれば同じ事象の確率を問うているが, Poisson パラメーターの取り方により, 違った結果をもたらす. a)は1時間を基準とする. b)は10分を基準とする.

9.  $E(X) = 0 \times 0.135 + 1 \times 0.271 + 2 \times 0.271 + 3 \times 0.180 + 4 \times 0.090 + 5 \times 0.036 + 6 \times 0.012 + 7 \times 0.003 + 8 \times 0.001 = 1.994$ . 2にならない. 分散も同様にして計算すると 1.981964.

10.  $E(x) = 0, V(x) = 1, E(y) = 0, V(y) = 2.5, \text{Cov}(x, y) = 0, \rho(x, y) = 0$ .  
 $p(x, y) \neq p(x)p(y)$  だから, 独立でない.

11. 平均株価=1万円, 期待収益=0, リスク =  $\frac{1}{2}$  (一円当たり収益の分散)

12. bの平均株価 =  $\frac{3}{2}$ 万円, bの期待収益 =  $\frac{1}{2}$ , リスク =  $\frac{75}{24} = \frac{25}{8}$ . ポートフォリオでは(3.70), (3.71)より, 期待収益 =  $\frac{1}{4}$ 万円, 期待収益率 =  $\frac{1}{4}$ , リスク =  $\frac{3}{4}$ .

13. 2期保有したとき: 確率  $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}$  でそれぞれ 3, 0, -0.75の収益が上がる.

よって期待収益 = 0, リスク =  $\frac{5}{4}$ . n期まで持ちつづけたペイオフを  $x_n$  とする.



$$E(x_n | x_{n-1}) = \frac{1}{3}2x_{n-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}x_{n-1} = x_{n-1} \quad ,$$

$$E(x_n^2 | x_{n-1}) = \frac{1}{3}(2x_{n-1})^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x_{n-1}\right)^2 = \frac{3}{2}x_{n-1}^2 .$$

以上より,  $E(x_n) = E(E(x_n | x_{n-1})) = E(x_{n-1})$ .

(この式は上級の内容を持つ.  $x_n$  の期待値を求めたいが直接には解けない. しか

し,  $x_{n-1}$  が分かれば, 2 倍になる確率は  $\frac{1}{3}$ , 半分になる確率は  $\frac{2}{3}$  だから,  $x_n$  の期待

値は  $x_{n-1}$  となる. これが  $x_{n-1}$  を条件としたときの  $x_n$  の条件付期待値であ

り,  $E(x_n | x_{n-1}) = x_{n-1}$  とかく. 計算は  $E(x_n | x_{n-1}) = \frac{1}{3}2x_{n-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}x_{n-1} = x_{n-1}$  である. と

ころで今求めたいのは  $x_n$  の期待値  $E(x_n)$  だから, この条件付期待値が分かれば次

に条件  $x_{n-1}$  についてさらに期待値を計算しないといけない. つま

り,  $E(x_n) = E(E(x_n | x_{n-1})) = E(x_{n-1})$  となる. まず条件を与えて期待値を計算し, 次

に条件について期待値をもとめるのである.) 同様にし

て,  $E(x_n^2) = E(E(x_n^2 | x_{n-1})) = \frac{3}{2}E(x_{n-1}^2)$  となる. 他方,  $E(x_1) = 1$ ,  $E(x_1^2) = \frac{3}{2}$  だから,

帰納的に,  $E(x_n) = 1$  万円,  $E(x_n^2) = \left(\frac{3}{2}\right)^n$  となる. したがって,  $V(x_n) =$

$E(x_n^2) - E(x_n)^2 = \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}$  万円<sup>2</sup> と求まる. 万円<sup>2</sup> を除けばリスクになる. 期待収

益は 0. 収益のリスクはペイオフのリスクと変わらない.

**別解:** 二項ツリーを考えると分かるように,  $n$  期において可能な場合の数は同じ

結果も含めて  $2^n$  ある.  $n$  回の中で  $i$  回 2 倍になり  $(n-i)$  回半分になる確率は

$\binom{n}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i}$  である. 他方  $n$  回の中で  $i$  回 2 倍になり  $(n-i)$  回半分になる場合の

株価は  $2^i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} a$  である. これを  $a$  で割れば収益になる. その期待値を求めるには,

確率と株価を掛けて、全ての場合について和を求めればよい。従っ

て、 $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i} (2)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^n = 1$ 、が収益の期待値

となる。

分散を求めるために、収益の2乗の期待値を求めると、

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i} (4)^i \left(\frac{1}{4}\right)^{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{4}{3}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^{n-i} = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

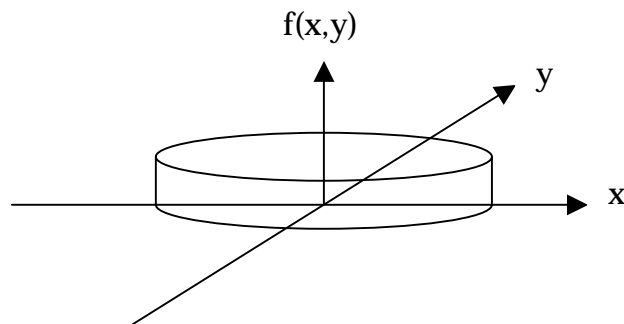
したがって、分散は  $= \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right\}$ 。

## 補論

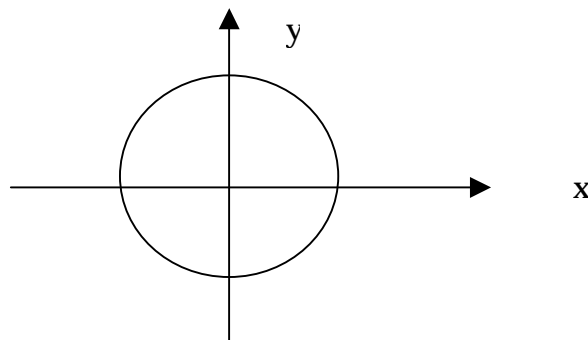
(上級の統計学の内容を持ちます) 1997年5月29日

### 連続形同時密度関数, 周辺密度, 条件付き密度関数

連続型同時密度関数を、 $f(x,y) = \frac{1}{\pi}$ 、ただし  $x^2 + y^2 \leq 1$  とする。



$x$  と  $y$  の領域は図示すれば下の図になり、半径は1の円である。面積は  $\pi$  だから、密度は  $\frac{1}{\pi}$ 、そして体積は1となっている。



**共分散の計算:** 共分散を計算すると

$$E(X, Y) = \iint x y \frac{1}{\pi} dx dy$$

と掛ける. 積分範囲は  $x^2 + y^2 \leq 1$ . 積分範囲は  $\{ x^2 + y^2 \leq 1, \text{かつ } x \text{ が正} \}$  と,  
 $\{ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ かつ } x \text{ が負} \}$  に分割でき, 積  $x y$  は符号が逆になるから,

$$E(X, Y) = 0.$$

したがって  $X$  と  $Y$  の共分散は 0, あるいは  $\text{COV}(X, Y) = 0$  となる. ( $x$  と  $y$  の期待値はそれぞれ 0 である. この計算はできるだろうか. 厳密には, 各々の周辺密度を計算してから求めた方がよい.) **共分散は 0 であるが,  $X$  と  $Y$  は独立ではない.**

積分計算を詳しく説明する. 2重積分であるので  $x$  を与えると  $y$  の積分範囲は  $(-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$  になる.  $x$  は -1 から 1 までである. だから積の期待値は

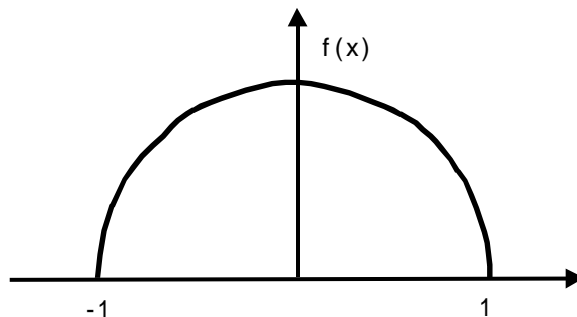
$$\iint x y \frac{1}{\pi} dx dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y dx dy$$

となる. 次に  $x$  の積分範囲を  $(-1, 0)$  と  $(0, 1)$  に分ければ, 0 が分かる.

**周辺密度:**  $X$  周辺密度を計算してみる. これは同時密度関数を縦方向に足し合わせるという事である.  $x$  を所与とすれば,  $y$  の積分範囲は  $(-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$  だから, この範囲について  $y$  に関する積分を求めると

$$f_x(x) = \int \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$$

となる. 周辺の図はこんな感じ (下図). 平方根の部分は円だが, 密度関数である



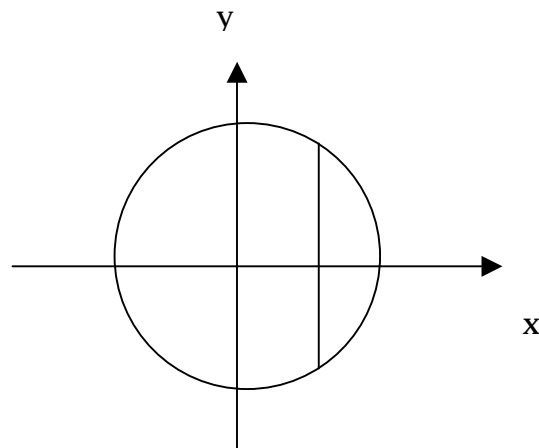
から正の半円を使う.ところが半円の面積は $\frac{\pi}{2}$ だから,面積が1になるよう

$\frac{2}{\pi}$ をかけて調整していると考えればよい.

面積の計算は  $\int_{-1}^1 f_x(x) dx = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

により求まる.あるいは半円との関係によりあきらかといえる.(計算がしたければ, $x = \cos \theta$  と変換して $\theta$ の範囲を $(0, \pi/2)$ と変換して計算する.変換のヤコビは $\sin \theta$ となる.以下,三角関数の積分.)またこの周辺密度関数から, $x$ の期待値は0になることが理解できよう.(左右対称である.)以上の周辺密度関数の

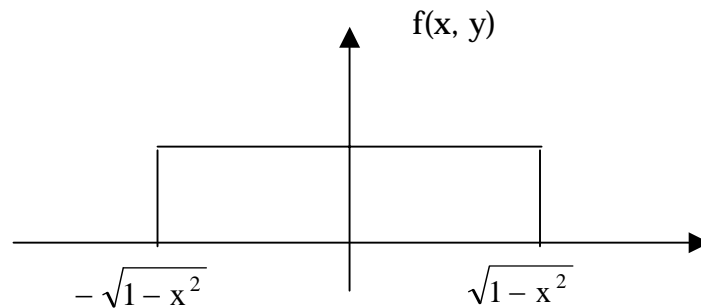
計算より明らかのように  $f_{xy}(x, y) = \frac{1}{\pi} \neq f_x(x)f_y(y)$ , なので  $X$  と  $Y$  は独立に分布していない!!!!.



**条件付き密度:** 最後に条件付き分布を考える.  $X$  を  $x$  とした時の  $Y$  の条件付き密度を導出する.

$X$  を  $x$  に固定すると  $Y$  の範囲は $(-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$ となる.上図の切断面は長方形で

となっており高さは  $\frac{1}{\pi}$  である。したがって長方形の面積は 1 にはならない。



(面積 =  $\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ ) . 面積を 1 にするには,

$$\frac{1}{\pi} \div \left( \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

と調整する。これが条件付き密度となる。条件付き密度は長方形であることだけは確かである。ただし  $y$  の範囲は  $(-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$  . もちろんこの結果は

$$f(Y|X) = \frac{\text{joint density}}{\text{marginal density of } x}$$

と一致する。したがって  $x=0 \rightarrow f(Y|X) = \frac{1}{2} \quad (-1 < y < 1)$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow f(Y|X) = 1 \quad \left(-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow f(Y|X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

などとなる。条件により条件密度の高さは変化する。条件付き密度に関する期待値 (条件付き期待値) も条件に依存している。ただし分布の形からしても

$$E(Y|X) = 0 .$$

(条件付き期待値とは、条件付き密度に関して期待値計算をして求める。) さらに条件付き分散は

$$E(Y^2 | X) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^2}{2\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{3} 2(1-x^2)\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3}(1-x^2).$$

となり, 当然ではあるが, 条件変数の値に依存している. (条件により長方形の底辺が変化し, 散らばりの範囲が変わる.)

### 追加練習問題

1997年6月5日

A] 次の様な同時 (あるいは結合) 確率関数を基にして以下の計算をなさい.

| Y \ X | 0    | 1    | 2    |
|-------|------|------|------|
| 0     | 0.05 | 0.1  | 0.03 |
| 1     | 0.21 | 0.11 | 0.19 |
| 2     | 0.08 | 0.15 | 0.08 |

1) 次の確率を計算しなさい.

(a)  $P(Y < z)$ , (b)  $P(Y < z, X > 0)$ , (c)  $P(Y = 1, X \geq 1)$

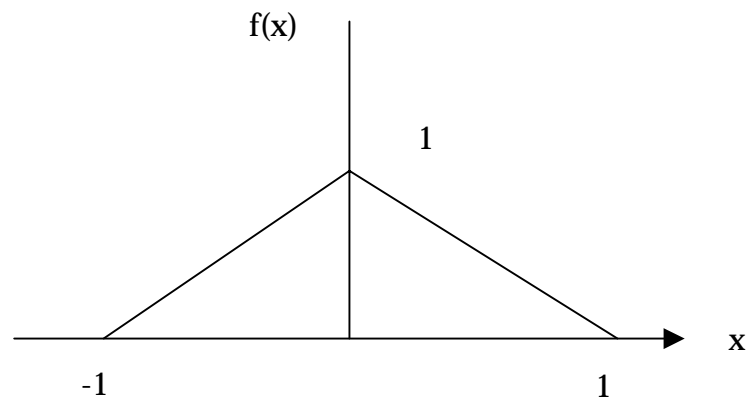
2)  $X$  と  $Y$  の周辺確率関数を求めなさい.

3)  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$ ,  $\text{Cov}(X, Y)$ ,  $E(X^2 Y^3)$  を求めなさい.

4)  $E(Y|X)$  と  $V(Y|X)$  を求めなさい.

5)  $E(Y - E(Y|X))^2$  を求めなさい.

B] 次の様な密度関数をもつ確率変数の平均と分散を求めなさい.



C]  $X$  の密度関数が  $f(x) = 0$  ( $x \leq 0$ ),  $f(x) = \exp(-x)$  ( $0 < x$ ) と定義されている.

1)  $X$  の分布関数を求めなさい.

2)  $X$  の期待値と分散を求めなさい.

(部分積分の計算ができなければしなくてよい.)

3) もし  $X$  の密度関数が,  $f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$ ,

と定義されているとすると,  $X$  の分布関数, 期待値, 分散はどうなるだろうか.