基礎コース　計量経済学　解答

May 20, 2006

まだ，6 章の解答ならびに説明はできていません。
解答の誤りなどは，morimune@econ.kyoto-u.ac.jp
に連絡下さい。22/9/2005
一部改訂 (7 章の中心極限定理)　20/5/2006

1　データの性質

1.1

(a)

$$c + c + \cdots + c = nc$$

(b)

$$\begin{aligned}(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + \cdots + (x_n - \overline{x}) &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - n\overline{x} \\ &= n\overline{x} - n\overline{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c(x_1 - \overline{x}) + c(x_2 - \overline{x}) + \cdots + c(x_n - \overline{x}) &= c\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \\ &= 0\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - \overline{x}) &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x} \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - (y_1\overline{x} + y_2\overline{x} + \cdots + y_n\overline{x}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \overline{x}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \overline{x}(n\overline{y})\end{aligned}$$

同様に,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i-\overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \overline{y}(n\overline{x})$$

となる．さらに

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\overline{yx}$$

となり，同値．両辺を n で割ると，標本共分散

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \overline{yx}$$

になるが，右辺は,「積の平均」から「平均の積」を引いた形になっている．

1.2

(a)　平均は５であるから，x の標本分散
$=\frac{1}{3}(1\times 1+2\times 2+3\times 3+4\times 4-4\times 2.5\times 2.5)=\frac{5}{3}$,
x の標本標準偏差＝ $\sqrt{\frac{5}{3}}$,
y についても，順番が逆なだけだから，標本分散と標準偏差は同じ．標本共分散
$=\frac{1}{3}(1\times 4+2\times 3+3\times 2+4\times 1-4\times 2.5\times 2.5)=-\frac{5}{3}$,
標本相関係数＝ $-\frac{5}{3}/(\sqrt{\frac{5}{3}}\times\sqrt{\frac{5}{3}})=-1.$
(b)　標本分散と，標準偏差は (a) と変わらない．標本共分散は
$=\frac{1}{3}(1\times 1+2\times 2+3\times 3+4\times 4-4\times 2.5\times 2.5)=\frac{5}{3}$,
となる．したがって，標本相関係数は１.
(c)　問題に間違いあり．このまま問題を解くと，x の標本分散は変わらない．y の場合は,
$=\frac{1}{3}(1\times 1+2\times 2+(-3)\times(-3)+(-4)\times(-4)-4\times(-1)\times(-1))=\frac{26}{3}$,
となる．標本共分散は
$=\frac{1}{3}(1\times(-4)+2\times(-3)+3\times 2+4\times 1-4\times(-1)\times 2.5)=\frac{10}{3}$
標本相関係数＝ $\frac{10}{3}/(\sqrt{\frac{26}{3}}\times\sqrt{\frac{5}{3}})=\sqrt{\frac{10}{13}}$
しかし，本来の問題は,

$$y=(-4,-3,-3,-4)$$

で，平均は-3.5．標本共分散は
$=\frac{1}{3}(1\times(-4)+2\times(-3)+3\times(-3)+4\times(-4)-4\times(-3.5)\times 2.5)=0$
で，標本相関係数も０.

1.3

x 軸対象: (1,2),(2,4),(-1,2),(-2,4)
y 軸対象: (1,2),(2,4),(1,-2),(2,-4)
原点対象： (1,2),(2,4),(-1,-2),(-2,-4), この場合は，共分散は０にならない.

1.4

表 1.5 より,

$$t = \sqrt{20}\frac{-55.18}{\sqrt{12685.36}} = \sqrt{5}\frac{-110.36}{113}$$

となり，この値はほぼ $-\sqrt{5}$ である.（t の正確な値は-2.191 である.） 対立仮説で，平均収益は負とするなら，自由度が 19 の t 分布表より，5% 境界点は，-1.73 としてよい．従って，平均収益は０であるという帰無仮説は，棄却される．標準正規分布を帰無分布とするなら，境界点は-1.65 となるだけだから，検定結果は変わらない.

同じく,

$$t = \sqrt{17}\frac{33.71}{\sqrt{18249.79}} = \sqrt{17}\frac{33.71}{135} \fallingdotseq \frac{\sqrt{17}}{4} \fallingdotseq 1$$

となる．(t の正確な値は 1.0289)．対立仮説で平均収益は正とするから，境界点は，自由度が 16 の t 分布を使えば，1.75，標準正規分布を使えば 1.65 であるから，帰無仮説を棄却することはできない.

1.5

$$t = \sqrt{17-2}\frac{-0.1}{\sqrt{1-(-0.1)^2}} \fallingdotseq \sqrt{16}\times(-0.1) \fallingdotseq -0.4$$

となるから，自由度が 15 の t 分布表，あるいは標準正規分布表のいずれを用いても，相関は無い，という帰無仮説は棄却できない.（t の正確な値は 0.389）

2 単回帰

2.1

y	x	x^2	xy	y^2	回帰値	残差
1	1	1	1	1	$-3+\frac{9}{2}\times 1 = 1.5$	$1-1.5=-0.5$
7	2	4	14	49	$-3+\frac{9}{2}\times 2 = 6$	$7-6=1$
10	3	9	30	100	$-3+\frac{9}{2}\times 3 = 10.5$	$10-10.5=-0.5$
18	6	14	45	150	18	0

勾配は

$$b = \frac{45 - 6 \times 18/3}{14 - (6 \times 6/3)} = \frac{9}{2}$$

$$a = (18/3) - \frac{9}{2} \times (6/3) = -3$$

回帰値の和は，被説明変数の和と一致する．残差の和は０．

2.2

y	x	x^2	xy	y^2
-5	-1	1	5	25
1	0	0	0	1
4	1	1	4	16
0	0	2	9	42

$$b = \frac{9 - 0}{2 - 0} = \frac{9}{2},$$

$$a = 0 - \frac{9}{2} \times 0 = 0.$$

となる．

2.3

勾配係数は

$$b = \frac{\sum_{t=1980}^{2002}(t - \bar{t})y_t}{\sum_{t=1980}^{2002}(t - \bar{t})^2}$$

となる．ただし，$\bar{t}$ は t の平均．$t^* = t - 1979$，だからその平均は，

$$\overline{t^*} = \bar{t} - 1979$$

また，

$$t^* - \overline{t^*} = (t - 1979) - (\bar{t} - 1979) = t - \bar{t}$$

この回帰式の勾配の推定量は

$$b^* = \frac{\sum_{t=1980}^{2002}(t^* - \overline{t^*})y_t}{\sum_{t=1980}^{2002}(t^* - \overline{t^*})^2} = \frac{\sum_{t=1980}^{2002}(t - \bar{t})y_t}{\sum_{t=1980}^{2002}(t - \bar{t})^2}$$

となり，b に一致する．

2.4

元の回帰式に関しては，

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2},$$

逆回帰式については，変数の記号が異なっているだけだから，

$$\widehat{\gamma} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})(x_t - \overline{x})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})^2},$$

となる．また標本相関係数は，

$$r = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})(x_t - \overline{x})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})^2 \sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2}}$$

であるから，

$$r^2 = \widehat{\beta} \times \widehat{\gamma}$$

という関係が成立する．例２．９では，

$$r^2 = 0.567 \times 1.231 = 0.698.$$

2.5

被説明変数が１０倍，説明変数が 100 倍になると，もとの推定量を

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2}$$

ならびに

$$\widehat{\alpha} = \overline{y} - \widehat{\beta}\overline{x}$$

とすれば，星付き変数ならびに係数を新たに定義された変数，新たに定義された変数に関する回帰式の係数推定量として，

$$\widehat{\beta}^* = \frac{\sum_{t=1}^{n}(x_t^* - \overline{x^*})(y_t^* - \overline{y^*})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t^* - \overline{x^*})^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} 100(x_t - \overline{x})10(y_t - \overline{y})}{\sum_{t=1}^{n}(100(x_t - \overline{x}))^2} = \frac{1}{10}\widehat{\beta}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}^* &= \overline{y^*} - \widehat{\beta}^*\overline{x^*} \\
&= 10\overline{y} - \frac{1}{10}\widehat{\beta} \times 100\overline{x} \\
&= 10\widehat{\alpha}
\end{aligned}$$

となる．この関係は，

$$\widehat{y}_i = 1 + 2x_i$$

より，両辺を１０倍するなら，

$$10\widehat{y}_i = 10 + 20x_i$$

さらに，x 変数を 100 倍するなら，

$$\begin{aligned} 10\widehat{y}_i &= 10 + 20\frac{1}{100}(100x_i) \\ &= 10 + 0.2 \times (100x_i) \end{aligned}$$

という風に，元の関係を維持する操作によって，求める事ができる．

2.6

定数項しか含まない回帰式だから，

$$y_i = \mu + u_i$$

となる．誤差項は変わらない．一次の条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\widehat{\mu}}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{\mu})^2 &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\widehat{\mu}}(y_i - \widehat{\mu})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}2(y_i - \widehat{\mu})\frac{\partial}{\partial\widehat{\mu}}(y_i - \widehat{\mu}) \\ &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{\mu}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

　したがって，

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{\mu}) = 0 \qquad (*)$$

を満たすように $\widehat{\mu}$ を求める．シグマを分解すると

$$\sum_{i=1}^{n}y_i - n\widehat{\mu} = 0$$

だから，

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i = \overline{y}$$

また，$(*)$ 式より，残差の和は０となる．回帰値は

$$\widehat{y}_i = \widehat{\mu}$$

となり，残差は $\widehat{y}_i - \widehat{\mu}$, したがって

$$
\begin{aligned}
RSS &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{\mu})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2
\end{aligned}
$$

しかし，これは TSS に等しい．だから，決定係数は 0．ちなみに回帰変動は

$$
ESS = \sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i - \overline{y})^2 = 0.
$$

2.7

$$
y_i = \beta x_i + u_i
$$

だから，一次の条件は,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\widehat{\beta}}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{\beta}x_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\widehat{\beta}}(y_i - \widehat{\beta}x_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}2(y_i - \widehat{\beta}x_i)\frac{\partial}{\partial\widehat{\beta}}(y_i - \widehat{\beta}x_i) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{\beta}x_i)x_i \qquad (*) \\
&= -2\{\sum_{i=1}^{n}y_ix_i - \widehat{\beta}\sum_{i=1}^{n}x_ix_i\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

だから,

$$
\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}y_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.
$$

回帰値は,

$$
y_i = \widehat{\beta}x_i
$$

だから，残差は，$y_i - \widehat{\beta}x_i$, また一次の条件 $(*)$ より，残差と x_i の積和は 0 になる．つまり，直交する．しかし，残差の和が 0 になる保証はない.

2.8

8.1　例えば,

$$\ln(439/479) = -0.0872.$$

8.2

$$R_{ntt} = 0.00201(0.11) + 0.71699(0.26)R_{nikkei}$$

したがって，定数項は 0.002，つまり，0.2% 。高すぎるか。
8.3　左辺から 0.005 を引き，それを被回帰変数とする。例えば，最初の値を

$$-0.0872 - 0.005 = -0.0922$$

として，推定し直す。結果は

$$(R_{ntt} - 0.005) = 0.0006(0.034) + 0.71699(0.26)(R_{nikkei} - 0.005).$$

切片の t 値は有意ではない。P 値は 0.97。勾配の推定値，t 値は変わらない。P 値は 0.047。

3　偏回帰係数と回帰

3.1

$\sum_{t=1}^{n} x_t = 0, \sum_{t=1}^{n} z_t = 0$, したがって，$\overline{x} = 0, \overline{z} = 0$. さらに，$\sum_{t=1}^{n} z_t x_t = 0$, となる．これらを代入すると正規方程式は

$$\sum_{t=1}^{n} y_t = n\widehat{\alpha}$$

$$\sum_{t=1}^{n} y_t x_t = \widehat{\beta} \sum_{t=1}^{n} x_t^2$$

$$\sum_{t=1}^{n} y_t z_t = \widehat{\gamma} \sum_{t=1}^{n} z_t^2$$

となるから，この 3 式に数値を代入すればよい．

$$21 = 6\widehat{\alpha}$$

$$2 = 4\widehat{\beta}$$

$$9 = 6\widehat{\gamma}.$$

y	y^2	c	x	z	回帰値	残差	残差平方
1	1	1	-1	-1	$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}(-1)+\frac{3}{2}(-1)=\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
2	4	1	1	-1	$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}(1)+\frac{3}{2}(-1)=\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	9	1	0	-1	$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}(0)+\frac{3}{2}(-1)=\frac{4}{2}$	1	1
4	16	1	-1	1	$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}(-1)+\frac{3}{2}(1)=\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
5	25	1	1	1	$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}(1)+\frac{3}{2}(1)=\frac{11}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
6	36	1	0	1	$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}(0)+\frac{3}{2}(1)=\frac{10}{2}$	1	1
21	91		0	0	21	0	3

したがって，

$$TSS = 91 - \frac{1}{6}\times 21 \times 21 = \frac{35}{2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{2}{35}\times 3 = \frac{29}{35}.$$

y を $\frac{2}{7}$ 倍すると，定数項が 1 になる．しかし，x 係数と y 係数は各々，$\frac{1}{7}$，$\frac{3}{7}$ となる．したがって，x 変数と y 変数を，各々$\frac{1}{7}$ 倍，$\frac{3}{7}$ 倍にすればよい．

定数項係数の推定値を０にするには，(3.27) 式より，左辺も 0 になればよいから，各 y 値から，3.5 を引く．

3.2

x を，1，z に回帰して求めた残差を x^*, y を，1，z に回帰して求めた残差を y^* とすると

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^* x_t^*}{\sum_{t=1}^n (x_t^*)^2}$$

となる．変数を入れ替えた式について同様の操作を施せば，

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^* x_t^*}{\sum_{t=1}^n (y_t^*)^2}$$

となる．両者を掛け合わせれば，

$$\widehat{\beta\theta} = \frac{(\sum_{t=1}^n y_t^* x_t^*)^2}{\sum_{t=1}^n (x_t^*)^2 \sum_{t=1}^n (y_t^*)^2}$$

となり，これは偏相関係数の平方である．

$$\sqrt{1.66\times 0.24} = 0.63$$

3.3

問題に間違いあり．残差と回帰値が逆でした．正規方程式により，残差を RES と記すと

$$\sum_{t=1}^{n} RES_t = 0$$
$$\sum_{t=1}^{n} RES_t \times x_t = 0$$
$$\sum_{t=1}^{n} RES_t \times z_t = 0$$

となることを使う．

3.4

残差を RES と記すと

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} RES_i^2 &= \sum_{t=1}^{n} RES_i(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}x_i - \widehat{\gamma}z_i) \\ &= \sum_{t=1}^{n} RES_i y_i - \widehat{\alpha}\sum_{t=1}^{n} RES_i - \widehat{\beta}\sum_{t=1}^{n} RES_i x_i - \widehat{\gamma}\sum_{t=1}^{n} RES_i z_i\end{aligned}$$

となるが，さらに正規方程式を個々の項に当てはめれば $\sum_{t=1}^{n} RES_i y_i$ だけが残る．

$$\sum_{t=1}^{n} RES_i y_i = \sum_{t=1}^{n}(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}x_i - \widehat{\gamma}z_i)y_i$$

この積和を展開して求める．

3.5

Φ に

$$\widehat{\alpha} = \overline{y} - \widehat{\beta}\overline{x} - \widehat{\gamma}\overline{z}$$

を代入するだけ．Φ の中身は，回帰式

$$y_i - \overline{y} = \widehat{\beta}(x_i - \overline{x}) + \widehat{\gamma}(z_i - \overline{z}) + error$$

の最小 2 乗推定に対応している．ここで，$(x_i - \overline{x})$ を $(z_i - \overline{z})$ に回帰した残差変数を作る．これは人工的な回帰式

$$(x_i - \overline{x}) = \delta(z_i - \overline{z}) + error$$

を考え，δ を最小 2 乗推定して残差を求めればよい．つまり，

$$\sum_{t=1}^{n}\{(x_i-\overline{x})-\widehat{\delta}(z_i-\overline{z})\}^2 \qquad (**)$$

を，$\widehat{\delta}$ に関して最小化し，

$$x_i^{**}=(x_i-\overline{x})-\widehat{\delta}(z_i-\overline{z})$$

とする．他方，元の回帰式における x_i^* は，

$$\sum_{t=1}^{n}(x_i-\widehat{c}-\widehat{\zeta}z_i)^2 \qquad (*)$$

を最小化するように，$\widehat{c}$ と $\widehat{\zeta}$ を求め，残差を導く．ところが，$\widehat{\zeta}$ を所与として，$\widehat{c}$ について最小化の条件を求めると，

$$\widehat{c}=\overline{x}-\widehat{\zeta}\overline{z}$$

となるから，これを $(*)$ に代入すると $(**)$ と同じ式になる．

4　多変数の回帰

最初に式の間違いを示します．152 頁の (4.82) 式，
一行目右端の $\widehat{\beta}_K$，
二行目左端の $\widehat{\beta}_K$，
三行目左端の $\widehat{\beta}_K$，
は除いてください．

4.1

手計算の問題．x の和が 0 なので，定数項は y の平均に等しい．

	y	y^2	x	x^2	xy
	0	0	-2	4	0
	3	9	-1	1	-3
	8	64	3	9	24
sum	11	73	0	14	21

後は，公式にあわせて計算する．

$$y=3.6(5.9)+1.5(5.2)x, R^2=0.96, RSS=1.17, ESS=31.5$$

4.2

各変数の和が０，また x と z の積和も０になっていることに注意．このような場合は，正規方程式にデータを直接代入すると，簡単に推定結果を求めることができる．y,x,z の分散共分散行列は

	y	x	z
y	5/2	21/4	3/4
x	21/4	23/2	0
z	3/4	0	53/2

,

小数点表示の推定結果は,

$$y = 0.45652(0.08446)x + 0.02830(0.05564)z.$$

ただし，括弧内は標準誤差．t 値は 5.41，0.51 となる．決定係 b は，0.9672，自由度調整済み決定係数は，0.9016．係数に関する t 検定では，自由度が１であるので，両側 5% の境界値は 12.71 になり，係数は，いずれも有意にならない．

4.3

観測個数２７，K=６，K-1=5，DW=1.8，だから，5% の検定では U=1.86，L=1.0 くらいになる．したがって，U を境界値とすれば，系列相関がないという帰無仮説は棄却されるが，L に拠れば，帰無仮説は棄却されない．数値は U に近いので，系列相関は問題にしなくてよいだろう．F 検定は,

$$f = \frac{6-3}{21-6}\frac{0.88-0.660}{0.660} = 0.066$$

あるいは,

$$f = \frac{6-3}{21-6}\frac{0.955-0.94}{1-0.955} = 0.066$$

と計算できる．F 分布表より，自由度 3，１４の 5% 点は 3.34，自由度 3，16 の 5% 点は 3.24 だから，自由度 3，１５の 5% 点は 3.20 位と考えられ，3 個の追加変数の係数が０であるという帰無仮説は棄却できないことがわかる．

4.4

データは章末ではなく，118 頁でした．log(L) の係数を b，log(K) の係数を c とすれば，b+c=1+d, b=1+d-c, ですから，回帰式は

$$\log Y - \log L = a + d\log L + c\{\log K - \log L\} + e\log H4 + error$$

となります．あるいは,

$$\log(Y/L) = a + d\log L + c\log(K/L) + e\log H4 + error$$

となります．元の変数より $\log(Y/L)$ と $\log(K/L)$ を作成し，推定すると，

$\widehat{\log(Y/L)} = 2.01 + 0.045(4.73)\log L + 0.31(7.74)\log(K/L) + 0.16(6.12)\log H4$,

$R^2 = 0.9119, RSS = 0.05380$, となります．括弧の中は t 値．従って，$d$ が 0 であるという帰無仮説は棄却されます．あるいは，収穫不変の法則は成立していません．しかし，d は正ですね．したがって，収穫逓増になり，意味はおかしくなります．

4.5

回帰式を

$$y_i = a + bx_i + error$$

として，最小 2 乗推定を行う．$\overline{x} = (x_1 + x_2)/2$ だから，

$$\begin{aligned}&(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2\\&= \frac{(x_1 - x_2)^2}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x_1 - \overline{x})y_1 + (x_2 - \overline{x})y_2\\&= \frac{(x_1 - x_2)}{2}y_1 + \frac{(x_2 - x_1)}{2}y_2\\&= \frac{(x_1 - x_2)}{2}(y_1 - y_2)\end{aligned}$$

となるから，

$$\widehat{b} = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}$$

となる．この勾配は，二点を通る直線の勾配に等しい．

この勾配を持つ直線の一次式は

$$y = c + \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}x$$

であるから，c は

$$y_1 = c + \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}x_1$$

あるいは

$$y_2 = c + \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}x_2$$

のいずれかで定めればよい．この二式より，最小 2 乗法での公式,

$$\widehat{c} = \overline{y} - \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}\overline{x}$$

が導かれる．これも正規方程式から求まる答えと一致する．

4.6

回帰値は (4.15) 式で定義される．また，正規方程式は (4.5) 式で与えられている．もし，m 番目の説明変数が定数項ならば，

$$x_{mi} = 1$$

だから，(4.5) 式は

$$\sum_{i=1}^{n} \{y_i - (\widehat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \widehat{\beta}_K x_{Ki})\} = 0$$

となるが，これは，

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i) = 0$$

に等しい．したがって，

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \widehat{y}_i$$

となり，両辺を n で割れば平均になる．注意することは，左辺は観測値の平均であり，右辺は，計算された値の平均であること．

4.7

これも，単回帰の性質の一般化．正規方程式は (4.5) 式より，

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i) x_{mi} = 0$$

となる．これは残差と説明変数の直交性を示す．最小 2 乗推定量は，この条件を満たすように，定められている．

4.8

$$\widehat{y}_i = \widehat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \widehat{\beta}_K x_{Ki}$$

だから，正規方程式は (4.5) 式より，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i)\widehat{y}_i &= \widehat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i) x_{1i} + \cdots + \widehat{\beta}_K \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i) x_{Ki} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．だから，

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\widehat{y}_i)\widehat{y}_i=\sum_{i=1}^{n}y_i\widehat{y}_i-\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i)^2=0,$$

あるいは

$$\sum_{i=1}^{n}y_i\widehat{y}_i=\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i)^2.$$

両辺から，$n(\overline{y})^2$ を引くと，$\sum_{i=1}^{n}y_i=\sum_{i=1}^{n}\widehat{y}_i$ だから，

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(\widehat{y}_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i-\overline{y})^2.$$

したがって，相関係数の分子は，

$$\pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i-\overline{y})^2}$$

となる．

4.9

最小 2 乗法の原則により

$$\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(\widehat{\beta}_1x_{1i}+\cdots+\widehat{\beta}_Kx_{Ki})\}^2$$

を最小にするように，推定量 $\widehat{\beta}_1,\cdots,\widehat{\beta}_K$ を定めればよい．たとえば，変数 x_{1i}, x_{2i} がダミーであり，各々k 番目と l 番目の観測値で 1，他の観測値で 0 値をとるとする．この場合，上記の 2 乗和は，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1,i\neq m,i\neq l}^{n}\{y_i-(\widehat{\beta}_1x_{1i}+\cdots+\widehat{\beta}_Kx_{Ki})\}^2\\&+\{y_m-(\widehat{\beta}_1x_{1m}+\widehat{\beta}_2x_{2m}+\cdots+\widehat{\beta}_Kx_{Km})\}^2\\&+\{y_l-(\widehat{\beta}_1x_{1l}+\widehat{\beta}_2x_{2m}+\cdots+\widehat{\beta}_Kx_{Kl})\}^2\end{aligned}$$

と分解できる．しかし，第二項では，$x_{1l}=1,x_{2m}=0,$ 第三項では $x_{1l}=0,x_{2m}=1,$ 第一項では $x_{1l}=0,x_{2m}=0,$ だから，2 乗和は

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1,i\neq m,i\neq l}^{n}\{y_i-(\widehat{\beta}_3x_{3i}+\cdots+\widehat{\beta}_Kx_{Ki})\}^2\\&+\{y_m-(\widehat{\beta}_1+\widehat{\beta}_3x_{3m}+\cdots+\widehat{\beta}_Kx_{Km})\}^2\\&+\{y_l-(\widehat{\beta}_2+\widehat{\beta}_3x_{3l}+\cdots+\widehat{\beta}_Kx_{Kl})\}^2\end{aligned}$$

となっている．明らかなように，$\widehat{\beta}_3$ から $\widehat{\beta}_K$ までは第一項の最小化により推定量が求まる．また，第二項より，$\widehat{\beta}_1$ が求まる．同様，第三項より $\widehat{\beta}_2$ が求まる．明らかだが，

$$\widehat{\beta}_1 = y_m - (\widehat{\beta}_3 x_{3m} + \cdots + \widehat{\beta}_K x_{Km})$$

$$\widehat{\beta}_2 = y_l - (\widehat{\beta}_3 x_{3l} + \cdots + \widehat{\beta}_K x_{Kl})$$

となる．

4.10

b=c，d=1 の検定だから，

$$b - c = e$$

$$d - 1 = f$$

とおく．あるいは，

$$b = c + e$$

$$d = 1 + f$$

と表記し，b と d を右辺に置き換え，回帰式を書き直すと

$$y_t = a + ex_t + c(x_t + z_t) + z_t + fz_t + u_t$$

となるから，を左辺に移し，

$$(y_t - z_t) = a + ex_t + c(x_t + z_t) + fz_t + u_t$$

と新しい式を作る．この式において，

$$e = 0, f = 0$$

を検定すればよい．これは，通常の F 検定である．帰無仮説の下での回帰式は

$$(y_t - z_t) = a + c(x_t + z_t) + u_t$$

である．

第二の方法として，問題文中の元の式を推定し，制約を入れて得た式，

$$(y_t - z_t) = a + c(x_t + z_t) + u_t$$

を推定し，両者の残差 2 乗和から，F 検定を行ってもよい．結果は同じである．

4.11

この問題は，多少上級．

$$V(b-c)=V(b)+V(c)-2Cov(b,c)$$

だから，t 統計量は

$$\frac{b-c}{\sqrt{V(b)+V(c)-2Cov(b,c)}}$$

となる．ここで分母および分子を推定値に置き換える．

$$t=\frac{0.65-0.44}{\sqrt{0.26^2+0.20^2-2(-0.0075)}}=0.6$$

となるから，5% の検定では，通常に自由度では帰無仮説は棄却できない．

5　誤差項の諸問題

5.1

1.1　所得，ラグ付き所得 Y_{-1}，流動性資産，はいずれも正の効果を持つ．利子率は負の効果を示し，利子が高くなると消費が減少する結果となっている．t 値は，所得に関しては有意，ラグ付き所得は有意でない．流動性資産は有意，利子率は有意でない．従って，ラグ付き所得および利子率について，工夫が必要．たとえば，ラグ付き所得を除いた式を推定してみる．

限界消費性向は 0.58 だが，ラグ付き所得を含んだ長期消費性向は 0.79 で，1 より小．これは常識に合う．ラグ付き所得を除いた式を推定する場合は，限界消費性向がどうなるか，また，利子率の係数がどうなるかなどに注意を払わないといけない．

1.2　n=25，K=5，k=4，だから，5% の検定では L=1.04,U=1.77 位になる．DW は 1.7 だから，L によれば系列相関がないという帰無仮説は棄却できない．実際の境界値は未知だが，L を基準と考えて，系列相関は無いとする．

1.3

$$r=1-\frac{dw}{2}=0.15.$$

1.4

$$0.8=1-\frac{270}{TSS}$$

を解くと，TSS=1350.

1.5

$$f=\frac{25-5}{4}\frac{0.8}{1-0.8}=20$$

となる．自由度が 4,20 の F 分布表より 1% 点は 4.43 であるから，全ての係数は 0 であるという帰無仮説は棄却される．

1.6　公式通りに計算する．

5.2

問題最後の括弧内,「2.1 と結果が同じになる。ここでは最小 2 乗推定の結果も一致する」というコメントは間違っていました.

y	x	変換 $y = y^*$	変換 $x = x^*$	$y^* \times x^*$	$(x^*)^2$
2	16	$\sqrt{1-(1/4)} \times 2 = \sqrt{3}$	$\sqrt{1-(1/4)} \times 16 = 8\sqrt{3}$	24	192
4	10	$4 - 0.5 \times 2 = 3$	$10 - 0.5 \times 16 = 2$	6	4
6	4	$6 - 0.5 \times 4 = 4$	$4 - 0.5 \times 10 = -1$	-4	1
和		$7+\sqrt{3}$	$1+8\sqrt{3}$	26	197

2.1 図を書いてみればわかるが，変換された二個の観測値 $(2,3), (-1,4)$ に関する回帰式は，勾配は，-1/3，となる．直線は座標 (2,3) を通るから，定数項は

$$3 = a + \frac{-1}{3} \times 2$$

を満たす．したがって，a=11/3．最小 2 乗法の公式通りに計算してもよい．

2.2

$$b = \frac{26 - (7+\sqrt{3})(1+8\sqrt{3})/3}{197 - (1+8\sqrt{3})^2/3} = -0.13969$$

$$a = \frac{7+\sqrt{3}}{3} + 0.13969 \times \frac{1+8\sqrt{3}}{3} = 3.6024$$

このような操作をしない，最小 2 乗推定の結果は

$$y = \frac{22}{3} - \frac{1}{3}x, RSS = 0$$

となる。

5.3

3.1

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(a + bx_t + u_t) \\ &= a + bx_t + E(u_t) \\ &= a + bx_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(y_t) &= E\{(a + bx_t + u_t) - E(a + bx_t + u_t)\}^2 \\ &= E\{(a + bx_t + u_t) - (a + bx_t)\}^2 \\ &= E(u_t)^2 \\ &= V(u_t) \end{aligned}$$

だから，t が 1,2 なら分散は４，t が 3 なら分散は１.

3.2

y	x	y/σ	x/σ	x*y*	x*^{2}	y*^{2}
2	14	1	7	7	49	1
4	10	2	5	10	25	4
6	4	6	4	24	16	36
	sum	9	16	41	90	41

$$b = \frac{41 - 9 \times 16/3}{90 - 16 \times 16/3} = -1.5$$

$$a^* = \frac{a}{2} = 3 - (-1.5) \times 16/3 = 11$$

だから，元の定数項は 22.

3.3　変換した式は,

$$y_t^* = a^* + bx_t^* + u_t^*$$

だが，制約は,

$$a^* = b$$

である．したがって，制約の下での回帰式は

$$y_t^* = b(1 + x_t^*) + u_t^*$$

となる．この回帰式を最小 2 乗推定すればよい.

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum(1 + x_t^*)y_t^*}{\sum(1 + x_t^*)^2} \\ &= \frac{\sum y_t^* + \sum x_t^* y_t^*}{3 + 2\sum x_t^* + \sum x_t^{*2}} \\ &= \frac{9 + 41}{3 + 2 \times 16 + 90} = 0.4 \end{aligned}$$

となる．a=0.8.

3.4　残差平方和を計算すればよい.

$$\begin{aligned} RSS_a &= \sum(y_t^*)^2 - a\sum y_t^* - b\sum x_t^* y_t^* \\ &= 41 - (11) \times 9 - (-1.5) \times 41 = 3.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RSS_0 &= \sum(y_t^*)^2 - b\sum(1 + x_t^*)y_t^* \\ &= 41 - (0.4) \times (41 + 9) = 21 \end{aligned}$$

だから，

$$f = \frac{3-2}{1}\frac{21}{3.5} = 6$$

帰無仮説の下での分布は，自由度が 1,1 の F 分布．この 5% 点は付表に無い．自由度が 1 の t 分布では，3.8 であるから，この 2 乗値は 14.44．これが境界値だから，帰無仮説は，棄却できない．

同様の検定を，t 統計量を用いて行う．

$$a^* = b + d$$

とすると，帰無仮説は d=0．回帰式は

$$y_t^* = d + b(1 + x_t^*) + u_t^*$$

だから，この式を最小 2 乗法で推定し，d に関する t 検定を行う．

6　発展した分析法

6.1

回帰式は

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

だが，係数はアーモン分布ラグに従う。問題で述べられたように，

$$\beta_0 = \gamma_0$$

$$\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1$$

$$\beta_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1$$

であるから，元々の 3β 係数が，2 個の γ 係数に減少している。したがって，制約は１。だから，3β 係数の内１個は，他の β 係数で表現することができる。例えば，β_2 を β_0 と β_1 で書くと，

$$\gamma_1 = \beta_1 - \beta_0$$

$$\gamma_1 = \beta_2 - \beta_1$$

だから，

$$\beta_2 - \beta_1 = \beta_1 - \beta_0$$

となり，

$$\beta_2 = 2\beta_1 - \beta_0$$

は明らか。P=3，q=2 だと，

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + \varepsilon_t$$

$$\beta_0 = \gamma_0$$

$$\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\beta_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2$$

$$\beta_3 = \gamma_0 + 3\gamma_1 + 9\gamma_2$$

だから，やはり，制約は 1。したがって，4β 係数の内の 1 個を，他の 3β 係数で表現することができる。例えば

$$\beta_1 - \beta_0 = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\beta_2 - \beta_1 = \gamma_1 + 3\gamma_2$$

$$\beta_3 - \beta_2 = \gamma_1 + 5\gamma_2$$

となるから，

$$(\beta_2 - \beta_1) - (\beta_1 - \beta_0) = 2\gamma_2$$

$$(\beta_3 - \beta_2) - (\beta_2 - \beta_1) = 2\gamma_2$$

となり，

$$(\beta_3 - \beta_2) - (\beta_2 - \beta_1) = (\beta_2 - \beta_1) - (\beta_1 - \beta_0)$$

が成立する。

6.2

回帰式は

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \varepsilon_t,$$

制約は，

$$\beta_0 = \gamma_0$$

$$\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1$$

$$\beta_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1$$

さらに，端点制約は

$$\beta_{-1} = \gamma_0 - \gamma_1 = 0$$

この制約は，実際は

$$\gamma_0 = \gamma_1$$

という意味がある。したがって，

$$\beta_0 = \gamma_0$$

$$\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1 = 2\beta_0$$

$$\beta_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1 = 3\beta_0$$

となり，回帰式は

$$y_t = \alpha + \beta_0(x_t + 2x_{t-1} + 3x_{t-2}) + \varepsilon_t,$$

と簡略化できる。

6.3

アーモン分布ラグモデルの推定。

6.4

二項選択モデルの推定。

6.5

三項選択モデルの推定。

6.6

トービット 2 モデルの推定。

6.7

パネル回帰の推定。

6.8

SUR モデルの推定。

6.9

単一方程式法の練習。

6.10

システム推定法の練習。

6.11

次数条件は明らか。回数条件は，第 1 行は排除された変数のリスト，

第 1 列を投資以外の内生変数のリストとして，

	W	$trend$	tax	W_g	G	X_{-1}	C	W_p	X
P	0	0	-1	0	0	0	0	0	1
W	0	0	0	1	0	0	0	1	0
C	α_3	0	0	0	0	0	-1	0	0
W_p	0	γ_3	0	0	0	γ_2	0	-1	γ_1
X	0	0	0	0	1	1	1	0	-1

となる。最初の 5 列を見れば，要素は 1 個ずつしかなく，ランクは明らかに 5 であるから，階数条件は満たされる。

7　統計分析の基礎

本文中で入れるべきであった，中心極限定理の利用についての例題を追加します。

[中心極限定理の例 1]

母分布は (0,1) 区間の一様分布とする。観測個数が 12 の無作為標本を元に，確率

$$P(\frac{1}{3} < \overline{X} < \frac{2}{3})$$

を求める。例 7.1 により，母分布の平均と分散は 1/2，1/12 となる。ここで中心極限定理も使うために，標本平均を標準化する。

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{3} < \overline{X} < \frac{2}{3}) &= P\{\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}) < \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}(\overline{X}-\frac{1}{2}) < \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})\} \\ &= P\{-12\frac{1}{6} < Z < 12\frac{1}{6}\} \\ &= P\{-2 < Z < 2\} \\ &\fallingdotseq 0.05 \end{aligned}$$

最後の確率は，付表 2 から求めているが，大まかな近似に過ぎない。このように，標本平均 $\overline{X}$ がある区間 (a,b) に入る確率は，本来求めることが非常に難しいが，中心極限定理により，標準正規分布表を用いて近似することができる。より精密

な分布表を使えば，この近似は 0.0454 となる。観測個数 12 は計算を簡単にするために選んだもので，中心極限定理の応用には多少少ない。

[中心極限定理の例 2]

パレート分布を母分布とし，無作為標本の観測個数は 8，α=4 とする。

$$P(m < \overline{X} < 2m)$$

を求めよう。この確率は，標本平均が，最低所得以上で，最低所得の二倍以下になる確率である。パレート分布の平均と分散を計算すると，

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_m^\infty x \cdot \alpha m^\alpha x^{-\alpha-1} dx \\ &= \int_m^\infty \alpha m^\alpha x^{-\alpha} dx \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} m \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_m^\infty x^2 \cdot \alpha m^\alpha x^{-\alpha-1} dx \\ &= \int_m^\infty \alpha m^\alpha x^{1-\alpha} dx \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-2} m^2 \end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{\alpha}{\alpha-2} m^2 - (\frac{\alpha}{\alpha-1} m)^2 \\ &= \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} m^2. \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} &P(m < \overline{X} < m + \frac{m}{2}) \\ &\quad = P(m - \frac{\alpha}{\alpha-1} m < \overline{X} - \frac{\alpha}{\alpha-1} m < \frac{m}{2} + m - \frac{\alpha}{\alpha-1} m) \\ &\quad = P(-\frac{1}{\alpha-1} m < \overline{X} - \frac{\alpha}{\alpha-1} m < \frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)} m) \\ &\quad = P(\sqrt{n}(-\frac{1}{\alpha-1} m) \bullet \frac{(\alpha-1)\sqrt{(\alpha-2)}}{m\sqrt{\alpha}} < Z < \sqrt{n} \frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)} m \bullet \frac{(\alpha-1)\sqrt{(\alpha-2)}}{m\sqrt{\alpha}}) \\ &\quad = P(-\sqrt{n} \bullet \frac{\sqrt{(\alpha-2)}}{\sqrt{\alpha}} < Z < \sqrt{n}(\alpha-2) \bullet \frac{\sqrt{(\alpha-2)}}{2\sqrt{\alpha}}) \end{aligned}$$

となる。この不等式は m に依存しない。ここで数値を代入すると，

$$\begin{aligned} &= P(-2\sqrt{2} \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} < Z < 2\sqrt{2} \bullet 2\frac{\sqrt{2}}{4}) \\ &= P(-2 < Z < 2) \end{aligned}$$

となり，ほぼ 95 パーセントと計算できる。

7.1

このような確率変数を $\overline{X}, \overline{Y}$ とする．この二つの確率変数は独立に分布するから，同時確率関数を表で書くと，

確率	$\overline{X} = -1$	0	1
$\overline{Y} = -1$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{81}$
0	$\frac{4}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$
1	$\frac{4}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$

Z の値	$\overline{X} = -1$	0	1
$\overline{Y} = -1$	-1	-0.5	0
0	-0.5	0	0.5
1	0	0.5	1

とまとめることができる．だから，

$$P(Z = -1) = \frac{1}{81},$$

$$P(Z = -0.5) = \frac{8}{81},$$

$$P(Z = 0) = \frac{24}{81},$$

$$P(Z = 0.5) = \frac{32}{81},$$

$$P(Z = 1) = \frac{16}{81}$$

となる．平均，分散は明らか．

7.2

ちょっと，難し過ぎたかもしれません．n=3 のケースを考える．X の積は，-1 か 1 しかとらない．-1 が 3 回の確率は $(\frac{1}{3})^3$, -1 が 2 回の確率は $3(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})$, -1 が 1 回の時は $3(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^2$, -1 が 0 回の確率は $(\frac{2}{3})^3$, となる．したがって，平均は

$$\begin{aligned}
E(Z) &= -(\frac{1}{3})^3 + 3(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3}) - 3(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 \\
&= (-\frac{1}{3})^3 + 3(-\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3}) + 3(-\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 \\
&= ((-\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3}))^3 \\
&= (\frac{1}{3})^3
\end{aligned}$$

二乗の期待値は

$$\begin{aligned}E(Z^2) &= (\frac{1}{3})^3 + 3(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3}) + 3(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 \\ &= ((\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3}))^3 \\ &= (1)^3 = 1\end{aligned}$$

そして分散は

$$\begin{aligned}V(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 \\ &= 1 - (\frac{1}{3})^6\end{aligned}$$

となる。この計算は，一般化でき

$$E(Z) = (\frac{1}{3})^n$$

$$V(Z) = 1 - (\frac{1}{3})^n$$

となる。

7.3

x が $\sqrt{2}$ までの三角形，面積は 1 となる．平均は

$$E(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x \times x dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

二乗の期待値は

$$E(X^2) = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \times x dx = 1$$

となるから，分散は

$$V(X) = 1 - (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 = \frac{1}{9}$$

となる。

7.4

P(-1)=1/3,P(1)=2/3. 無作為標本を $\{X_1,X_2,X_3\}$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{3-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2\} \\
&= \frac{1}{2}\{X_1^2+X_2^2+X_3^2-3\overline{X}^2\}
\end{aligned}
$$

だから,

1. 全て-1 なら，数値を代入して計算し，$s^2=0$, 確率は，$(\frac{1}{3})^3$.
2. 1 個 1，2 個-1 なら，$s^2=\frac{4}{3}$, 確率は組み合わせを考慮して，$3(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})$.
3. 2 個 1，1 個-1 なら，$s^2=\frac{4}{3}$, 確率は組み合わせを考慮して，$3(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})$.
4. 全て 1 なら，$s^2=0$, 確率は，$(\frac{2}{3})^3$.

だから，s^2 は 0 と $\frac{4}{3}$ のは 2 値しか取らず,
$s^2=0$, 確率は，$(\frac{1}{3})^3+(\frac{2}{3})^3=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$.
$s^2=\frac{4}{3}$, 確率は，$3(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})+3(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$.
平均は，$\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$.

7.5

事象毎に $\overline{X}$ と s^2 の結果をまとめると,

事象	確率	$\overline{X}$	s^2
(-1,-1)	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	-1	0
(-1,1) or (1,-1)	$\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$	0	2
(1,1)	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$	1	0

となる。次に，$\overline{X}$ と s^2 の分布表を作ると,

	$\overline{X}=-1$	$\overline{X}=0$	$\overline{X}=1$	s^2
$s^2=0$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$
$s^2=2$	0	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
$\overline{X}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

周辺確率の積は同時確率に一致しないから，$\overline{X}$ と s^2 は独立には分布していない。平均を求めると,

$$E(\overline{X})=(-1)\times\frac{1}{9}+0\times\frac{4}{9}+(1)\times\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$$

$$E(s^2)=0\times\frac{5}{9}+(2)\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$$

となる。同様に計算すると，積の期待値は

$$E(\overline{X}\times s^2)=0.$$

したがって，共分散は,

$$Cov(\overline{X},s^2)=-\frac{1}{3}\times\frac{8}{9}=\frac{-8}{27}.$$

7.6

周辺確率と，同時確率が矛盾しないように決める。同じ行動を取るなら，

	A=生協	A=以外	B
B=生協	0.5	0	0.5
B=以外	0	0.5	0.5
A	0.5	0.5	1

全く逆の行動なら，

	A=生協	A=以外	B
B=生協	0	0.5	0.5
B=以外	0.5	0	0.5
A	0.5	0.5	1

よく似た行動の例としては，

	A=生協	A=以外	B
B=生協	0.4	0.1	0.5
B=以外	0.1	0.4	0.5
A	0.5	0.5	1

ほぼ逆の行動は

	A=生協	A=以外	B
B=生協	0.1	0.4	0.5
B=以外	0.4	0.1	0.5
A	0.5	0.5	1

独立な場合は簡単で，周辺確率の積を求め

	A=生協	A=以外	B
B=生協	0.25	0.25	0.5
B=以外	0.25	0.25	0.5
A	0.5	0.5	1

7.7

Z=XY の確率関数は，

Z	0	1	2	4
P	$\frac{1}{15}+2\frac{4}{15}+2\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$	$\frac{4}{15}$	0+0	0

となる。Z の確率関数は

Z	0	1
P	$\frac{11}{15}$	$\frac{4}{15}$

と等しい。したがって，大きさが 3 の無作為標本であると，

1. V=0，確率は，$(\frac{11}{15})^3$.
2. V=1，確率は，$3(\frac{11}{15})^2(\frac{4}{15})$.
3. V=2，確率は，$3(\frac{11}{15})(\frac{4}{15})^2$.
4. V=3，確率は，$(\frac{4}{15})^3$.

7.8

事象毎に $\overline{X}$ と s^2 の結果をまとめると，

事象	確率	$\overline{X}$	s^2
(-1,-1,-1)	$\frac{1}{27}$	-1	0
(-1,-1,1)	$3\times\frac{2}{27}=\frac{6}{27}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
(-1,1,1)	$3\times\frac{4}{27}=\frac{12}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
(1,1,1)	$\frac{8}{27}$	1	0

となる。次に，$\overline{X}$ と s^2 の分布表を作ると，

	$\overline{X}=-1$	$\overline{X}=\frac{-1}{3}$	$\overline{X}=\frac{1}{3}$	$\overline{X}=1$	s^2
$s^2=0$	$\frac{1}{27}$	0	0	$\frac{8}{27}$	$\frac{9}{27}$
$s^2=\frac{4}{3}$	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	0	$\frac{18}{27}$
$\overline{X}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

周辺確率の積は同時確率に一致しないから，$\overline{X}$ と s^2 は独立には分布していない。以下，同様。