第 7 章　演習問題解答

7.1　**(1)**

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

(2) $I_2\vec{x} = \vec{x}$

(3)

$$P_{12}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1(\lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Q_2(\lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

$$R_{12}(\lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad R_{21}(\lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

7.2　**(1)**

$$AI_2 = A(\vec{e}_1\ \vec{e}_2) = (A\vec{e}_1\ A\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

$$I_2A = I_2(\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = (I_2\vec{a}_1\ I_2\vec{a}_2) = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = A$$

(2)

$$P_{12}A = \left(P_{12}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}\ P_{12}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$Q_1(\lambda)A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad Q_2(\lambda)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

$$R_{12}(\lambda)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} + a_{21} & \lambda a_{12} + a_{22} \end{pmatrix}, \quad R_{21}(\lambda)A = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$AP_{12} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$$

$$AQ_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad AQ_2(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

$$AR_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} + a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \quad AR_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$$

7.3 λ^n を $(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$ で割ります.

$$\lambda^n = \varphi(\lambda)(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta) + a\lambda + b$$

において定数 a と b を求めるために，$\lambda=\alpha$ と $\lambda=\beta$ を代入すると

$$\alpha^n = a\alpha + b, \quad \beta^n = a\beta + b$$

を得ます．これを解くと $\alpha \neq \beta$ から

$$a = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}, \quad b = \frac{\alpha\beta(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\beta - \alpha}$$

を得ます．このことから

$$A^n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}A + \frac{\alpha\beta(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\beta - \alpha}I_2$$

が従います.

7.4 上にある演習 7.3 の解答に数値を代入するだけですが，それとは独立に解答しましょう．等式

$$\lambda^n = \varphi(\lambda)(\lambda+5)(\lambda-7) + a\lambda + b$$

において $\lambda=-5$ と $\lambda=7$ を代入すると

$$(-5)^n = -5a + b, \quad 7^n = 7a + b$$

となります．これを a と b について解くと

$$a = \frac{1}{12}\left(7^n - (-5)^n\right), \; b = -\frac{35}{12}\left(7^n - (-5)^n\right)$$

となります．この a と b を用いて

$$A^n = aA + bI_2$$

を得ます.

7.5 固有多項式を計算すると

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

となりますから，A の固有値は $\lambda = 5$ と $\lambda = -1$ です．それぞれの固有ベクトルを求めましょう．

$\underline{\lambda = 5 \text{ の固有ベクトル}}$ は

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が $2x + y = 0$ と必要十分ですから，

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

をとることができます．

$\underline{\lambda = -1 \text{ の固有ベクトル}}$ は

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が $x + y = 0$ と必要十分ですから，

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

をとることができます．

ここで $P = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2)$ とおくと P は正則で

$$AP = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化をすることができます．

7.6 (7.48) $(\Rightarrow)$ は明らかです．$(\Leftarrow)$ を示します．$\vec{y}=\vec{a}$ とすると

$$||\vec{a}||^2=(\vec{a},\vec{a})=0$$

から $\vec{a}=\vec{0}$ が従います．

(7.48) $(\Rightarrow)$ は明らかです．$(\Leftarrow)$ を示します．$C=(\vec{c}_1\ \vec{c}_2)$ と列ベクトル表示をします．このとき

$$C\vec{e}_1=\vec{c}_1,\quad C\vec{e}_2=\vec{c}_2$$

から $C=O_2$ となります．

7.7 **(1)** A の固有値は $\lambda=3$ と $\lambda=-2$ で，直交行列

$$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

を用いて

$$^tPAP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

と対角化できます．(2) のために $P=(\vec{v}_1\ \vec{v}_2)$ と定めます．

(2) $\vec{v}={}^t(x\ y)$ を考えます．変数変換 $\vec{\xi}={}^tP\vec{x}$ をとると

$$\begin{aligned}z &= (A\vec{v},\vec{v})=({}^tPAP\cdot{}^tP\vec{x},{}^tP\vec{x})\\ &= \left(\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\vec{\xi},\vec{\xi}\right)=3\xi_1^2-2\xi_2^2\end{aligned}$$

を得ます．制約条件 $||\vec{x}||=1$ は，${}^tP$ が直交行列ですから $||\vec{\xi}||=1$ すなわち $\xi_1^2+\xi_2^2=1$ と必要十分となります．

ここで $\xi_1^2=1-\xi_2^2$ を $z=3\xi_1^2-2\xi_2^2$ に代入すると

$$z=3(1-\xi_2^2)-2\xi_2^2=3-5\xi_2^2\leqq 3$$

と上から評価されます．この不等式の等式成立条件は $\xi_2=0$ したがって $\xi_1=\pm1$ ですから，$\vec{\xi}=\pm{}^t(1\ 0)$ のとき最大値 3 をとります．元の変数では $\vec{v}=\vec{v}_1$ のとき最大値 3 をとります．

同様に $\xi_2^2=1-\xi_1^2$ を $z=3\xi_1^2-2\xi_2^2$ に代入して考えると $\vec{\xi}=\pm{}^t(0\ 1)$ のとき最小値 -2 をとります．元の変数では $\vec{v}=\vec{v}_1$ のとき最小値 -2 をとります．