1.3　無限集合と濃度

1.3.1　有限集合と無限集合

1.1 節で，元の個数が有限の集合を有限集合，無限個の元を持つ集合を無限集合と定義した．では，‘有限’ あるいは ‘無限’ とは何であろうか？ それを考える準備として，まず「元の個数」という概念を一般の集合にまで拡張しておこう．

個数とは $1, 2, \ldots$ と勘定できる (ある数で終わる) ものであるが，無限集合の元はこのようには勘定しきれない．そこで，無限集合の場合も含むように「個数」という概念を一般化したい．それがこれから登場する「濃度」というものである．濃度が具体的にどのようなものであるかを定義するのは後回しにして，「濃度が等しい」とはどういうことであるかという定義から始める．まず、「個数が等しい」ことと「1 対 1 の対応がつけられる」ことは同じであると考えるのは誰もが納得できることであろう．そこで，次のように定義する．

集合 X から集合 Y への全単射 $\varphi\colon X \to Y$ が存在するとき X と Y は**濃度**が等しいといい，$X \sim Y$ と書く．

任意の集合 X, Y, Z に対して次の基本的性質が成り立つ．

● 濃度の等しさに関する性質

(ｉ)	(ａ)	$X \sim X$	(反射律)
	(ｂ)	$X \sim Y \implies Y \sim X$	(対称律)
	(ｃ)	$X \sim Y \land Y \sim Z \implies X \sim Z$	(推移律)
(ii)	(ａ)	$X \times Y \sim Y \times X$	
	(ｂ)	$X \times (Y \times Z) \sim (X \times Y) \times Z$	
	(ｃ)	$X \sim Y \land Z \sim W \implies X \times Z \sim Y \times W$	

上式のうち，例えば(ii)(ｃ)を考えよう．$f\colon X \to Y$, $g\colon Z \to W$ を全単射とすれば，$f \times g\colon X \times Z \to Y \times W$, $(x, z) \mapsto (f(x), g(z))$, も全単射であることが言えるので，$X \times Z \sim Y \times W$ であることが示される．他の式についても読者各自で確かめられたい (問 3.35)．

A が n 個の元からなる有限集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ であるならば，写像 $a_i \mapsto i$ は A から $\{1, 2, \cdots, n\}$ への全単射であるから，$A \sim \{1, 2, \cdots, n\}$ である．後ほど定義することであるが今ここで述べてしまうと，このように $\{1, 2, \cdots, n\}$

と濃度が等しい集合を有限集合と呼び，有限集合の場合，濃度とは元の個数のことである．

〔例 1.13〕 濃度が等しい集合

（1） 元の個数が同じどの有限集合も濃度が等しい．このことは上述の説明から自明であるが，形式的には次のように証明する．$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ を n 個の元を持つ任意の集合とすると，対応 $x_i \mapsto y_i$ は X から Y への全単射であるから $X \sim Y$ である．よって，X と Y (すなわち，元の個数が等しい任意の 2 つの有限集合) の濃度は等しい．

（2） 特性関数の定義のところで述べたように，A の部分集合 X とその特性関数 χ_X とは本質的に同じものである．実際，全単射 $2^A \to \{0,1\}^A$, $X \mapsto \chi_X$ により $2^A \sim \{0,1\}^A$ であることが示される[††]．ただし，問 1.33 で定義したように， B^A は集合 A から集合 B への関数の全体を表わす.

（3） $\boldsymbol{Z}_+ := \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x > 0\}$, $\boldsymbol{Z}_- := \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x < 0\}$ としよう.

- $\boldsymbol{Z}_+ = \boldsymbol{N} - \{0\}$ であるが，全単射 $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z}_+$, $x \mapsto x+1$ によって $\boldsymbol{Z}_+ \sim \boldsymbol{N}$.
- 全単射 $\boldsymbol{Z}_+ \to \boldsymbol{Z}_-$, $x \mapsto -x$ によって $\boldsymbol{Z}_+ \sim \boldsymbol{Z}_-$.
- 全単射 $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{N}$, $x \mapsto 2x$ ($x \geqq 0$ のとき), $x \mapsto 2|x| - 1$ ($x < 0$ のとき) によって $\boldsymbol{Z} \sim \boldsymbol{N}$.

（4） $\sigma\colon \boldsymbol{N}^2 \to \boldsymbol{N}$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}\{(x+y)^2 + 3x + y\}$ は，$\boldsymbol{N}^2$ の元に下図のように番号付けすることを意味している．これは全単射であるから $\boldsymbol{N}^2 \sim \boldsymbol{N}$. 同様な考え方 (原点の周りの点を螺旋状にたどりながら番号付けをする) によって $\boldsymbol{Z}^2 \sim \boldsymbol{N}$ を示すことができる.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x \quad {}^{y} & 0 & 1 & 2 & 6 & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 1 & 3 & 3 & \\
1 & 2 & 4 & 7 & & \\
2 & 5 & 8 & & & \\
\vdots & 9 & & & &
\end{array}
$$

[††] 2^A の '2' は，濃度 (元の個数) 2 を表わし，一方，$\{0,1\}$ の濃度は 2 である．実際，$\{0,1\}$ は，濃度が 2 の集合でありさえすれば何でもよい (χ_X を定義するにあたって，0,1 の代わりに，その 2 元を用いればよい)．これが A の部分集合の全体を 2^A と記す理由である.

（5）　任意の開区間同士，および，それらと $\boldsymbol{R}$ とは濃度が等しい．実際，任意の実数 a, b, c, d に対し，全単射

$$f\colon (a,b) \to (c,d), \quad x \mapsto c + \tfrac{(d-c)}{(b-a)}(x-a)$$

により $(a,b) \sim (c,d)$ であり (下図参照)，$x \mapsto \tan x$ は開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ から $\boldsymbol{R}$ への全単射であるから $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \boldsymbol{R}$ である．

拙著『離散数学』p.18 の図をここに入れる

（6）　任意の開区間，半開区間，閉区間の濃度は等しい．まず，$f\colon [0,1] \to (0,1)$ を次のように定義する．

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \text{ のとき} \\ \frac{1}{n+2} & x = \frac{1}{n}\ (n \text{ は正整数}) \text{ のとき} \\ x & \text{その他の } x \in [0,1] \end{cases}$$

f は全単射である．よって，$[0,1] \sim (0,1)$．同様にして，$[0,1] \sim (0,1]$ も示すことができる．一般の区間の場合は（5）と同様に示すことができる．

（7）　$\boldsymbol{R}^2 \sim \boldsymbol{R}$ であることは次のようにわかる．（5）（6）より $\boldsymbol{R} \sim (0,1]$．$(0,1]$ に属する実数は，例えば $0.2 = 0.1999\cdots$ のように 2 通りの表わし方ができるが，ここでは後者のように無限小数として表わす方を考える．$x, y \in (0,1]$ をこのように表わしたとき，例えば

$$x = 0.63000507\cdots, \quad y = 0.0050800092\cdots$$

としよう．このとき，x, y から交互に，0 以外が現われる桁までを取ってきて，(x,y) に

$$z = 0.6{}_\wedge 005{}_\wedge 3{}_\wedge 08{}_\wedge 0005{}_\wedge 0009{}_\wedge 07{}_\wedge 2\cdots$$

を対応させれば，$(0,1]^2$ から $(0,1]$ への全単射が得られる．したがって，

$(0,1]^2 \sim (0,1]$．一方，$\boldsymbol{R} \sim (0,1]$ だから $\boldsymbol{R}^2 \sim (0,1]^2$ である．これらのことから $\boldsymbol{R} \sim \boldsymbol{R}^2$ であることがわかる．$\sim$ についての基本的性質(ｉ)(ｂ)，(ｉ)(ｃ)，(ii)(ｃ)を使っていることに注意したい． □

● **有限集合/無限集合の定義**　さて，有限集合とは何か，無限集合とは何かを定義しよう．最初の定義はこうである．

ある自然数 n を選べば $X \sim \{1, 2, \cdots, n\}$ となるような集合 X を**有限集合**といい，どんな自然数 n に対しても $X \sim \{1, 2, \cdots, n\}$ でないような集合 X を**無限集合**という (注：$n = 0$ のとき，$\{1, 2, \cdots, n\}$ は空集合を表わす)．

この定義の下で，$\boldsymbol{N}$ が無限集合であること は次のように証明できる．任意の $n \in \boldsymbol{N}$ と任意の関数 $f : \{1, 2, \cdots, n\} \to \boldsymbol{N}$ を考える．

$$k := 1 + \max\{f(1), f(2), \cdots, f(n)\}$$

とすると $k \in \boldsymbol{N}$ であり，任意の $x \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して $f(x) \neq k$ である．よって，f は全射ではないから全単射でもない．n も f も任意に選んでこのことが言えたのだから，どの $n \in \boldsymbol{N}$ に対しても $\{1, 2, \cdots, n\} \sim \boldsymbol{N}$ ではない．

もう一つの無限集合の定義は，集合論の創始者である G. Cantor(カントール)の良き理解者であった今世紀初頭の大数学者の一人 J.W.R. Dedekind(デデキント)によるものである．集合 X から X の真部分集合 Y への全単射 f が存在するとき (すなわち，f が単射かつ $f(X) \subsetneqq X$ のとき) X は**デデキント無限**であるといい，そうでないとき**デデキント有限**であるという．例えば，$f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ を $f(x) = 2x$ で定義すると f は単射で $f(\boldsymbol{N}) \subsetneqq \boldsymbol{N}$ であるから，$\boldsymbol{N}$ はデデキント無限である．

$\mathcal{S}$ は，空でない集合を元とする集合とする．$\mathcal{S}$ の元であるすべての集合から 1 つずつ元を取ってきて (S から取る元を S_x としよう)，それらを元とする集合 $\{S_x \mid S \in \mathcal{S}\}$ を作ることができるのは当然であると思われよう．しかし，これが必ずしも自明とは言い難いことは E. Zelmelo(ツェルメロ)によって初めて指摘され (1904 年)，以来，これが成り立つとする命題のことを**選択公理**とか選出公理と呼んでいる．今日の数学は特定の例外を除き，この選択公理が成り立つという仮定の下で構築されていると考えてよい．選択公理を仮定すると，上に述べた無限に関する 2 つの定義は一致することが証明できる．以後，本書でも選択公理を仮定する．

〔例 1.14〕　有限集合/無限集合であることの証明

（1）　例 1.13 の直前で述べたように，元の個数が n である集合 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ は有限集合である．

（2）　$f : A \to B$ が単射で A が無限集合ならば B も無限集合である．このことは次のようにして示すことができる．A は無限集合なので単射 $g : A \to A$ で $g(A) \subsetneqq A$ であるものが存在する．f と g の合成 $f \circ g : A \to B$ は定理 1.2 の (3) により単射であり，$g(A) \subsetneqq A$ であるから $f \circ g(A) \subsetneqq f(A) \subseteqq B$ である．

このことを使うと，例えば，$\{0,1\} \times \boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}^2$ などが無限集合であることを次のように証明することができる．まず，$\boldsymbol{R} \to \{0,1\} \times \boldsymbol{R}$，$x \mapsto (0,x)$ が単射であり，すでに証明したように $\boldsymbol{R}$ が無限集合であるから $\{0,1\} \times \boldsymbol{R}$ も無限集合である．また，同様な単射 $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$，$x \mapsto (0,x)$ により $\boldsymbol{R}^2$ も無限集合であることがわかる．

（3）　$A \sim B$ とするとき，A が有限集合なら B も有限集合であり，A が無限集合なら B も無限集合である．なぜなら，$A \sim B$ なら A から B への全単射 f が存在する．もし A が有限集合なら，自然数 n と全単射 $g : A \to \{1, \ldots, n\}$ が存在する．定理 1.3 (3) より，f が全単射ならその逆関数 f^{-1} も全単射であり，かつ，全単射の合成は全単射であるから，$g \circ f^{-1} : B \to \{1, \ldots, n\}$ は全単射である．よって，B は有限集合である．

A が無限集合の場合，f は A から B への単射でもあるから，上記（2）により，B も無限集合である．このことを使うと，すでに見たように $\boldsymbol{R} \sim (0,1)$ であり $\boldsymbol{R}$ が無限集合であるから，$(0,1)$ も無限集合である．

（4）　A, B が集合で，A が無限集合であるならば，（a）2^A も（b）$A \cup B$ も無限集合である．また，$B \neq \emptyset$ ならば，（c）$A \times B$ も（d）A^B も無限集合である．これらのことを示そう．

（a）　関数 $f : A \to 2^A$ を $f(x) = \{x\}$ で定義すると，f は単射だから上記（2）によって，A が無限集合なら 2^A も無限集合である．

（b）　恒等関数 id_A は A から $A \cup B$ への単射だから．

（c）　$B \neq \emptyset$ だから $b \in B$ が存在する．この b に対して関数 $g : A \to A \times B$，$a \mapsto (a,b)$ は全単射である．

（d）　$a \in A$ に関数 $h_a : B \to A$，$x \mapsto a$ を対応させる関数 $h : A \to A^B$ は単射である．　□

1.3.1 節　理解度確認問題

問 1.34　次の集合は有限集合か，無限集合か？

（1）　文法的に正しい日本語の文章の全体　（2）　$2^{\emptyset}$

（3）　$\{0,1\}$ から $\boldsymbol{N}$ への写像の全体　（4）　$\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$

（5）　有限集合すべての共通部分　（6）　有限集合の全体

（7）　$\boldsymbol{N}$ の部分集合である有限集合すべての集合

（8）　$\boldsymbol{N}$ の部分集合である無限集合すべての集合

問 1.35　集合の濃度に関する性質(ⅰ),(ⅱ)を証明せよ．

問 1.36　例 1.13 (7) において，対応 $(x,y)\mapsto z$ は全単射であることを確かめよ．また，x,y の小数第 i 位をそれぞれ x_i, y_i とするとき，(x,y) に $z=0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots$ を対応させる関数は全単射ではないことを示せ．

問 1.37　次のことを示せ．

（1）　$(0,1)\sim(1,2)$　（2）　$(0,1)\sim[-10,10]$

（3）　$(0,1)\sim(0,\infty)$　（4）　$(0,1)\sim[0,\infty)$

（5）　奇数の全体 $\sim$ 偶数の全体 $\sim$ $\boldsymbol{N}$ (自然数の全体)

（6）　任意の $a,b\in\boldsymbol{R}$ に対して，$(-\infty,a)\sim(b,\infty)\sim(a,b)$

問 1.38　‘無限’ の定義に従って次のことを証明せよ．

（1）　$A'\subsetneqq A$ で，A' が無限集合なら A も無限集合である．

（2）　$A'\subsetneqq A$ で，A が有限集合なら A' も有限集合である．

（3）　$\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}$ はそれぞれ無限集合である．

問 1.39　（1）　$f: A\to B\ (\neq\emptyset)$ が全射で，A が有限集合なら B も有限集合であることを示せ．

（2）　A,B が有限集合なら 2^A，$A\cup B$，$A\times B$，A^B もそれぞれ有限集合であることを示せ．

問 1.40　A が無限集合で B が有限集合なら $A-B$ は無限集合であることを示せ．B も無限集合の場合にはどうか？

問 1.41　（1）　次の論法はどこがいけないか？

「$\boldsymbol{N}$ の部分集合は, $\emptyset$, $\{0\}$ の部分集合すべて, $\{0,1\}$ の部分集合すべて, $\{0,1,2\}$ の部分集合すべて，$\cdots$ とすればすべて枚挙できるので $2^{\boldsymbol{N}}\sim\boldsymbol{N}$ である.」

（2）　$2^{\boldsymbol{N}}\sim\boldsymbol{R}$ であることを示せ．