# 1.4 行　列

### 1.4.1 行 列 と は

$mn$ 個の実数 $a_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ を次のように矩形状に配置した $A$ のことを (実数を成分とする) **行列**といい，$a_{ij}$ を $A$ の $(i,j)$ **成分**という*：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

これを $A = (a_{ij})$ と表記することがある．

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}$$

を $A$ の第 $i$ **行**といい，

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$$

を $A$ の第 $j$ **列**という．また，$A$ は $m \times n$ **行列**であるとか，$(m,n)$ 型行列であるとか，$m$ 行 $n$ 列の行列であるいう．とくに，$n \times n$ 行列のことを $n$ **次正方行列**という．

$$\boldsymbol{a}_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

を $A$ の列ベクトルともいい，$A$ は

$$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) \quad \text{または} \quad A = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)$$

と表わすこともある．

すべての成分が $0$ である行列を $O$ で表わし，零行列（ぜろぎょうれつ）という．

---

*行列：matrix.「網目状のもの」の意．成分：element, entry, component．

2 つ行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ が等しい ($A = B$ と記す) とは，両方の型 ($m \times n$ 型) が一致し，かつすべての成分が等しい (すなわち，任意の $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq n$ に対して $a_{ij} = b_{ij}$ である) 場合をいう.

**● 行列の和・スカラー倍**　$m \times n$ 行列 $A$, $B$ と $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，和 $A + B$ とスカラー倍 $\lambda A$ を次のように定義する[†]：

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

**● 和とスカラー倍の性質**

$A, B, C$ を $m \times n$ 行列とし，$\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ とする.

(1)　$(A + B) + C = A + (B + C)$　(+ の結合律)

(2)　$A + O = A = O + A$　($O$ は + の単位元)

(3)　$A + A' = O = A' + A$ となる $m \times n$ 行列 $A'$ が存在する
　($A' = (-1)A$)　($A'$ は + の逆元)

(4)　$A + B = B + A$　(+ の可換律)

(5)　$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
　$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$　(分配律)

(6)　$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$　(スカラー倍の結合律)

(7)　$1A = A$　(1 はスカラー倍の単位元)

(8)　$0A = O$

$(-1)A$ を $-A$ と略記する．また，$A + (-1)B$ を $A - B$ と書いて，$A$ と $B$ の**差**という.

---

[†]スカラー (scalor) は，行列と区別するために用いる用語.

● **行列の積**　行列の積は限られた型の場合にだけ定義される．$l \times m$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $m \times n$ 行列 $B = (b_{ij})$ の積 $AB = (c_{ij})$ を

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

で定義する．

**〔例 1.18〕**　行列の和，差，積，累乗，スカラー倍

（1）　$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

のとき，

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 20 & 11 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ -9 & -4 & -6 & -6 \end{pmatrix}, \quad 3B = \begin{pmatrix} 15 & 30 & 45 & 30 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \\ -6 & -12 & -18 & -12 \end{pmatrix}$$

である．

（2）　$X = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 \\ 4 & 2 & 8 \\ -2 & 10 & 0 \end{pmatrix}$,　$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，

$$XY = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 14 & 14 \\ 4 & 6 & 12 & 12 \\ -2 & 8 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$　また，$X = 2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ なので，

$$X^2 = 2^2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^2 = 4 \begin{pmatrix} -11 & 24 & -6 \\ 0 & 15 & 16 \\ 9 & 8 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 & 96 & -24 \\ 0 & 60 & 64 \\ 36 & 32 & 56 \end{pmatrix}$$

である．ここで，$X^n$ は $\overbrace{XX\cdots X}^{n}$ を表わし，$X$ の $n$ **乗**という．とくに，$X^0 = E_n$ を次ページのように定義すると，任意の $n$ 次正方行列 $X$ に対して，

$$XE_n = X = E_nX, \quad X^n = XX^{n-1}\ (n \geqq 1)$$

が成り立つ．$E_n$ を $n$ 次元の**単位行列**といい，$E_n$ の代わりに単に $E$ と書くことが多い[‡]．

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

### ● 行列の積の性質

> $A, A'$ を $k \times l$ 行列，$B, B'$ を $l \times m$ 行列，$C$ を $m \times n$ 行列，$O_{kl}$ を $k \times l$ 型の零行列とし，$\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ とする．
>
> (1)　$(AB)C = A(BC)$.　(結合律)
>
> (2)　$A(B + B') = AB + AB'$,　$(A + A')B = AB + A'B$　(分配律)
>
> (3)　$(\lambda A)(\mu B) = \lambda\mu(AB)$　(スカラ倍)
>
> (4)　$AO_{lm} = O_{km}$,　$O_{kl}B = O_{km}$　(零行列)
>
> (5)　$E_k A = A = AE_l$　($E$ は積の単位元)

**〔例 1.19〕**　行列の積は数の積とは異なる性質がある

（1）　$AB$ が定義できても $BA$ が定義できるとは限らない．両方とも定義できるのは，$A$ が $l \times m$ 型，$B$ が $m \times l$ 型の行列の場合であり，その場合でも $AB = BA$ が成り立つとは限らない．例えば，

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

のとき，

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 23 & 10 \end{pmatrix}$$

であるから，$AB \neq BA$ である．

（2）　任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し，$(\lambda A)^n = \lambda^n A^n$ が成り立つ (なぜか？ 問 1.52 参照)．

---

[‡]単位行列 : E は Eigenmatrix (ドイツ語) の頭文字．identity matrix (英語) の頭文字を取って $I_n$ と表わすこともある．$E_n$ や $I_n$ は単に $E$ とか $I$ と略記することが多い．

（3）　$AB = BA$ ならば，行列の積は結合律を満たすので，$(AB)^n = A^n B^n$ が成り立つ．

（4）　$A, B$ が次元の同じ正方行列であっても $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ は一般には成り立たないが，$AB = BA$ である場合には成り立つ．なぜなら，

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) && \text{(2 乗の定義)}\\ &= (A+B)A + (A+B)B = (AA+BA) + (AB+BB) && \text{(上記の性質 (2) 分配律)}\\ &= (A^2+AB) + (AB+B^2) && \text{(2 乗の定義，AB=BA)}\\ &= A^2 + (AB+AB) + B^2 = A^2 + 2AB + B^2. && \text{(+の結合律，行列の和の定義，スカラ倍の定義)}\end{aligned}$$ □

● **転置行列**　$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し，$(i, j)$ 成分が $a_{ji}$ であるような $n \times m$ 行列を $A$ の**転置行列**といい，${}^tA$ で表わす[§]．

**〔例 1.20〕**　転置行列，対称行列，交代行列

（1）　$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$ のとき，${}^tA = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 12 & 22 \\ 13 & 23 \end{pmatrix}$ である．

（2）　ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ に対し，**内積** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ を次のように定義する：

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{a} = (a_1 \ \cdots \ a_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(a_1 \ \cdots \ a_n) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}.$$

（3）　$A = {}^tA$ を満たす行列 $A$ を**対称行列**といい，$A = -{}^tA$ を満たす行列 $A$ を**交代行列**という[¶]．$A + {}^tA$ は対称行列であり，$A - {}^tA$ は交代行列である　□

● **転置行列の性質**

| | |
|---|---|
| (1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ | (2) ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$ |
| (3) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ | (4) ${}^t({}^tA) = A$ |

---

[§]転置行列：transposed matrix．${}^tA$ の $t$ はその頭文字．

[¶]対称行列：symmetric matrix．交代行列：alternating matrix．