

1.3.2 濃 度

2つの集合の「濃度が同じである」という概念は1.3.1節の冒頭で述べたような基本的性質 $(i \times a) \sim (c)$ を満たし^{*}、そのことから、 $\sim$ の関係にあるようなどんな集合も濃度が同じであると定義した。そこで、 $|\cdot|$ を

$$|X| = |Y| \stackrel{\text{def}}{\iff} X \sim Y$$

と定義し、 $|X|$ を X の濃度と呼ぶ(つまり、集合 X の濃度を $|X|$ で表わす)。すでに述べたように、集合の濃度とは、有限集合における「元の個数」という概念を、無限集合も含む任意の集合にまで一般化したものである。

集合 X の濃度が N または N の部分集合と等しいとき、 X を可算集合とか可付番集合という。とくに、 $X \sim N$ (すなわち、 $|X| = |N|$)であるとき、 X は可算無限であるという。可算無限集合の濃度を $\aleph_0$ (アレフ・ゼロと読む)で表わす[†]。有限集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の濃度を n で表わす：

$$|\{1, 2, \dots, n\}| := n.$$

[例 1.15] 可算(無限)集合

- (1) $\{a, b, c, x, y\} \sim \{1, 2, 3, 4, 5\}$ なので $|\{a, b, c, x, y\}| = 5$.
- (2) 任意の有限集合 $\{x_1, \dots, x_n\}$ (元はすべて異なる)は全単射 $x_i \mapsto i$ により $\{x_1, \dots, x_n\} \sim \{1, \dots, n\}$ であるから、 N の部分集合 $\{1, \dots, n\}$ と濃度が等しい。よって、有限集合は可算集合である。
- (3) $N \sim N$ であるから $|N| = \aleph_0$ である。
- (4) 例 1.13 で見たように、 $Z \sim N \sim N^2$ であるから $|Z| = |N^2| = \aleph_0$ である。これと(3)より、 N, N^2, Z は可算無限集合である。□

● 枚挙[‡] $X \sim N$ ならば全単射 $f: X \rightarrow N$ が存在し、どの $n \in N$ に対しても $f(x) = n$ となる $x \in X$ がちょうど1つ存在し、また、どの $x \in X$ に対しても $f(x) = n$ となる $n \in N$ がちょうど1つ存在する。このことは、 X の

^{*}これら3つの性質が成り立つような $\sim$ を同値関係という。同値関係については3章で詳しく学ぶ。

[†] $\aleph$ はヘブライ語のアルファベットの第1文字。

[‡]enumeration. 0, 1, 2, ... (1, 2, 3, ... でもよい) と 番号を振って並べ挙げる こと。

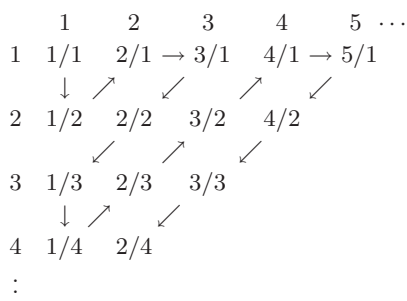
すべての元に 0 から始まる番号 (x の番号は $f(x)$) を一意的に付けることができることを意味している．また， $X = \{f^{-1}(0), f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots\}$ で，かつ $i \neq j$ なら $f^{-1}(i) \neq f^{-1}(j)$ である．このことは， X の元は f^{-1} によって重複することなく枚挙されることを意味している．

また， N の任意の部分集合 M の元は， $0, 1, 2, \dots$ と自然数すべてを並べた中から M の元であるものだけを残せば小さいものから順にすべてを枚挙することができる．それを $\langle m_0, m_1, m_2, \dots \rangle$ とする．写像 $f: i \mapsto m_i$ は全単射であり， M の元を重複することなく枚挙する． $X \sim M$ ならば $M \sim X$ なので全単射 $g: M \rightarrow X$ が存在し $X = \{g \circ f(0), g \circ f(1), \dots\}$ である．すなわち， $g \circ f$ によって X の元は重複することなく枚挙される．

以上見たように，可算 (可付番) 集合という名称は，「すべての元に $0, 1, 2, \dots$ と番号を振って並べ挙げることができる集合」というところに由来する．

[例 1.16] 可算集合とはすべての元を枚挙することができる集合のこと

(1) 正の有理数全体の集合を Q_+ で表わす． Q_+ に対しては下図のような (重複する) 枚挙があるので， Q_+ は可算集合である．枚挙の途中で，すでに枚挙した元が再び出現したときにはそれをスキップすれば重複のない枚挙が得られることに注意する．



Q_+ は有限集合ではないから (問 1.38 参照) 可算無限集合である．同様な考え方で， Q も可算無限集合であることを示すことができる．

(2) 可算集合の可算個の和集合は可算集合である．すなわち， $i = 0, 1, \dots$ に対してそれぞれの A_i が可算集合なら， $A := \bigcup_{i \geq 0} A_i$ もそうである．これは次の図のように A の元を (重複して) 枚挙できることからわかる．

A_i の右に書いた $\langle a_{i0} \rightarrow a_{i1} \rightarrow a_{i2} \rightarrow \dots \rangle$ は A_i の枚挙を表わし， $\rightarrow$ ， $\swarrow$ ， $\nearrow$

を合わせたものが A の枚挙を表わしている．また， A_i が有限集合の場合には， A_i の元が尽きた時点で $\rightarrow$ による枚挙から外すものとする．これにより， $A_0, A_1, \dots$ のうちに可算無限集合が 1 つ以上あれば A も可算無限集合であることがわかる． $\square$

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_0 & \langle a_{00} & \rightarrow a_{01} & a_{02} & \rightarrow a_{03} & \cdots \rangle \\
 & \swarrow & & \nearrow & \swarrow & \nearrow \\
 A_1 & \langle a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \rangle \\
 & \downarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \\
 A_2 & \langle a_{20} & a_{21} & \rightarrow a_{22} & a_{23} & \cdots \rangle \\
 & \vdots & & & &
 \end{array}$$

● 可算でない集合　すでに見たように， $N \subsetneq Z \subsetneq Q$ であるのに $|N| = |Z| = |Q|$ であった．全ての無限集合は可算集合なのであろうか？ 答は no である．例えば，実数の全体 R は可算集合ではない．

定理 1.4 実数の半开区間 $(0, 1]$ は可算集合ではない．

証明 任意の $x \in (0, 1]$ は無限小数として一通りに表わされることを使う．ただし， x が有限小数 $0.x_1x_2\cdots x_n$ ($x_n \neq 0$, x_i は小数第 i 位) の場合には， $x = 0.x_1x_2\cdots x_n00\cdots = 0.x_1x_2\cdots(x_n - 1)99\cdots$ と 2 通りの表わし方があるが，後者の表わし方を使うこととする．また， 1.0 は $0.999\cdots$ と表わす．

さて， $(0, 1]$ は明らかに有限集合でない． $(0, 1]$ が可算無限集合だとすると N から $(0, 1]$ への全単射 f が存在する．小数 $f(n) \in (0, 1]$ の小数第 $i + 1$ 位を x_{ni} とすると， $(0, 1]$ の元は次のように枚挙することができる：

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(0) & = & 0.x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0n} \cdots \\
 & & \searrow & & & & \\
 f(1) & = & 0.x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \cdots \\
 & & & \searrow & & & \\
 & & \vdots & & \ddots & & \\
 f(n) & = & 0.x_{n0} & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \cdots \\
 & & \vdots & & & \searrow &
 \end{array}$$

次のような小数 $y = 0.y_0y_1y_2\cdots$ を考える :

$$y_i := \begin{cases} 1 & x_{ii} \neq 1 \text{ のとき} \\ 2 & x_{ii} = 1 \text{ のとき} . \end{cases}$$

明らかに $y \in (0, 1]$ であるから , $y = f(m)$ となる $m \in N$ が存在するはずである . ところが , どの $i \in N$ についても $y_i \neq x_{ii}$ であるから $y \neq f(i)$. これは矛盾である . よって , $(0, 1]$ は可算無限集合ではない . $(0, 1]$ は有限集合でもなかったから , $(0, 1]$ は可算集合ではない . $\square$

前ページの図のように , 枚挙された元のどれとも対角線上の位置で異なるような新しい元を作ってみせる , というこの論法は , 集合論の創始者である G. Cantor^{カントール}によって考え出されたもので , カントールの対角線論法と呼ばれる . $R \sim (0, 1]$ であったから (例 1.13) , 次の系が得られる .

系 1.5 R は可算集合ではない .

R の濃度を $\aleph$ ^{アレフ} とか c で表わし , 連続の濃度(あるいは連続体の濃度) という .

ところで , 濃度をあたかも数のように考え , それらの間に演算を定義してみよう . はじめに , 次のことに注意する . $X \sim X'$, $Y \sim Y'$ であるような任意の集合 X, X', Y, Y' に対して

- (i) $X \cap Y = \emptyset$, $X' \cap Y' = \emptyset$ のとき , $X \cup Y \sim X' \cup Y'$
- (ii) $X \times Y \sim X' \times Y'$
- (iii) $X^Y \sim X'^{Y'}$

が成り立つことが証明できる (問題 1.44) . これらのことは , $|X \times Y|$ も $|X^Y|$ も $|X|$ と $|Y|$ だけで定まること , また , $|X \cup Y|$ も $X \cap Y = \emptyset$ であるような $|X|, |Y|$ だけで定まることを示している . そこで , 次のように定義する .

- 和 $X \cap Y = \emptyset$ で , $m = |X|$, $n = |Y|$ ならば $m + n = |X \cup Y|$
- 積 $m = |X|$, $n = |Y|$ ならば $m \cdot n = |X \times Y|$
- 累乗 $m = |X|$, $n = |Y|$ ならば $m^n = |X^Y|$

〔例 1.17〕 濃度の上の演算

(1) $m = |A|$ とする. $X = \{1\} \times A$, $Y = \{2\} \times A$ とすると, $X \cap Y = \emptyset$ で $X \cup Y = \{1, 2\} \times A$ である. 濃度の和の定義より, $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ であるから, $2 \cdot m = 1 \cdot m + 1 \cdot m = m + m$.

(2) $A^{\{1\}} \times A^{\{2\}} \sim A^{\{1,2\}}$ であることは, 関数 $p_1: \{1\} \rightarrow A$ と関数 $p_2: \{2\} \rightarrow A$ の対 (p_1, p_2) に関数 $p: \{1, 2\} \rightarrow A$, $1 \mapsto p_1(1)$, $2 \mapsto p_2(2)$ を対応させると, この対応が $A^{\{1\}} \times A^{\{2\}}$ から $A^{\{1,2\}}$ への全単射になることからわかる. このことから,

$$m^1 \cdot m^1 = m \cdot m = m^2.$$

(3) 例 1.13 (3) で見たように $N = Z_+ \cup \{0\} \sim Z_+$ であるから, $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$. また, $Z \sim N \sim Z_-$, $Z = N \cup Z_-$, $N \cap Z_- = \emptyset$ であることより $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ が示され, $N^2 \sim N$ より $\aleph_0^2 = \aleph_0$ が示される. 無限の濃度ではこういう奇妙な等式の成り立つことが有限の濃度と違うところである. この他に, 例えば次のようなことが成り立つ.

$$\aleph_0 + \aleph = \aleph + \aleph = \aleph, \quad \aleph_0 \cdot \aleph = \aleph \cdot \aleph = \aleph.$$

$$2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} = \aleph, \quad 2^{\aleph} = \aleph_0^{\aleph} = \aleph^{\aleph}.$$

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph < 2^{\aleph} < 2^{2^{\aleph}} < \dots.$$

(4) 任意の集合 X について, $2^X \sim \{0, 1\}^X$ なので, $|2^X| = 2^{|X|}$. $\square$

「どんな無限濃度 m に対しても, $m < n < 2^m$ となる濃度 n は存在しない」と考えられている[§]. これを一般連続体仮説といい, とくに, $m = \aleph_0$ の場合を連続体仮説という. ZF と呼ばれる公理的集合論 (集合とは何かを公理と推論の方法を規定して厳密に定義する理論) においては, ZF が矛盾を含んでいない限り, 選択公理 (あるいはその否定) を公理として付け加えても, また, ZF + 選択公理に連続体仮説 (あるいはその否定) を付け加えても矛盾は起こらないことが知られている.

[§] X から Y への単射が存在するとき $|X| \leq |Y|$ であると定義する. また, $|X| < |Y| \stackrel{\text{def}}{\iff} |X| \leq |Y| \wedge |X| \neq |Y|$.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX 1.3.2 節 理 解 度 確 認 問 題 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

問 1.42 次の各々は可算無限集合であることを示せ．

- (1) $A := \{\sqrt{x} \mid x \in \mathbf{N}\}$ (2) 素数の全体
 (3) 有理係数の 2 次方程式すべて $\{ax^2 + bx + c = 0 \mid a, b, c \in \mathbf{Q}, a \neq 0\}$
 (4) 1 次不定方程式 $5x - 4y + 3z = 21$ の整数解 (x, y, z) の全体

問 1.43 区間 $(0, 1)$ の実数のうち，その小数部分が 0 と 1 しか含まないようなものの全体を B とする． B は可算集合でないことを示せ．

問 1.44 $X \sim X', Y \sim Y'$ とする．次のことを示せ．

- (1) $X \cap Y = \emptyset, X' \cap Y' = \emptyset \implies X \cup Y \sim X' \cup Y'$
 (2) $X \times Y \sim X' \times Y'$ (3) $X^Y \sim X'^{Y'}$

問 1.45 次の各々は連続の濃度を持つことを示せ．

- (1) 円周 $C := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\}$
 (2) 円の内部 $D := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 < 1\}$
 (3) 球面 (4) $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$ (5) $2^{\mathbf{Z}}$
 (6) $\mathbf{N}$ の無限部分集合の全体 ($\mathbf{N}$ の有限部分集合の全体はどうか?)

問 1.46 任意の集合 A, B の濃度 $|A|, |B|$ に関して次のことを示せ．

- (1) $A \subseteq B$ なら $|A| \leq |B|$.
 (2) A が有限集合で $A \subsetneq B$ なら $|A| < |B|$.
 (3) $A \subsetneq B$ かつ $|A| = |B|$ であるような A, B が存在する．

問 1.47 次の集合の濃度を求めよ．

- (1) $\{0, 1\}$ から $\mathbf{N}$ への関数全体 (2) $\mathbf{N}$ から $\{0, 1\}$ への関数全体
 (3) $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への関数全体 (4) $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への単調増加関数全体
 (5) $\mathbf{R}^3$ 空間内の球全体 (6) 平面 $\mathbf{R}^2$ 上の原点を通る直線全体

問 1.48 任意の集合 X に対し， $|X| < |2^X|$ であることを証明せよ．

記号のまとめ (1.3 節)

$X \sim Y$	集合 X と Y の濃度が等しい
$\sigma: \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$	対関数 (自然数の対に自然数を 1 対 1 対応させる)
$ X $	集合 X の濃度
$\aleph_0, \aleph$	可算無限の濃度，連続の濃度