第 3 章　演習問題解答

3.1　**演習 2.2** で用いたのと同様の有理化を用います．すなわち

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a} &= \frac{x-a}{\{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+(\sqrt[3]{a})^2\}(x-a)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+(\sqrt[3]{a})^2} \longrightarrow \frac{1}{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}+(\sqrt[3]{a})^2} = \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

と極限が計算されます．ここで

$$\sqrt[3]{x} \longrightarrow \sqrt[3]{a} \quad (x \longrightarrow a)$$

であることを用いました.

3.2　　2 項定理を用いて $(a+h)^n$ を展開します.

$$\begin{aligned}\frac{(a+h)^n-a^n}{h} &= \frac{1}{h}\times\left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k}h^k - a^n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k a^{n-k}h^{k-1} \\ &= na^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}h+\cdots+{}_nC_k a^{n-k}h^{k-1}+\cdots+h^{n-1} \\ &\longrightarrow na^{n-1}\end{aligned}$$

3.3　**(1)** $y' = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$　**(2)** $y' = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$　**(3)** $y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

(4) $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

3.4 **(I)**$\alpha > 0$ のとき $t = \frac{n}{\alpha}$ とおくと $n \longrightarrow +\infty$ のとき $t \longrightarrow +\infty$ となります．そこで

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \left\{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right\}^\alpha \longrightarrow e^\alpha$$

と計算されます．ここで s の関数 $s\alpha$ の $s = \alpha$ における連続性を用いました.

(II) $\alpha = 0$ のとき

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = 1 \longrightarrow 1$$

となります.

(III)$\alpha > 0$ のとき $t = \frac{n}{\alpha}$ とおくと $n \longrightarrow +\infty$ のとき $t \longrightarrow -\infty$ となります．このことを用いて

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \left\{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right\}^\alpha \longrightarrow e^\alpha$$

と計算されます.

以上の 3 通りの場合をまとめると

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \longrightarrow e^\alpha \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

を得ます.

3.5 (3.18) を微分して

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)r^{k-2} = \frac{2}{(1-r)^3}$$

を得ます．これを用いると確率変数 X の 2 次のモーメントは

$$\begin{aligned}
E(X) &= E(X(X-1)) + E(X) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)p^k q + \frac{p}{q} \\
&= p^2 q \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2} + \frac{p}{q} \\
&= p^2 q \frac{2}{(1-p)^3} + \frac{p}{q} = \frac{2p^2 + pq}{q^2}
\end{aligned}$$

と計算され，これを用いて X の分散は

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{p^2 + pq}{q^2} = \frac{p(p+q)}{q^2} = \frac{p}{q^2}$$

となります.