第 5 章　演習問題解答

5.1　**(I)** $\gamma < \alpha < \beta$ のとき

$$\int_\alpha^\beta = \int_\gamma^\beta - \int_\gamma^\alpha = \int_\gamma^\beta + \int_\alpha^\gamma$$

を得ます.

(II) $\alpha < \beta < \gamma$ のとき

$$\int_\alpha^\beta = \int_\alpha^\gamma - \int_\beta^\gamma = \int_\alpha^\gamma + \int_\gamma^\beta$$

を得ます.

5.2

$$\left(\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right)' = \frac{1}{t^n}, \quad \left(\frac{1}{-n+1}t^{-n+1}\right)' = t^{-n}$$

$$(\log t)' = \frac{1}{t}, \quad (e^t)' = e^t, \quad \left(\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right)' = t^\alpha$$

$$(-\cos t)' = \sin t, \quad (\sin t)' = \cos t$$

から分かります.

5.3 **(1)**

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(e^x)'dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin x dx &= \int_0^\pi x(-\cos x)'dx \\ &= [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \\ &= \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_1^e x\log x dx &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2\sin x dx &= \int_0^\pi x^2\left(-\cos x\right)' dx \\ &= \left[-x^2\cos x\right]_0^\pi + 2\int_0^\pi x\cos x dx \\ &= \pi^2 + 2\int_0^\pi x(\sin x)'dx \\ &= \pi^2 + 2\left[x\sin x\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi \sin x dx \\ &= \pi^2 - [-\cos x]_0^\pi = \pi^2 + 4\end{aligned}$$

5.4

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \log 2$$

5.5　全ての $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$\int_a^b (\lambda f(x)+g(x))^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f(x)^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g(x)^2 dx \geqq 0$$

が成立します．ここで，この右辺を λ の 2 次式と見て，2 次の係数について場合を分けて考えます．

(I) $\int_a^b f(x)^2 dx > 0$ のときは，この λ の 2 次式の判別式 D が

$$\frac{D}{4} = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx \leqq 0$$

から証明すべき不等式が従います．

(II) $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$ のときは $f(x) \equiv 0$ から，容易に不等式が得られます．

5.6　関数 $\frac{1}{x^\alpha}$ は単調減少ですから $n \leqq x \leqq n+1$ において

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqq \frac{1}{n^\alpha}$$

が成立することが分かります．これを積分して

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqq \frac{1}{n^\alpha}$$

を得ます．ここで $\sum_{n=1}^N$ と和をとると

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqq \sum_{n=1}^N 1n^\alpha$$

を得ます．この不等式の左辺の積分を計算すると

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_1^{N+1} = \frac{1}{1-\alpha}\left(N^{1-\alpha} - 1\right) \longrightarrow +\infty \quad (N \longrightarrow +\infty)$$

となりますから，追い出しの原理を用いて

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$$

が従います．

5.6 **(別解)** $n \geqq 1$ から

$$\frac{1}{n^\alpha} \geqq \frac{1}{n}$$

を得ます．これから

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geqq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty \quad (N \longrightarrow +\infty)$$

を得ます．ここで追い出しの原理を用いても結果は得られます.