工科のための確率・統計（数理工学社）

大鑄史男・著
名古屋工業大学おもひ領域

1 章の問題解答

1 (1) $\{5,6\}$ (2) $\{1,2,3\}$ (3) $\{1,3,5\}$ (4) $\{4,6\}$ (5) $\{1,3\}$ (6) $\{2,3,4,5,6\}$
(7) $\{1,2,3,4,5\}$

2 (1) $\boldsymbol{P}\{5,6\}=\frac{1}{3}$, $\boldsymbol{P}\{1,2,3\}=\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}\{1,3,5\}=\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}\{4,6\}=\frac{1}{3}$,
$\boldsymbol{P}\{1,3\}=\frac{1}{3}$, $\boldsymbol{P}\{2,3,4,5,6\}=\frac{5}{6}$, $\boldsymbol{P}\{1,2,3,4,5\}=\frac{5}{6}$
(2) (1) と同じ
(3) $\boldsymbol{P}\{5,6\}=\frac{1}{4}$, $\boldsymbol{P}\{1,2,3\}=\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}\{1,3,5\}=\frac{8}{15}$, $\boldsymbol{P}\{4,6\}=\frac{5}{12}$,
$\boldsymbol{P}\{1,3\}=\frac{9}{20}$, $\boldsymbol{P}\{2,3,4,5,6\}=\frac{3}{4}$, $\boldsymbol{P}\{1,2,3,4,5\}=\frac{5}{6}$

3 (1) $1-(p_{(1,1)}+p_{(1,3)}+p_{(1,5)}+p_{(3,1)}+p_{(3,3)}+p_{(3,5)}+p_{(5,1)}+p_{(5,3)}+p_{(5,5)})$

$$\left\{\begin{array}{l}(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{array}\right\}$$

(2) $p_{(1,2)}+p_{(1,4)}+p_{(1,6)}+p_{(3,2)}+p_{(3,4)}+p_{(3,6)}+p_{(5,2)}+p_{(5,4)}+p_{(5,6)}$

$$\{\ (1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\ \}$$

(3) $p_{(2,1)}+p_{(2,3)}+p_{(2,5)}+p_{(4,1)}+p_{(4,3)}+p_{(4,5)}+p_{(6,1)}+p_{(6,2)}+p_{(6,4)}$

$$\{\ (2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\ \}$$

(4) $p_{(1,3)}+p_{(2,2)}+p_{(3,1)}$, $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

4 (1) $\{(2,1,4),(2,3,4),(2,5,4),(4,1,4),(4,3,4),(4,5,4),(6,1,4),(6,3,4),(6,5,4)\}$
(2)

$$\left\{\begin{array}{l}(1,1,4),(1,2,3),(1,3,2),(1,4,1),(2,1,3),(2,2,2),(2,3,1),\\(3,1,2),(3,2,1),(4,1,1)\end{array}\right\}$$

(3) 【問題訂正】3 つのさいころの目の和が 6 より小である事象.

$$\left\{\begin{array}{l}(1,1,3),(1,2,2),(1,3,1),(2,1,2),(2,2,1),(3,1,1),\\(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(1,1,1)\end{array}\right\}$$

5 (1) $\frac{3}{36}+\frac{12}{18}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$

$$\left\{\begin{array}{l}[1,2],[1,4],[1,6],[2,2],[2,3],[2,4],[2,5],[2,6],\\{}[3,4],[3,6],[4,4],[4,5],[4,6],[5,6],[6,6]\end{array}\right\}$$

(2) $\frac{3}{36}+\frac{3}{18}=\frac{1}{4}$, $\{[2,2],[2,4],[2,6],[4,4],[4,6],[6,6]\}$
(3) $\frac{1}{36}+\frac{5}{18}=\frac{11}{36}$, $\{[1,3],[2,3],[3,3],[3,4],[3,5],[3,6]\}$

6 (1) $\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$
(2) $p_{(1,0)}=(p_1)^1(1-p_1)^{1-1}(p_2)^0(1-p_2)^{1-0}=p_1(1-p_2)$
(3) $\{(1,1),(1,0)\}$, p_1 (4) $\{(1,0),(0,0)\}$, $1-p_2$ (5) $\{(1,0)\}$, $p_1(1-p_2)$

7 (1) p, $\{(1,\omega_2,\cdots,\omega_n)|\omega_i=0$ または $1,\ i=2,\cdots,n\}$
(2) $p(1-p)$, $\{(1,0,\omega_3,\cdots,\omega_n)|\omega_i=0$ または $1,\ i=3,4,\cdots,n\}$
(3) p, $\{(\omega_1,\cdots,\omega_{n-1},1)|\omega_i=0$ または $1,\ i=1,\cdots,n-1\}$
(4) $(1-p)p$, $\{(\omega_1,\cdots,\omega_{n-2},0,1)|\omega_i=0$ または $1,\ i=1,\cdots,n-2\}$
(5) $(1-p)p$, $\{(0,1,\omega_3,\cdots,\omega_n)|\ \omega_i=0$ または $1,\ i=3,4,\cdots,n\}$
(6) $(1-p)^2p$, $\{(0,0,1,\omega_4,\cdots,\omega_n)|\omega_i=0$ または $1,\ i=4,\cdots,n\}$
(7) $(1-p)^{k-1}p$, $\{(0,\cdots,0,1,\omega_{k+1},\cdots,\omega_n)|\omega_i=0$ または $1,\ i=k+1,\cdots,n\}$

8 $p_{(\omega_1,\cdots,\omega_n)}$ が $\omega_1+\cdots+\omega_n$ の和にのみ依存していることに注意します．$\sum_{i=1}^n \omega_i = k$ であるような $(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ は $\binom{n}{k}$ 個あり，したがって求める確率は $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$． $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=1$ は，二項展開より明らかです．

9 (1) e^x の Taylor 展開より $e^\lambda = \sum_{i=0}^\infty \frac{\lambda^i}{i!}$．したがって $\sum_{i=0}^\infty p_i = e^{-\lambda}e^\lambda = 1$.

(2) $e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}+\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{2+2\lambda+\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$

10 (1) 等比級数の和の計算を行えば，$\sum_{i=1}^\infty p(1-p)^{i-1} = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$.

(2) $A=\{1,2\}$,　$\boldsymbol{P}(A) = p+p(1-p) = 2p-p^2$

(3) $B=\{3,4,5,\cdots\}$,　$\boldsymbol{P}(B) = 1-\boldsymbol{P}(A) = 1-2p+p^2 = (1-p)^2$

2 章の問題解答

1 (1) $[3,+\infty)$,　(2) $[-2,6]$,　(3) $(-\infty,-3]\cup[7,+\infty)$,　(4) $[-2,3]\cup[8,12]$

2 (1) $\boldsymbol{P}([3,+\infty)) = \int_3^{-\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-3\lambda}$,

$\boldsymbol{P}([-2,6]) = \int_0^6 \lambda e^{-\lambda x}dx = 1-e^{-6\lambda}$,

$\boldsymbol{P}((-\infty,-3]\cup[7,+\infty)) = \int_7^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-7\lambda}$,

$\boldsymbol{P}([-2,3]\cup[8,12)) = \int_0^3 \lambda e^{-\lambda x}dx + \int_8^{12}\lambda e^{-\lambda x}dx = 1-e^{-3\lambda}+e^{-8\lambda}-e^{-12\lambda}$

(2) $\boldsymbol{P}([0,x]) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx = 1-e^{-\lambda x}$,　　$\boldsymbol{P}((x,\infty)) = \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda x}$

3 $f(x)$ を $[0,1]$ 上の一様密度関数として，$\boldsymbol{P}([0.5,2]) = \int_{0.5}^2 f(x)dx = \int_{0.5}^1 1dx = 0.5$

4 (1) $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_0^9 ax^2dx = a\frac{9^3}{3} = 1$ より $a=\frac{1}{3\cdot 9^2}$

(2) $\boldsymbol{P}([3,\infty)) = \int_3^\infty f(x)dx = \int_3^9 ax^2dx = \frac{26}{27}$,

$\boldsymbol{P}([-2,6)) = \int_{-2}^6 f(x)dx = \int_0^6 ax^2dx = \frac{8}{27}$,

$\boldsymbol{P}([-\infty,-3]\cup[7,\infty)) = \int_{-\infty}^{-3} f(x)dx + \int_7^\infty f(x)dx = \int_7^9 ax^2dx = 1-(\frac{7}{9})^3 = \frac{386}{729}$,

$\boldsymbol{P}([-2,3]\cup[8,12]) = \int_{-2}^3 f(x)dx + \int_8^{12} f(x)dx = \int_0^3 ax^2dx + \int_8^9 ax^2dx = (\frac{1}{3})^3 + 1-(\frac{8}{9})^3 = \frac{244}{729}$,

5 (1) 指示された変数変換を実行すればよい．

(2) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることは解析学の教科書で証明されています．ここでは証明の概略を示します．$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ と置き，

$$I^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \lim_{R\to\infty}\int\int_{C(R)} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy\ ,$$
$$C(R) = \{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}\ .$$

極座標を用いて

$$\lim_{R\to\infty}\int\int_{C(R)} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_0^R\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}rdr = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})\ ,$$

ゆえに

$$I^2 = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4}\ .$$

6 (1) $\Omega=\boldsymbol{R}^2$．また，身長と体重が両者とも負の値を取らないことから $\Omega=[0,\infty)\times[0,\infty)=[0,\infty)^2$ とすることも考えられます．

(2) $[150,\infty)\times[60,70]$　　(3) $(150,170]\times[65,\infty)$

7 (1) $\int_0^1\int_0^1 axy^2dxdy = a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = 1$ より $a = 6$.

(2) $\int_{-1}^2\left\{\int_0^3 f(x,y)dy\right\}dx = \int_0^1\left\{\int_0^1 axy^2dy\right\}dx = 1$

(3) $\int_{0.5}^3\left\{\int_{-2}^{0.5} f(x,y)dy\right\}dx = \int_{0.5}^1\left\{\int_0^{0.5} axy^2dy\right\}dx = 0.09375$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 axy^2dx = 3y^2,\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 axy^2dy = 2x$

8 (1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{\infty}\left\{\int_0^1 ae^{-\lambda x}y^2dy\right\}dx = 1$ より $a = 3\lambda$.

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\infty} ae^{-\lambda x}y^2dx = 3y^2$,

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 ae^{-\lambda x}y^2dy = \lambda e^{-\lambda x}$

(3) $\int_{-1}^1\left\{\int_0^{0.5} f(x,y)dy\right\}dx = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}dx\int_0^{0.5}3y^2dy = (1-e^{\lambda})(0.5)^3$

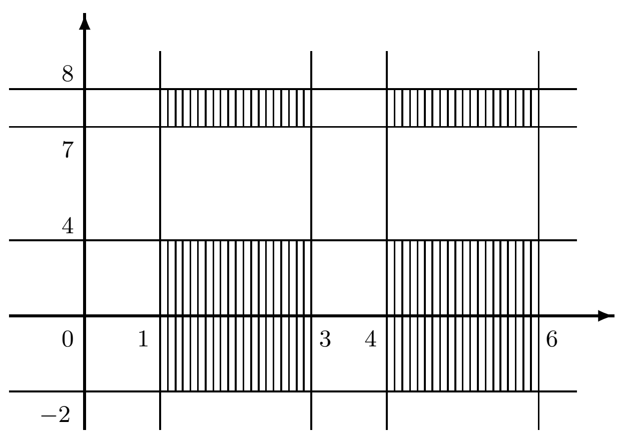
9

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\\
&\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{\left(y-\mu_2-\dfrac{\sigma_2\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\right\}
\end{aligned}
$$

であることから

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}
$$

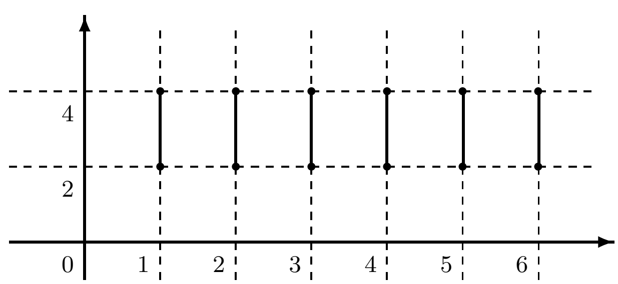
10 (1)



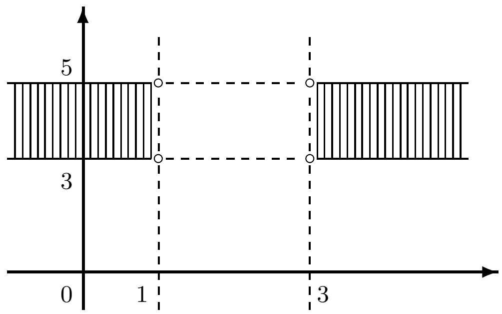
(2) 「コインとさいころを同時に投げる」,「コインを投げてその後にサイコロを投げる」といった試行の標本空間と考えることが出来る.

$$
\Omega_1\times\Omega_2 = \left\{\begin{array}{l}(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(0,6),\\(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\end{array}\right\}
$$

(3)



(4)



(5) 各自で確認してください.

3 章の問題解答

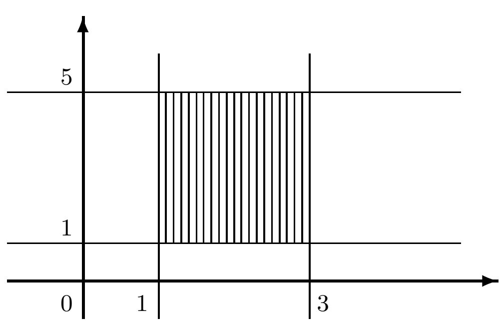
1 (1) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ であることから $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = (a-1, b+1)$ となります.
$[a,b] \subseteq A_i$, $i = 1,2,3,\cdots$ より $[a,b] \subseteq \cap_{i=1}^{\infty} A_i$.
$x \in \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ とします. 任意の i について $a - \frac{1}{i} < x < b + \frac{1}{i}$ より, $i \to \infty$ として, $a \leq x \leq b$. よって $x \in [a,b]$ となります.
(2) (1) と同様にして証明できます.

2 (1) 1 章の問題 1(4)：A を偶数の目, B を 4 以上の目として, $A \cap B$
1 章の問題 1(5)：A を奇数の目, B を 3 以下の目として, $A \cap B$
1 章の問題 1(6)：A を偶数の目, B を 3 以上の目として, $A \cup B$
1 章の問題 1(7)：A を奇数の目, B を 5 以下の目として, $A \cup B$
(2) 1 章の問題 1(4)：奇数の目かまたは 5 以上の目
1 章の問題 1(5)：偶数の目かまたは 4 以上の目
1 章の問題 1(6)：奇数の目でかつ 2 以下の目
1 章の問題 1(7)：偶数の目でかつ 6 の目

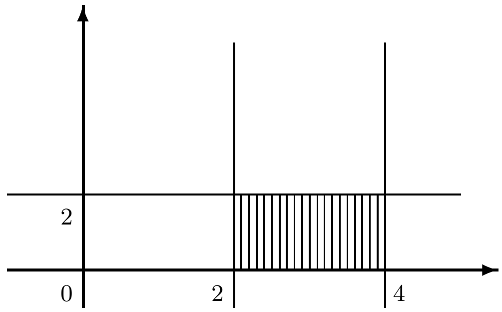
3 (1) A_1：1 回目に表が出る, B_1：1 回目に裏が出る, A_2：2 回目に表が出る, B_2：2 回目に裏が出る, A_3：3 回目に表が出る, B_3：3 回目に裏が出る
(2) $A_1 \cap B_2 = \{(1,0,0),(1,0,1)\}$, 1 回目に表が 2 回目に裏が出る
(3) $B_1 \cap A_3 = \{(0,0,1),(0,1,1)\}$, 1 回目に裏が 3 回目に表が出る
(4) $A_1 \cap A_2 \cap B_3 = \{(1,1,0)\}$, 1 回目に表が 2 回目に表が 3 回目に裏が出る

4 (1) A：寿命が 7 以上 12 以下である, B：寿命が 10 以上である
(2) $A \cap B = [10, 12]$：寿命が 10 以上かつ 12 以下である
(3) $A \cup B = [7, \infty)$：寿命が 7 以上である
(4) $A^c = (-\infty, 7) \cup (12, \infty)$：寿命が 7 より小であるかまたは 12 より大である

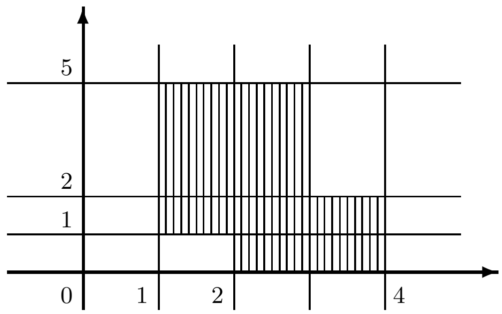
5 D



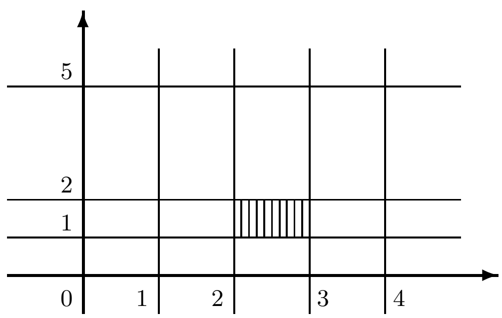
E



$D \cup E$



$D \cap E$



E^c については省略します.

6 σ-集合体の定義の条件が満たされることを確かめてください. $\{\{0\},\{1\}\}$ が σ-集合体でないことは, $\{1\}^c = \{2,3,4,5,6\}$ がこの集合族に属さないことによります.

7 $a < b$ として, $(a,b]$ の形の半開区間を全て含む最小の σ-集合体が $\mathcal{B}$ になります. $\mathcal{B}$ が全ての形の区間を含むことは,

$$[\alpha,\beta] = \cap_{i=1}^{\infty}(\alpha - \frac{1}{i}, \beta],\ [\alpha,\beta) = \cup_{i=1}^{\infty}[\alpha, \beta - \frac{1}{i}],\ (\alpha,\beta) = \cup_{i=1}^{\infty}[\alpha + \frac{1}{i}, \beta - \frac{1}{i}]$$

であることと σ-集合体が可算回の集合演算について閉じていることからわかります.

4 章の問題解答

1

$$\omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega : 偶数, \\ -1, & \omega : 奇数. \end{cases}$$

2 (1) $(1,1,1),\ (1,1,2),\ (1,1,3),\ (2,4,6)$ など.

(2) X_i : i 回目に出現する目の数を調べる.

(3) さいころを 3 回投げたときの目の数の総和を調べる.

(4) さいころを 3 回投げたときの目の数の平均を取る.

3 (1) $\boldsymbol{P}(A) = \sum_{i=2}^{\infty} p_i = 1 - p_1 = 1 - p$

(2) $\boldsymbol{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{2i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} p(1-p)^{2i} = p\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$

(3) $\boldsymbol{P}(C) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{2i} = 1 - \boldsymbol{P}(B) = \frac{1-p}{2-p}$

4 $\boldsymbol{P}(A) = \int_A f(x)dx = \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda}$

$\boldsymbol{P}(B) = \int_B f(x)dx = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda}$

$\boldsymbol{P}(C) = \int_C f(x)dx = \int_2^3 \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_4^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-2\lambda} - e^{-3\lambda} + e^{-4\lambda}$

5 (2)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\Longleftrightarrow f(x) \in A \cup B \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in A \text{ または } f(x) \in B \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ または } x \in f^{-1}(B) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Longleftrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in A \text{ かつ } f(x) \in B \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ かつ } x \in f^{-1}(B) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

(4) $x \in f^{-1}(A^c) \Longleftrightarrow f(x) \in A^c \Longleftrightarrow x \in (f^{-1}(A))^c$

二つめの同値関係は $f(x) \in A \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ であることから成立します.

(5)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &\Longleftrightarrow f(x) \in \cup_{i=1}^{\infty} A_i \\ &\Longleftrightarrow \text{ある } i \text{ に対して } f(x) \in A_i \\ &\Longleftrightarrow \text{ある } i \text{ に対して } x \in f^{-1}(A_i) \\ &\Longleftrightarrow x \in \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \end{aligned}$$

(6) (5) と同様にして証明できますが，ここではド・モルガンの法則を用います.

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i)\right)^c &= f^{-1}\left((\cap_{i=1}^{\infty} A_i)^c\right) = f^{-1}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) \\ &= \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i^c) = \cup_{i=1}^{\infty} \left(f^{-1}(A_i)\right)^c \\ &= \left(\cap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)\right)^c. \end{aligned}$$

したがって $f^{-1}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \cap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)$ が成立します.

6 (1) $X^{-1}\{1\} = \{2,4,6\},\ X^{-1}\{-1\} = \{1,3,5\}$

(2) $\boldsymbol{P}(X^{-1}\{1\}) = \frac{1}{2},\ \boldsymbol{P}(X^{-1}\{-1\}) = \frac{1}{2}$

7 (1) $X_1^{-1}(\{1\})$ のみを掲げます．他は明らかです．

$$X_1^{-1}(\{1\}) = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4),(1,1,5),(1,1,6), \\ (1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,2,6), \\ (1,3,1),(1,3,2),(1,3,3),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6), \\ (1,4,1),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,4),(1,4,5),(1,4,6), \\ (1,5,1),(1,5,2),(1,5,3),(1,5,4),(1,5,5),(1,5,6), \\ (1,6,1),(1,6,2),(1,6,3),(1,6,4),(1,6,5),(1,6,6) \end{array} \right\}$$

(2) $X_1^{-1}(\{2,3\}) = X_1^{-1}(\{2\}) \cup X_1^{-1}(\{3\})$ であることから，前問 (1) よりどのような集合になるかは明らかです．$X_2^{-1}(\{1,4\})$，$X_3^{-1}(\{3,5\})$ についても同様です．

(3) $(X_1+X_2+X_3)^{-1}(\{1\}) = \phi$

$(X_1+X_2+X_3)^{-1}(\{3\}) = \{(1,1,1)\}$

$(X_1+X_2+X_3)^{-1}(\{4\}) = \{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$

(4) $\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)^{-1}(\{1\}) = (X_1+X_2+X_3)^{-1}(\{3\}) = \{(1,1,1)\}$

$\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)^{-1}(\{\frac{4}{3}\}) = (X_1+X_2+X_3)^{-1}(\{4\}) = \{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$

$\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)^{-1}(\{2\}) = (X_1+X_2+X_3)^{-1}(\{6\})$

$= \{(1,1,4),(1,3,2),(1,4,1),(2,1,3),(2,2,2),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1),(4,1,1)\}$

8 一つだけ示しておきます．他は同様です．

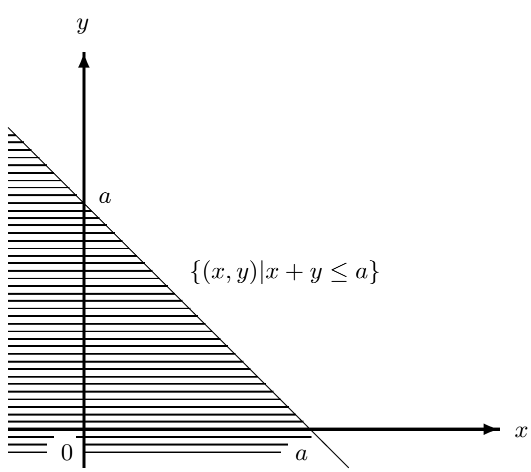
$$\boldsymbol{P}\left((X_1+X_2+X_3)^{-1}\{4\}\right) = p_1p_1p_2 + p_1p_2p_1 + p_2p_1p_1 = 3p_1p_1p_2 = 3\left(\frac{5}{18}\right)^3$$

9 一つだけ示しておきます．他は同様です．

$$\boldsymbol{P}\left(X^{-1}\{-1,1\}\right) = \boldsymbol{P}(\{1,2,5,6\}) = 2\cdot\frac{5}{18} + 2\cdot\frac{1}{18} = \frac{2}{3}$$

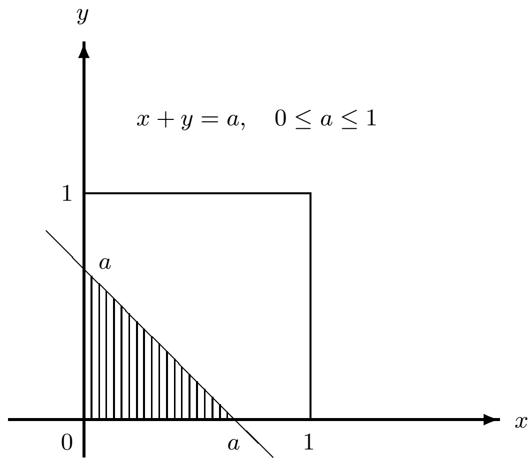
10 (1) 平面上で，直線 $x+y=a$ の下側の領域になります．直線は含みます．

$$(X+Y)^{-1}((-\infty,a]) = \{(x,y)|x+y \le a\}$$

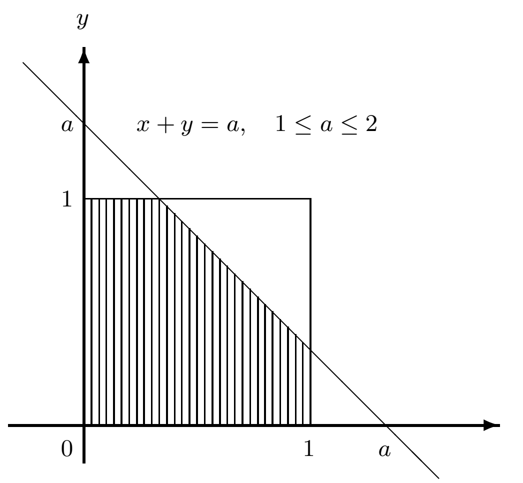


(2)

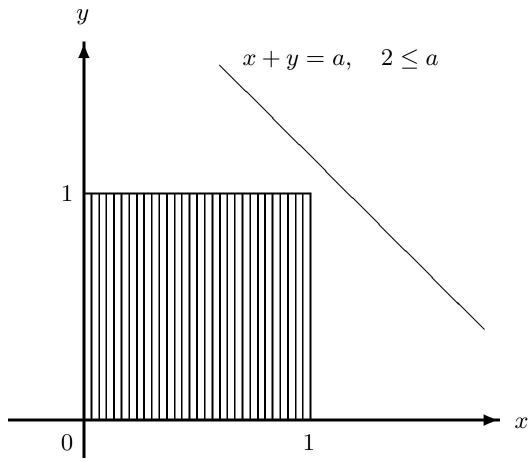
$$a \le 0\ ,\ \boldsymbol{P}((X+Y)^{-1}(-\infty,a]) = 0$$



$$0 \le a \le 1\ ,\ \ \boldsymbol{P}((X+Y)^{-1}(-\infty, a]) = \int_0^a dx \int_0^{a-x} 6xy^2 dy$$
$$= \frac{a^5}{10}$$



$$1 \le a \le 2\ ,\ \boldsymbol{P}((X+Y)^{-1}(-\infty, a])$$
$$= 1 - \int_{a-1}^1 dx \int_{a-x}^1 6xy^2 dy$$
$$= \frac{1}{2}(a-1) + (a-1)^2 - \frac{1}{2}(a-1)^4 - \frac{1}{10}(a-1)^5 + \frac{1}{10}$$



$$2 \le a\ ,\ \boldsymbol{P}((X+Y)^{-1}(-\infty, a]) = \int_0^1 dx \int_0^1 6xy^2 dy = 1$$

11 $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, \cdots) \mid x_i = 0 \text{ or } 1,\ i = 1, 2, 3 \cdots\}$

5 章の問題解答

1 (1) $\boldsymbol{P}(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} p_{\omega_i} = p_{\omega_1} + p_{\omega_2} + \cdots = 1$.

(2) $A_1,\ A_2, \cdots,\ A_i \cap A_j = \phi\ (i \neq j)$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \sum_{\omega \in \cup_{i=1}^{\infty} A_i} p_\omega \\ &= \sum_{\omega \in A_i} p_\omega + \sum_{\omega \in A_2} p_\omega + \cdots \\ &= \boldsymbol{P}(A_1) + \boldsymbol{P}(A_2) + \cdots\ . \end{aligned}$$

2 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ に対して補集合を取った $A_1^c \subseteq A_2^c \subseteq \cdots$ に定理 5.2 (1) を適用して

$$\boldsymbol{P}(A_n^c) \uparrow \boldsymbol{P}(\cup_{i \ge 1} A_i^c) \quad (n \to \infty)\ . \qquad (*)$$

ここでド・モルガンの法則より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(A_n^c) &= 1 - \boldsymbol{P}(A_n), \\ \boldsymbol{P}(\cup_{i \le 1} A_i^c) &= \boldsymbol{P}((\cap_{i \ge 1} A_i)^c) = 1 - \boldsymbol{P}(\cap_{i \ge 1} A_i) \end{aligned}$$

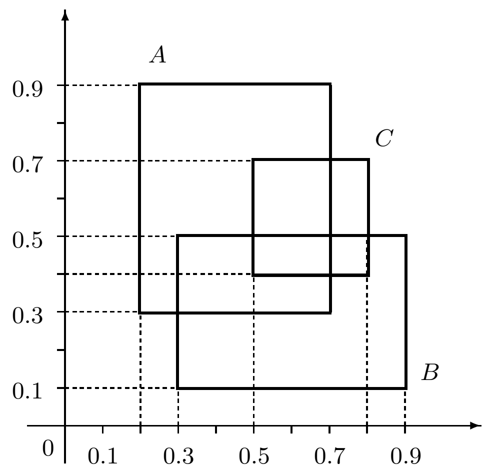
であることに注意します．したがって $(*)$ より

$$\boldsymbol{P}(A_n) \downarrow \boldsymbol{P}(\cap_{i \ge 1} A_i)$$

.

3

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(A\cup B\cup C) =& \boldsymbol{P}(A)+\boldsymbol{P}(B)+\boldsymbol{P}(C)-\boldsymbol{P}(A\cap B)-\boldsymbol{P}(A\cap C)-\boldsymbol{P}(B\cap C)\\
&+\boldsymbol{P}(A\cap B\cap C),\\
\boldsymbol{P}(A) =& ((0.7)^3-(0.2)^3)((0.9)^2-(0.3)^2),\\
\boldsymbol{P}(B) =& ((0.9)^3-(0.3)^3)((0.5)^2-(0.1)^2),\\
\boldsymbol{P}(C) =& ((0.8)^3-(0.5)^3)((0.7)^2-(0.4)^2),\\
\boldsymbol{P}(A\cap B) =& ((0.7)^3-(0.3)^3)((0.5)^2-(0.3)^2),\\
\boldsymbol{P}(A\cap C) =& ((0.7)^3-(0.5)^3)((0.7)^2-(0.4)^2),\\
\boldsymbol{P}(B\cap C) =& ((0.8)^3-(0.5)^3)((0.5)^2-(0.4)^2),\\
\boldsymbol{P}(A\cap B\cap C) =& ((0.7)^3-(0.5)^3)((0.5)^2-(0.4)^2)
\end{aligned}$$



4 【問題訂正】事象 A を次のように訂正します． $A=\{(1,j)\mid j$ は奇数 $\}$

$$\boldsymbol{P}(A\cup B)=\boldsymbol{P}(A)+\boldsymbol{P}(B)-\boldsymbol{P}(A\cap B)=\frac{3}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=\frac{2}{9}$$

5 $n=2$ の場合は，定理 5.1(3) より成立しています． $n=n$ の場合成立するとして，

$n = n+1$ の場合を考えます.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = \boldsymbol{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) \\
&= \boldsymbol{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) + \boldsymbol{P}(A_{n+1}) - \boldsymbol{P}\left((\cup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \boldsymbol{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) + \boldsymbol{P}(A_{n+1}) - \boldsymbol{P}\left(\cup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&= \boldsymbol{P}(A_{n+1}) + (-1)^{1+1} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(A_i) + (-1)^{2+1} \sum_{i<j\le n} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_j) \\
&\quad + (-1)^{3+1} \sum_{i<j<k\le n} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} \boldsymbol{P}\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&\quad - \left\{ (-1)^{1+1} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_{n+1}) + (-1)^{2+1} \sum_{i<j\le n} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) \right. \\
&\left. + (-1)^{3+1} \sum_{i<j<k\le n} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}) + \cdots + (-1)^{n+1} \boldsymbol{P}\left(\cap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) \right\} \\
&= (-1)^{1+1} \sum_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{P}(A_i) + (-1)^{2+1} \sum_{i<j\le n+1} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_j) \\
&\quad + (-1)^{3+1} \sum_{i<j<k\le n+1} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1+1} \boldsymbol{P}\left(\cap_{i=1}^{n+1} A_i\right)
\end{aligned}
$$

6 (1) 包除原理より $\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B)$. $\boldsymbol{P}(A \cup B) \le 1$ であることから $\boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B) \le 1$. したがって $\boldsymbol{P}(A \cap B) \ge \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - 1$.
(2) 包除原理より $\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B) \le \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B)$. n に関する帰納法によって，証明されます.

7

$$\boldsymbol{P}_H(A) = \frac{\boldsymbol{P}(A \cap H)}{\boldsymbol{P}(H)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{24}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{24}} = \frac{13}{14}$$

8 問題 3 の確率の値を利用します. (2) では包除原理を次のように利用すること.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_A(B \cup C) &= \frac{\boldsymbol{P}(A \cap (B \cup C))}{\boldsymbol{P}(A)} \\
&= \frac{\boldsymbol{P}((A \cap B) \cup (A \cap C))}{\boldsymbol{P}(A)} \\
&= \frac{\boldsymbol{P}(A \cap B) + \boldsymbol{P}(A \cap C) - \boldsymbol{P}(A \cap B \cap C)}{\boldsymbol{P}(A)}
\end{aligned}
$$

ちなみに，この式から

$$\boldsymbol{P}_A(B \cup C) = \boldsymbol{P}_A(B) + \boldsymbol{P}_A(C) - \boldsymbol{P}_A(B \cap C)$$

となることがわかります.

9 事象 A の要素を列挙すると $A = \{(1, j_0), \cdots, (j_0-1, j_0), (j_0+1, j_0), \cdots, (n, j_0)\}$. したがって $\boldsymbol{P}(A) = (n-1)/\{n(n-1)\} = 1/n$.

10 (1) $\boldsymbol{P}(A_i^c) = 1 - \boldsymbol{P}(A_i)$ より，$\boldsymbol{P}(A_i) = p$ を示せば十分です. 事象 A_i の各要素は $(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ の形をしています.
したがって，例えば,

$$\sum_{x_1=0}^{1} p^{x_1} (1-p)^{1-x_1} = p + (1-p) = 1$$

であることに注意して

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(A_i) = \sum_{x_1=0}^{1} \cdots \sum_{x_{i-1}=0}^{1} \sum_{x_{i+1}=0}^{1} \cdots \sum_{x_n=0}^{1} & p^{x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n} \\
& \times (1-p)^{n-1-(x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n)} \cdot p \\
= p \sum_{x_1=0}^{1} p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \cdots & \sum_{x_{i-1}=0}^{1} p^{x_{i-1}}(1-p)^{1-x_{i-1}} \\
& \times \sum_{x_{i+1}=0}^{1} p^{x_{i+1}}(1-p)^{1-x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n=0}^{1} p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} \\
= p &
\end{aligned}
$$

(2) (1) より $\boldsymbol{P}(A_1) = \boldsymbol{P}(A_2) = p$. また，(1) の証明と同様にして $\boldsymbol{P}(A_1 \cap A_2) = pp\sum_{x_3=0}^{1} p^{x_3}(1-p)^{1-x_3} \cdots \sum_{x_n=0}^{1} p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} = p^2$.
したがって A_1，A_2 は独立になります.
(3) (2) と同様の計算を行い，$\boldsymbol{P}(A_i \cap A_j) = p^2$.

11 $\boldsymbol{P}(C) = \frac{3}{6}$，$\boldsymbol{P}(D) = \frac{3}{6}$，$\boldsymbol{P}(C \cap D) = \frac{9}{36}$ より独立になります.

12

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(A \cap B) &= \frac{1}{4} = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B), \\
\boldsymbol{P}(A \cap C) &= \frac{1}{4} = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(C), \\
\boldsymbol{P}(B \cap C) &= \frac{1}{4} = \boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(C), \\
\boldsymbol{P}(A \cap B \cap C) &= \frac{1}{4} \neq \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(C) = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

より独立ではありません．二つずつでは独立になります.

13 一番目の等式のみを示しておきます.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(A \cap (B \cup C)) &= \boldsymbol{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \boldsymbol{P}(A \cap B) + \boldsymbol{P}(A \cap C) - \boldsymbol{P}(A \cap B \cap C) \\
&= \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(C) \\
&= \boldsymbol{P}(A)\{\boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(C)\} \\
&= \boldsymbol{P}(A)\{\boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}(B \cap C)\} \\
&= \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B \cup C)
\end{aligned}
$$

14 題意より $\boldsymbol{P}(a) = o_a$，$\boldsymbol{P}(b) = o_b$，$\boldsymbol{P}(\text{不良品} \mid a) = p_a$，$\boldsymbol{P}(\text{不良品} \mid b) = p_b$ とできます．求める確率 $\boldsymbol{P}(a \mid \text{不良品})$ は，ベイズの定理より，

$$
\boldsymbol{P}(a \mid \text{不良品}) = \frac{\boldsymbol{P}(\text{不良品} \mid a)\boldsymbol{P}(a)}{\boldsymbol{P}(\text{不良品} \mid a)\boldsymbol{P}(a) + \boldsymbol{P}(\text{不良品} \mid b)\boldsymbol{P}(b)} = \frac{p_a o_a}{p_a o_a + p_b o_b}
$$

15 製品が不良品であるという事象を D で，検査結果が不良品であるという事象を JD と書くと，求める確率 $\boldsymbol{P}(D|JD)$ は，ベイズの定理を使って次のようになります.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(D|JD) &= \frac{\boldsymbol{P}(D \cap JD)}{\boldsymbol{P}(JD)} = \frac{\boldsymbol{P}(JD|D)\boldsymbol{P}(D)}{\boldsymbol{P}(JD|D)\boldsymbol{P}(D) + \boldsymbol{P}(JD|D^c)\boldsymbol{P}(D^c)} \\
&= \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} \approx 0.32
\end{aligned}
$$

6 章の問題解答

1 (1) σ-集合体の定義の条件が満たされることを確認すればよい.

(2) 例えば，$\{\omega|X(\omega) \leq 4\} = \{1,2,3,5\}$ は $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2$ いずれの要素でもない.

(3) $\mathcal{F}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$ は Ω の全ての部分集合からなるため，X が定義 6.1 の条件を満たすことがわかります.

2 i のところで p_i だけジャンプしているような階段状の関数になります.

3

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

$$F(x^-) = \lim_{n\to\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

4 (1)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

(2)

$$\boldsymbol{P}\{X > x\} = 1 - \boldsymbol{P}\{X \leq x\} = 1 - F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

(3)

$$\boldsymbol{P}\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a) = \begin{cases} 0. & a < b < 0, \\ 1 - e^{-\lambda b}, & a < 0 \leq b, \\ e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}, & 0 \leq a < b. \end{cases}$$

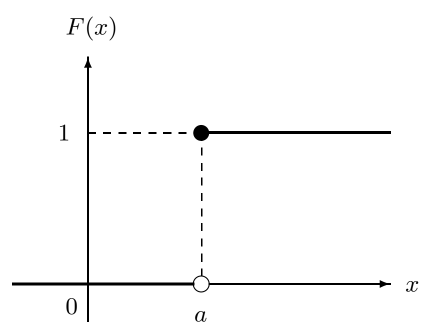
(4)

$$F(x^-) = \lim_{n\to\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0\ . \end{cases}$$

5

$$F(x) = \boldsymbol{P}\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & a \leq x. \end{cases}$$

分布関数は，a で高さ 1 のジャンプをしている階段状の関数になります.



6 略

7

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[X] &= \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} p^i q^{n-i} \\
&= np \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-(i-1))!} p^{i-1} q^{n-1-(i-1)} \\
&= np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i q^{n-1-i} \\
&= np \ , \\
\boldsymbol{Var}[X] &= \sum_{i=0}^{n} (i-np)^2 \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} i^2 \binom{n}{i} p^i q^{n-i} - (np)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} i(i-1) \binom{n}{i} p^i q^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i q^{n-i} - (np)^2 \ ,
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} i(i-1) \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \\
&= \sum_{i=2}^{n} \frac{n!}{(i-2)!(n-i)!} p^i q^{n-i} \\
&= p^2 n(n-1) \sum_{i=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-2-(i-2))!} p^{i-2} q^{n-2-(i-2)} \\
&= p^2 n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} p^i q^{n-2-i} \\
&= p^2 n(n-1)
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\boldsymbol{Var}[X] = p^2 n(n-1) + np - (np)^2 = np(1-p)
$$

8

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx + \mu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx + \mu \quad \text{（被積分関数は奇関数）} \\
&= \mu \\
\boldsymbol{Var}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx \quad \text{（変数変換）} \\
&= \frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(-\frac{x}{\sigma^2}\right) \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx \quad \text{（部分積分を行う）} \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

9

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Var}[X] &= \sum_{i \in \mathbf{Z}} (i - \boldsymbol{E}[X])^2 p_i \\
&= \sum_{i\,:\,|i-\boldsymbol{E}[X]| \le \epsilon} (i - \boldsymbol{E}[X])^2 p_i + \sum_{i\,:\,|i-\boldsymbol{E}[X]| > \epsilon} (i - \boldsymbol{E}[X])^2 p_i \\
&\ge \sum_{i\,:\,|i-\boldsymbol{E}[X]| > \epsilon} (i - \boldsymbol{E}[X])^2 p_i \\
&\ge \epsilon^2 \sum_{i\,:\,|i-\boldsymbol{E}[X]| > \epsilon} p_i = \epsilon^2 \boldsymbol{P}(|X - \boldsymbol{E}[X]| > \epsilon)
\end{aligned}
$$

10 略

11

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(X > h + t | X > h) &= \frac{\boldsymbol{P}(X > h+t, X > h)}{\boldsymbol{P}(X > h)} \\
&= \frac{\boldsymbol{P}(X > h+t)}{\boldsymbol{P}(X > h)} = \frac{e^{-\lambda(h+t)}}{e^{-\lambda h}} \\
&= e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

7 章の問題解答

1 (1)

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ または } y<0, \\ (1-e^{-\lambda x})y^2, & 0 \le x,\ 0 \le y \le 1, \\ 1-e^{-\lambda x}, & 0 \le x,\ 1 < y, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}\{X \le x\} = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & 0 \le x, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}\{Y \le y\} = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & y<0, \\ y^2, & 0 \le y \le 1, \\ 1, & 1 < y, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}\{1 < X \le 2,\ 0.5 < Y \le 1\} = 0.75 \cdot (e^{-\lambda} - e^{-2\lambda})$$

(2)

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ または } y<0, \\ \frac{1}{2}(x^2y+xy^3), & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ \frac{1}{2}(x^2+x), & 0 \le x \le 1,\ 1 < y, \\ \frac{1}{2}(y^3+y), & 1 < x,\ 0 \le y \le 1, \\ 1, & 1 < x,\ 1 < y \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}\{X \le x\} = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{2}(x^2+x), & 0 \le x \le 1, \\ 1, & 1 < x, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}\{Y \le y\} = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & y<0, \\ \frac{1}{2}(y^3+y), & 0 \le y \le 1, \\ 1, & 1 < y, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}\{1 < X \le 2,\ 0.5 < Y \le 1\} = 0$$

2 (1) $\boldsymbol{P}\{X+a \le x\} = \boldsymbol{P}\{X \le x-a\} = \int_{-\infty}^{x-a} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{x} f_X(v-a)dv$
したがって

$$f_{X+a}(x) = f_X(x-a)\ .$$

(2) $\boldsymbol{P}\{aX \le x\} = \boldsymbol{P}\{X \le \frac{x}{a}\} = \int_{-\infty}^{\frac{x}{a}} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{x} f_X(\frac{v}{a}) \cdot \frac{1}{a}dv$
したがって

$$f_{aX}(x) = \frac{1}{a} \cdot f_X\left(\frac{x}{a}\right)\ .$$

(3) X^2 は負の値を取らないことから $f_{X^2}(x) = 0,\ x<0$. $x \ge 0$ として,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\{X^2 \le x\} &= \boldsymbol{P}\{-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}\} \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f_X(u)du \\ &= \int_0^{\sqrt{x}} f_X(u)du + \int_{-\sqrt{x}}^{0} f_X(u)du \\ &= \int_0^{\sqrt{x}} \{f_X(u) + f_X(-u)\}\, du \quad \text{（変数変換）} \\ &= \int_0^{x} \frac{1}{2\sqrt{u}} \{f_X(\sqrt{u}) + f_X(-\sqrt{u})\}\, du \quad \text{（変数変換）} \end{aligned}$$

したがって

$$f_{X^2}(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\{f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\}, & x \ge 0\ . \end{cases}$$

3 (1) まず $X-\mu$ の密度関数は $n_{\mu,\sigma^2}(x+\mu)$. 次に $(X-\mu)/\sigma$ の密度関数は $\sigma n_{\mu,\sigma^2}(\sigma x+\mu)=n_{0,1^2}(x)$.
(2) $f_{X^2}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left\{n_{0,1^2}(\sqrt{x})+n_{0,1^2}(-\sqrt{x})\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\{-\frac{x}{2}\}$.

4 【問題訂正】X と Y の同時密度関数が例 7.2 で与えられているとします.
$\boldsymbol{E}[X]=np,\ \boldsymbol{E}[Y]=\lambda$ より $\boldsymbol{E}[X+Y]=\boldsymbol{E}[X]+\boldsymbol{E}[Y]=np+\lambda$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[X\cdot Y]&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}km\binom{n}{k}p^kq^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\\&=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\sum_{m=0}^{\infty}me^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\\&=np\cdot\lambda\end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned}&\varphi_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{kt}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^k}{k!}=\exp\left\{\lambda(e^t-1)\right\}\ ,\\&\varphi_X'(t)=\lambda e^t\exp\left\{\lambda(e^t-1)\right\}\ ,\\&\varphi_X''(t)=\lambda e^t\exp\left\{\lambda(e^t-1)\right\}+(\lambda e^t)^2\exp\left\{\lambda(e^t-1)\right\}\ ,\\&\boldsymbol{E}[X]=\varphi_X'(0)=\lambda\ ,\ \boldsymbol{E}[X^2]=\varphi_X''(0)=\lambda+\lambda^2\ ,\ \boldsymbol{Var}[X]=\lambda\ .\end{aligned}$$

6 指数分布であることから $\boldsymbol{E}[X]=\frac{1}{\lambda}$ であることを思い起こしてください.

$$\begin{aligned}&\varphi_X(t)=\int_0^{\infty}e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-t}\\&\frac{d}{dt}\varphi_X(t)=\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2},\quad \boldsymbol{E}[X]=\left.\frac{d}{dt}\varphi_X(t)\right|_{t=0}=\frac{1}{\lambda}\\&\frac{d^2}{dt^2}\varphi_X(t)=\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3},\quad \boldsymbol{E}[X^2]=\left.\frac{d^2}{dt^2}\varphi_X(t)\right|_{t=0}=\frac{2}{\lambda^2}\\&\frac{d^3}{dt^3}\varphi_X(t)=\frac{6\lambda}{(\lambda-t)^4},\quad \boldsymbol{E}[X^3]=\left.\frac{d^2}{dt^2}\varphi_X(t)\right|_{t=0}=\frac{6}{\lambda^3}\\&\boldsymbol{E}\left[\left(X-\frac{1}{\lambda}\right)^3\right]=\boldsymbol{E}[X^3]-3\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{E}[X^2]+3\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\boldsymbol{E}[X]-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3=\frac{2}{\lambda^3}\end{aligned}$$

8 章の問題解答

1

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[X \cdot Y] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy \\
&= \boldsymbol{E}[X]\boldsymbol{E}[Y] \\
F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dudv \\
&= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u)f_Y(v)dudv \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv \\
&= F_X(x)F_Y(y)
\end{aligned}$$

2 どのような t に対しても $\{(X-\boldsymbol{E}[X])t-(Y-\boldsymbol{E}[Y])\}^2$ は負の値を取りません.
したがってこれの期待値も負の値を取りません.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}[\{(X-\boldsymbol{E}[X])t-(Y-\boldsymbol{E}[Y])\}^2] \\
&= t^2\boldsymbol{E}[(X-\boldsymbol{E}[X])^2] - 2t\boldsymbol{E}[(X-\boldsymbol{E}[X])(Y-\boldsymbol{E}[Y])] + \boldsymbol{E}[(Y-\boldsymbol{E}[Y])^2] \\
&= t^2\boldsymbol{Var}[X] - 2t\boldsymbol{Cov}(X,Y) + \boldsymbol{Var}[Y] = 0
\end{aligned}$$

を t の二次方程式であると考えると，異なる二実根を持たないことから，判別式を取って，$[\boldsymbol{Cov}(X,Y)]^2 \le \boldsymbol{Var}[X]\boldsymbol{Var}[Y]$．よって

$$-\sqrt{\boldsymbol{Var}[X]\boldsymbol{Var}[Y]} \le \boldsymbol{Cov}(X,Y) \le \sqrt{\boldsymbol{Var}[X]\boldsymbol{Var}[Y]}$$

3 (1) $F_{X|Y}(x|j) = \sum_{i\le x} p_{X|Y}(i|j) = \sum_{i \le x} p_X(i) = F_X(x)$
(2) $F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)du = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = F_X(x)$

4 (1) $\boldsymbol{E}[X|Y=j] = \sum_i ip_{X|Y}(i|j) = \sum_i ip_X(i) = \boldsymbol{E}[X]$
(2) $\boldsymbol{E}[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \boldsymbol{E}[X]$

5

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}[X|Y=y]f_Y(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} f_Y(y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \\
&= \boldsymbol{E}[X]
\end{aligned}$$

6

$$F_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|\Lambda}(u|\lambda)du = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda u}du = 1-e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}[X|\Lambda=\lambda] = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$\boldsymbol{E}[X] = \int_1^2 \boldsymbol{E}[X|\Lambda=\lambda]f_\Lambda(\lambda)d\lambda = \int_1^2 \frac{1}{\lambda}d\lambda = \log 2\ .$$

7 2 章の問題 9 の $f(x,y)$ を参照してください.

$$\boldsymbol{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_Y)f_{X,Y}(x,y)dydx\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_Y)f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho(x-\mu_X)\ ,$$

$$\frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}dx = \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}\sigma_X^2 = \rho\sigma_X\sigma_Y$$

8 X と Y のモーメント母関数はそれぞれ

$$\varphi_X(t) = (pe^t+1-p)^m, \quad \varphi_Y(t) = (pe^t+1-p)^n.$$

したがって，独立性の仮定より $X+Y$ のモーメント母関数は,

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = (pe^t+1-p)^m(pe^t+1-p)^n = (pe^t+1-p)^{m+n}.$$

よって，$X+Y$ の分布はパラメーター $m+n, p$ の二項分布になります.

9 $N_1, \cdots$ を独立，$\boldsymbol{P}(N_i = k) = p(1-p)^{k-1},\ k = 1, 2, \cdots$ とし,

$$\boldsymbol{P}(N_1+\cdots+N_r = n) = \binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r},\ n = r, r+1, \cdots$$

であることを r に関する帰納法で証明します．$r = 1$ の場合は成立します．$r = r$ の場合成立するとして，$r = r+1$ の場合を考えます．$n \geq r+1$ とします.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(N_1+\cdots+N_r+N_{r+1} = n) &= \sum_{k=r}^{n-1}\boldsymbol{P}(N_1+\cdots+N_r = k,\ N_{r+1} = n-k) \\
&= \sum_{k=r}^{n-1}\boldsymbol{P}(N_1+\cdots+N_r = k)\boldsymbol{P}(N_{r+1} = n-k) \\
&= \sum_{k=r}^{n-1}\binom{k-1}{r-1}p^{r+1}q^{n-(r+1)} \\
&= p^{r+1}q^{n-(r+1)}\sum_{k=r}^{n-1}\binom{k-1}{r-1} \\
&= \binom{n-1}{r}p^{r+1}q^{n-(r+1)}
\end{aligned}$$

二つめの等号は独立性から，三つ目の等号は帰納法の仮定から，五つ目の等号は二項係数の性質（各自で確認して下さい）から成立します.

10 X, Y のそれぞれの分布をパラメーター λ_1, λ_2 のポアソン分布とし，互いに独立であるとします．モーメント母関数は 7 章の問題 5 より

$$\varphi_X(t) = \exp\{\lambda_1(e^t-1)\}, \quad \varphi_Y(t) = \exp\{\lambda_2(e^t-1)\}$$

したがって，独立性より $X+Y$ のモーメント母関数は

$$\varphi_{X+Y}(t) = \exp\{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)\}$$

となり，$X+Y$ の分布はパラメータ $\lambda_1+\lambda_2$ のポアソン分布になります.

11 (1) k 関する帰納法で示します．$k=1$ の場合は成立しています．$k=k$ の場合成立するとして $k=k+1$ の場合を考えます．$X_1+\cdots+X_k$ と X_{k+1} とのたたみこみの計算を実行します．積分範囲に注意して；

$$\begin{aligned}\int_0^u \frac{\lambda^k}{(k-1)!}(u-x)^{k-1}e^{-\lambda(u-x)}\lambda e^{-\lambda x}dx &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!}e^{-\lambda u}\int_0^u (u-x)^{k-1}dx \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!}e^{-\lambda u}\left[-\frac{1}{k}(u-x)^k\right]_0^u \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{k!}e^{-\lambda u}u^k\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\int_0^u \frac{\lambda^m}{(m-1)!}(u-y)^{m-1}e^{-\lambda(u-y)}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\lambda y}dy \\ &= \frac{\lambda^{m+n}}{(m-1)!(n-1)!}e^{-\lambda u}\int_0^u (u-y)^{m-1}y^{n-1}dy \\ &= \frac{\lambda^{m+n}}{(m-1)!(n-1)!}e^{-\lambda u}\frac{(m-1)!u^{n+m-1}}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} \quad \text{（部分積分）} \\ &= \frac{\lambda^{n+m}}{(n+m-1)!}u^{n+m-1}e^{-\lambda u}\ .\end{aligned}$$

12

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-y)f_Y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}}\exp\left\{-\frac{(u-y-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}dy\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{(u-y-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}+\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2} &= \frac{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\left\{y-\mu_Y+\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}(\mu_X+\mu_Y-u)\right\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}(u-\mu_X-\mu_Y)^2\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-y)f_Y(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}}\exp\left\{-\frac{(u-\mu_X-\mu_Y)^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right\} \\ &\times\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}{2\pi\sigma_X^2\sigma_Y^2}}\exp\left\{-\frac{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\left(y-\mu_Y+\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}(-u+\mu_X+\mu_Y)\right)^2\right\}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}}\exp\left\{-\frac{(u-\mu_X-\mu_Y)^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right\}\end{aligned}$$

13

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[Y|N=n] &= \boldsymbol{E}[X_1+\cdots+X_n|N=n] \\
&= \sum_j j\boldsymbol{P}(X_1+\cdots+X_n=j|N=n) \\
&= \sum_j j\boldsymbol{P}(X_1+\cdots+X_n=j) \quad \text{（独立性より）} \\
&= \boldsymbol{E}[X_1+\cdots+X_n] \\
&= \boldsymbol{E}[X_1]+\cdots+\boldsymbol{E}[X_n] \\
&= n\mu\ , \\
\boldsymbol{E}[Y] &= \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{E}[Y|N=n]\boldsymbol{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu\boldsymbol{P}(N=n) \\
&= \mu\boldsymbol{E}[N] \\
&= \mu\cdot\lambda
\end{aligned}$$

14 (1) 二つの事象 $\{\min(X,Y)>u\}$ と $\{X>u,\ Y>u\}$ とは同じものです．したがって，独立性より

$$\boldsymbol{P}(\min(X,Y)>u) = \boldsymbol{P}(X>u\ ,\ Y>u) = \boldsymbol{P}(X>u)\boldsymbol{P}(Y>u).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
F_{\min(X,Y)}(u) &= \boldsymbol{P}(\min(X,Y)\le u) \\
&= 1-\boldsymbol{P}(\min(X,Y)>u) \\
&= 1-\boldsymbol{P}(X>u)\boldsymbol{P}(Y>u) \\
&= \begin{cases} 1-e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)u}, & u\ge 0, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases} \\
f_{\min(X,Y)}(u) &= \frac{d}{du}(1-e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)u}) \\
&= \begin{cases} (\lambda_X+\lambda_Y)e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)u}, & u\ge 0, \\ 0, & u<0\ . \end{cases}
\end{aligned}$$

(2) $\{\max(X,Y)\le u\} = \{X\le u,\ Y\le u\}$．したがって，独立性に注意して

$$\begin{aligned}
F_{\max(X,Y)}(u) &= \boldsymbol{P}(\max(X,Y)\le u) \\
&= \boldsymbol{P}(X\le u,\ Y\le u) \\
&= \boldsymbol{P}(X\le u)\boldsymbol{P}(Y\le u) \\
&= (1-e^{-\lambda_X u})(1-e^{-\lambda_Y u}), \\
f_{\max(X,Y)}(u) &= \lambda_X e^{-\lambda_X u}(1-e^{-\lambda_Y u}) + \lambda_Y e^{-\lambda_Y u}(1-e^{-\lambda_X u}) \\
&= \lambda_X e^{-\lambda_X u} + \lambda_Y e^{-\lambda_Y u} - (\lambda_X+\lambda_Y)e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)u}
\end{aligned}$$

10 章の問題解答

1 (1) 0.95　(2) 0.975　(3) 0.995　(4) $\boldsymbol{P}(X \le 1.96) - \boldsymbol{P}(X \le -2.576) = 0.975 - 0.005 = 0.97$　(5) $\boldsymbol{P}(X \le 1.96) - \boldsymbol{P}(X \le -1.645) = 0.975 - 0.05 = 0.925$

2 $\boldsymbol{P}(X \le 3.96) = \boldsymbol{P}(\frac{X-2}{1} \le 1.96) = 0.975$

3 $9 \cdot V/2^2$ が自由度 9 の χ^2 分布に従うことに注意します．(10.4) 式より

$$\boldsymbol{P}\{V \le \alpha\} = \boldsymbol{P}\{\frac{9 \cdot V}{2^2} \le \frac{9 \cdot \alpha}{2^2}\} = 0.95$$

χ^2 分布表から $\frac{9 \cdot \alpha}{2^2} = 16.92$．ゆえに $\alpha = \frac{16.92 \cdot 2^2}{9} = 7.52$

4 (1) 分散が等しいことに注意します．V_1/V_2 が自由度 $(9, 7)$ の F 分布に従うことから，$\alpha = 3.68$ であることがわかります．

(2) (10.7) 式より，自由度 16 の χ^2 分布表から確率の値は 0.025 となります．

5 7 章の問題 3(2) より $n = 1$ の場合 X_1^2 の密度関数が $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\{-\frac{x}{2}\}$，$x \ge 0$ で，$\chi_1^2(x)$ に一致します．$n = n$ の場合成立するとして $n = n + 1$ の場合を考えます．$X_1^2 + \cdots + X_n^2$ と X_{n+1}^2 とは独立で，帰納法の仮定よりそれぞれの分布は $\chi_n^2(x)$ と $\chi_1^2(x)$ となります．したがって，$X_1^2 + \cdots + X_n^2 + X_{n+1}^2$ の密度関数はこれらの分布のたたみこみを計算すれば求まります．

$$\begin{aligned}\int_0^x \chi_n^2(x-u)\chi_1^2(u)du &= \int_0^x \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}(x-u)^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x-u}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} \int_0^x (x-u)^{\frac{n-2}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du\end{aligned}$$

$tx = u$ の変数変換をすれば，

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-u)^{\frac{n-2}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du &= x^{\frac{n+1-2}{2}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-2}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= x^{\frac{n+1-2}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) \\ &= x^{\frac{n+1-2}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\end{aligned}$$

ここでガンマ関数とベータ関数との関係を用いました．$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ であることに注意し，整理して，

$$\int_0^x \chi_n^2(x-u)\chi_1^2(u)du = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})} x^{\frac{n+1-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} = \chi_{n+1}^2(x)$$

6 $W_1 \sim \chi^2(n_1), W_2 \sim \chi^2(n_2)$ が互いに独立であるとして，$W = (W_1/n_1)/(W_2/n_2)$

の分布関数を考えます.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}(W \le x) = \boldsymbol{P}\left(\frac{W_1/n_1}{W_2/n_2} \le x\right) \\
&= \int_0^\infty \boldsymbol{P}\left(\frac{W_1/n_1}{W_2/n_2} \le x \middle| W_2 = u\right) \chi^2_{n_2}(u)du \\
&= \int_0^\infty \boldsymbol{P}\left(W_1 \le \frac{n_1}{n_2}xu \middle| W_2 = u\right) \chi^2_{n_2}(u)du \\
&= \int_0^\infty \boldsymbol{P}\left(W_1 \le \frac{n_1}{n_2}xu\right) \chi^2_{n_2}(u)du \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{n_1}{n_2}xu} \chi^2_{n_1}(y)dy\right) \chi^2_{n_2}(u)du \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^x \chi^2_{n_1}\left(\frac{n_1}{n_2}uv\right)\frac{n_1}{n_2}udv\right) \chi^2_{n_2}(u)du \\
&= \int_0^x \left(\int_0^\infty \chi^2_{n_1}(\frac{n_1}{n_2}uv)\frac{n_1}{n_2}u\chi^2_{n_2}(u)du\right) dv \\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} v^{\frac{n_1-2}{2}}\int_0^\infty u^{\frac{n_1+n_2-2}{2}}e^{-\frac{n_1v+n_2}{2n_2}u}du\right) dv
\end{aligned}$$

$\frac{n_1v+n_2}{n_2}u = y$ の変数変換をすれば,

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \left(\frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}{(n_1v+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}v^{\frac{n_1-2}{2}}\int_0^\infty y^{\frac{n_1+n_2-2}{2}}e^{-\frac{y}{2}}dy\right) dv \\
&= \int_0^x \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}{(n_1v+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}v^{\frac{n_1-2}{2}}\right) dv
\end{aligned}$$

となり，被積分関数が求める密度関数になります.

7 $X \sim N(0,1^2), Y \sim \chi^2(\phi)$ とし，互いに独立であるとします.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\left(\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\phi}}} \le x\right) &= \int_0^\infty \boldsymbol{P}\left(\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\phi}}} \le x \middle| Y = y\right) \chi^2_\phi(y)dy \\
&= \int_0^\infty \boldsymbol{P}\left(X \le x\sqrt{\frac{y}{\phi}}\right) \chi^2_\phi(y)dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{x\sqrt{\frac{y}{\phi}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right) \chi^2_\phi(y)dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{yv^2}{2\phi}}\sqrt{\frac{y}{\phi}}dv\right) \chi^2_\phi(y)dy \ \text{（変数変換）} \\
&= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2^{\frac{\phi}{2}}\Gamma(\frac{\phi}{2})}\frac{1}{\sqrt{\phi}}\left(\int_0^\infty y^{\frac{\phi+1-2}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{v^2}{\phi}+1)y}dy\right) dv
\end{aligned}$$

$(\frac{v^2}{\phi}+1)y=u$ の変数変換をおこなって整理すれば

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{\Gamma(\frac{\phi+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\phi}{2})} \frac{1}{\left(1+\frac{v^2}{\phi}\right)^{\frac{\phi+1}{2}}\sqrt{\phi}} dv$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{\phi}B\left(\frac{1}{2},\frac{\phi}{2}\right)} \left(1+\frac{v^2}{\phi}\right)^{-\frac{\phi+1}{2}} dv$$

よって，被積分関数が求める t 分布である．

8

$$\alpha!\beta! = \left(\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx\right)\left(\int_0^\infty y^\beta e^{-y} dy\right)$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty x^\alpha y^\beta e^{-(x+y)} dxdy$$
$$= \int_0^\infty \int_0^1 (\frac{uy}{1-u})^\alpha y^\beta e^{-\frac{y}{1-u}} \frac{y}{(1-u)^2} dudy \quad (u=\tfrac{x}{x+y} \text{ の } x \text{ から } u \text{ への変数変換})$$
$$= \int_0^\infty \int_0^1 u^\alpha (1-u)^\beta v^{\alpha+\beta+1} e^{-v} dudv \quad (y=(1-u)v \text{ の } y \text{ から } v \text{ への変数変換})$$
$$= \left(\int_0^\infty v^{\alpha+\beta+1} e^{-v} dv\right)\left(\int_0^1 u^\alpha (1-u)^\beta du\right)$$
$$= (\alpha+\beta+1)!B(\alpha+1,\beta+1)$$

11 章の問題解答

1 偏微分を実行して

$$\frac{\partial}{\partial\mu} L(x_1,\cdots,x_n,\mu,\sigma^2) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i-\mu}{\sigma^2} = 0 \ ,$$
$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} L(x_1,\cdots,x_n,\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0 \ .$$

これを μ と σ^2 の連立方程式として解いて，推定値が次のように求まります．

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \ , \quad \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2 \ .$$

母分散の最尤推定値は不偏性を持ちません．

2 対数尤度関数は

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda) = \log \prod \lambda e^{-\lambda x_i} = n\log\lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

であり，これを λ で偏微分して

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} L(x_1,\cdots,x_n,\lambda) = n\frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

より，λ の最尤推定値は次のようになります．

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i}\ , \quad \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

母平均が $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\lambda}$ より，最尤推定値の逆数がサンプル平均で，母平均に対する不偏推定値になっていることがわかります．

3 簡単な計算により

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i<j} X_i X_j$$

となります．したがって期待値の線形性と $X_i, i = 1, \cdots, n$ の独立性から

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}[X_i^2] - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i<j}\boldsymbol{E}[X_i X_j] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i<j}\boldsymbol{E}[X_i]\boldsymbol{E}[X_j] \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

4 データの個数を n とします．有意水準 0.05 の時の採択域と棄却域を示しておきます．

有意水準 0.05 の時の$\left\{\begin{array}{ll} \text{採択域は} & [-t(n-1, 0.05)\ ,\ t(n-1, 0.05)] \\ \text{棄却域は} & (-\infty\ ,\ -t(n-1, 0.05)) \cup (t(n-1, 0.05)\ ,\ \infty) \end{array}\right.$

5 母分散が未知の場合，有意水準 0.05 での次の片側検定について述べます．他のものは省略します．データの個数を n とします．

$$\left\{\begin{array}{ll} H_0 : & \mu = \mu_0\ , \\ H_1 : & \mu < \mu_0 \end{array}\right.$$

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{v}{n}}} \geq -t(n-1,\ 0.1) \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \mu < \mu_0 \text{ とはいえない．} \\ \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を採択．} \end{array}\right.$$

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{v}{n}}} < -t(n-1,\ 0.1) \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \mu < \mu_0 \text{ である．} \\ \text{対立仮説 } H_1 \text{ を採択．} \end{array}\right.$$

6 有意水準 0.05 での検定を行います．

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} = \frac{12.691 - 12}{\sqrt{\dfrac{25}{20}}} = 0.618 < 1.645$$

ゆえに，H_0 は棄却されない．つまり $\mu > 12$ であるとはいえない．

7 有意水準 0.05 での検定を行います．

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{v}{n}}} = \frac{12.691 - 12}{\sqrt{\dfrac{34.843}{20}}} = 0.524 < t(19, 0.1) = 1.729$$

であり，H_0 は棄却されない．つまり $\mu > 12$ であるとはいえない．

8 有意水準 0.05 での次の片側検定について述べておきます．他のものについては省略します．データの個数を n とします．

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \ , \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \ . \end{cases}$$

$$\frac{(n-1)v}{\sigma_0^2} \leq \chi^2(n-1, 0.05) \Longrightarrow \sigma^2 > \sigma_0^2 \text{ とはいえない．} H_0 \text{ を採択する．}$$

$$\frac{(n-1)v}{\sigma_0^2} > \chi^2(n-1, 0.05) \Longrightarrow \sigma^2 > \sigma_0^2 \text{ である．} H_1 \text{ を採択する．}$$

9 記号は等分散性の検定のところで述べたものと同じ意味です．

$$f(n_1-1, n_2-1, 0.995) \leq \frac{v_1}{v_2} \leq f(n_1-1, n_2-1, 0.005)$$
$$\Longrightarrow \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を採択して，対立仮説を棄却}$$
$$\frac{v_1}{v_2} < f(n_1-1, n_2-1, 0.995) \text{ または } f(n_1-1, n_2-1, 0.005) < \frac{v_1}{v_2}$$
$$\Longrightarrow \text{対立仮説 } H_1 \text{ を採択して，帰無仮説を棄却}$$

10 $v_1/v_2 = 0.958727,\ f(9,9,0.975) = 0.248139,\ f(9,9,0.025) = 4.03$ ですから等分散性は棄却されません．

11 (1) 有意水準 0.05 で両側検定を行います．

$$\frac{11-10}{\sqrt{\frac{0.5}{11}}} = 4.690 \quad t(9, 0.05) = 2.262$$

ゆえに，含有量は 10 mg ではないことがわかります．
(2) まず等分散の検定を有意水準 0.05 で行います．

$$\frac{0.3}{0.5} = 0.6, \quad f(9, 10, 0.025) = 3.78,$$
$$f(9, 10, 0.975) = \frac{1}{f(10, 9, 0.025)} = \frac{1}{3.96} = 0.253$$

ゆえ，等分散でないとはいえないので，等分散であるとして母平均が等しいかどうかの検定を行います．

$$t(11+10-2, 0.05) = t(19, 0.05) = 2.093 \ ,$$
$$\frac{\sqrt{11+10-2}\ (11-10.5)}{\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{10}}\ \sqrt{10\cdot 0.5 + 9\cdot 0.3}} = 1.798$$

したがって，12 月と 1 月で含有量に違いがあるとはいえないことになります．

12 (1) 有意水準 0.05 で

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 80, \\ H_1: & \mu > 80 \end{cases}$$

の片側検定を行います．

$$\overline{x} = 81.27,\ v = 1.327,\ n = 10,\ \frac{81.27-80}{\sqrt{\frac{1.327}{10}}} = 3.486,\ t(9, 0.1) = 1.833$$

したがって，録音時間は 80 分より長いとしてよいことがわかります．

(2) 信頼度 0.95 での信頼区間は次のようになります.

$$[81.27 - t(9,0.05)\sqrt{\frac{1.327}{10}}\ ,\ 81.27 + t(9,0.05)\sqrt{\frac{1.327}{10}}] = [80.446\ ,\ 82.094]$$

この信頼区間に 80 が含まれないことからも，録音時間が 80 分より長いとしてよいことがわかります.

13 保全前後を二つの母集団と考え，母集団の比較に関する検定を有意水準 0.05 で行います．まず等分散の検定を行います.

$$f(9,8,0.975) = \frac{1}{f(8,9,0.025)} = \frac{1}{4.10} = 0.244\ , \quad f(9,8,0.025) = 4.36$$

$$\frac{0.1}{0.2} = 0.5\ , \quad f(9,8,0.975) < \frac{0.1}{0.2} < f(9,8,0.025)$$

ゆえに，等分散でないとはいえないので等分散であるとして検定を行います.

$$t(17\ ,\ 0.05) = 2.110\ , \quad \frac{\sqrt{17}\ (1.1-1.3)}{\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{9}}\ \sqrt{9\cdot 0.1 + 8\cdot 0.2}} = -1.135$$

ゆえに，工程に変化があったとはいえません.

14 (1) 有意水準 0.05 で検定を行います.

$$t(9\ ,\ 0.05) = 2.262\ , \quad \frac{1.1-1.0}{\sqrt{\frac{0.1}{10}}} = 1$$

ゆえにガラスコップの肉厚の平均が 1.0 でないとはいえません.

(2) 有意水準 0.05 で検定を行います.

$$t(8\ ,\ 0.05) = 2.306\ , \quad \frac{1.3-1.0}{\sqrt{\frac{0.2}{9}}} = 2.012$$

よってガラスコップの肉厚の平均は 1.0 ではないとはいえません.

12 章の問題解答

1 サンプル相関係数 r は次のようになります.

$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}s_{yy}}} = \frac{-103.36}{\sqrt{120.97\cdot 185.03}} = -0.69$$

(1) $\frac{t(18,0.05)}{\sqrt{t^2(18,0.05)+18}} = 0.44$ であり，したがって相関はあるといえます.

(2) $z = \tanh^{-1} r = -0.85$ より ρ の信頼度 0.95 の信頼区間は次のことから $[\ -0.87\ ,\ -0.36\ ]$ となります.

$$\rho_1 = \tanh\left(z - 1.96\sqrt{\frac{1}{n-3}}\right) = -0.87\ ,$$

$$\rho_2 = \tanh\left(z + 1.96\sqrt{\frac{1}{n-3}}\right) = -0.36$$

(3) $\frac{\tanh^{-1}(r) - \tanh^{-1}(-0.5)}{\sqrt{\frac{1}{n-3}}} = -1.24$ であることから $\rho = -0.5$ でないとはいえません．(2) で求めた信頼区間からも同じ結論が得られます.

2 推定値を求めるために必要な各種の値は以下の通りになります.

$$\overline{x} = 4\ , \quad s_{xx} = 30.8\ , \quad \overline{y} = 8.53\ , \quad s_{yy} = 122.13\ , \quad s_{xy} = 56.17$$

したがって推定値は次の通りです.

$$b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = 1.82\ , \quad a = \overline{y} - b\overline{x} = 1.25\ , \quad v = \frac{s_{yy} - \dfrac{s_{xy}^2}{s_{xx}}}{n-2} = 1.04$$

(1) $\beta = 0$ の検定を行えばよい.

$$\frac{b}{\sqrt{\frac{v}{s_{xx}}}} = \frac{1.82}{\sqrt{\frac{1.04}{30.8}}} = 9.90$$

一方 $t(n-2, 0.05) = t(19, 0.05) = 2.093$ ですから，明らかに $\beta = 0$ ではなく，回帰は存在します.

(2) 信頼度 0.05 の信頼区間は

$$\left[\ 1.82 - 2.093\sqrt{\frac{1.04}{30.8}}\ ,\ 1.82 + 2.093\sqrt{\frac{1.04}{30.8}}\ \right] = [\ 1.44\ ,\ 2.20\ ]\ .$$

(3) (2) で求めた信頼区間から，β が 2 でないとはいえません.

(4) 回帰直線は，$y = 1.25 + 1.82x$ となります.