第10章　演習問題解答

10.1　**(1)** 特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

で $\lambda = 1$ を重根として持ちます．解は一般的に

$$f(t) = K_0 e^t + K_1 t e^t$$

と定数 K_0 と K_1 を用いて表すことができます．このとき

$$f'(t) = K_0 e^t + K_1 e^t + K_1 t e^t$$

と計算されますから，$t = 0$ を代入して

$$f(0) = K_0 = c_0,\ f'(0) = K_0 + K_1 = c_1$$

から

$$K_0 = c_0,\ K_1 = c_1 - c_0$$

と表されます．以上で求める解は

$$f(t) = c_0 e^t + (c_1 - c_0) t e^t$$

となります．

(2) 特性方程式は

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

で $\lambda = 2$ を重根として持ちます．解は一般的に

$$f(t) = K_0 e^{-2t} + K_1 t e^{-2t}$$

と定数 K_0 と K_1 を用いて表すことができます．このとき

$$f'(t) = -2K_0 e^{-2t} + K_1 e^{{}^2t} - 2K_1 t e^{-2t}$$

と計算されますから，$t = 0$ を代入して

$$f(0) = K_0 = c_0,\ f'(0) = -2K_0 + K_1 = c_1$$

から

$$K_0 = c_0,\ K_1 = c_1 + 2c_0$$

と表されます．以上で求める解は

$$f(t) = c_0 e^{-2t} + (c_1 + 2c_0) t e^{-2t}$$

となります．

10.2 $\alpha = a + ib$, $\beta = c + di$ と実部と虚部に分けて考えます．このとき

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha t} \cdot e^{\beta t} &= e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \cdot e^{ct}(\cos dt + i \sin dt) \\
&= e^{(a+c)t}(\cos bt + i \sin bt)(\cos dt + i \sin dt) \\
&= e^{(a+c)t}(\cos(b+d)t + i \sin(b+d)t) \\
&= e^{(\alpha+\beta)t}
\end{aligned}
$$

と計算されます（演習 1.5 を参考にしましょう）.

10.3 **(1)** 特性方程式

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

を解くと

$$\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

となります．これから解は

$$f(t) = c_0 e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2}{\sqrt{3}}(c_0 - \frac{1}{2}c_1)e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

であることがわかります.

(2) 特性方程式

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

を解くと

$$\lambda = -1 \pm i$$

となります．これから解は

$$f(t) = c_0 e^{-t} \cos t + (c_0 + c_1)e^{-t} \sin t$$

であることがわかります.

10.4 行列 A の固有方程式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

と計算されますから，固有値は $\lambda = 5, -1$ です．各固有値の対する固有ベクトルを計算すると，

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を $\lambda = 5$ の固有ベクトル，

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を $\lambda = -1$ の固有ベクトルとしてとることができます．ここで $P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2)$ とすると P は正則行列で

$$\vec{v}(t) = P \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} \vec{v}_0$$

が，求める解となります．