

1.4.2 連立 1 次方程式と行列

x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ \quad 3y + 2z = 0 \\ x - y + 3z = 12 \end{cases} \quad (1.3)$$

を考える．係数の行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ と未知数のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と

定数項のベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ を使うと，(1.3) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表わすことができる．一般に， $x_1, x_2, \dots, x_n$ を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.4)$$

は， $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ を使って，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (1.5)$$

と表わすことができる．

$m < n$ の場合には，未知数の個数よりも方程式の個数の方が少ないので，解 $x_1, \dots, x_n$ は一意的には定まらない． $m \geq n$ の場合には，解が一意的に定まる場合と定まらない場合がある．その理由を考えてみよう．

連立方程式 (1.3) の解 $x_1, \dots, x_n$ が次の性質を持っていることは容易にわかる．

1. ある方程式の左右両辺を何倍かする．こうして得られた方程式を元の方程式と置き換えても，解 $x_1, \dots, x_n$ は変わらない．
2. 2つの方程式を辺々加える．こうして得られた方程式を，元の2つの方程式のどちらか一方と置き換えても，解 $x_1, \dots, x_n$ は変わらない．
3. 任意の2つの方程式を入れ替えても，解 $x_1, \dots, x_n$ は変わらない．

これらの性質を使って，我々は連立方程式を次のように解くことを中学校で習った．

1. 2つの方程式において，ある未知数の係数の絶対値を等しくするために，一方の方程式の両辺を何倍かする．例えば，(1.3)において，第3行を3倍すると，第1行と第3行の x の係数が等しくなる．
2. 1で得た2つの方程式を辺々引く（絶対値が等しく符号が異なる場合には辺々加える）．こうして得られた方程式では未知数が1つ少なくなっている．元の2つの方程式のうちの一方を，未知数が少なくなった方程式で置き換える．
3. 操作1, 2によって新しく得られた連立方程式に1, 2の操作を繰り返し適用して，未知数の個数が1個だけの方程式を求める（すなわち，ある未知数の解が求まる）．
4. 1~3を繰り返せば，すべての未知数 $x_1, \dots, x_n$ の解が求められる．

〔例 1.21〕 連立1次方程式の解法

(1.3) を上述の方法で解いてみよう．

step 0：解きたい連立方程式は以下の通り．

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ \quad \quad 3y + 2z = 0 \\ x - y + 3z = 12 \end{cases}$$

step 1：第3行を3倍する．

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ \quad \quad 3y + 2z = 0 \\ 3x - 3y + 9z = 36 \end{cases}$$

step 2：第1行から第3行を引き，第3行と置き換える．

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ \quad \quad 3y + 2z = 0 \\ \quad \quad 5y - 8z = -34 \end{cases}$$

step 3: 第 2 行を $\frac{5}{3}$ 倍する.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ 5y + \frac{10}{3}z = 0 \\ 5y - 8z = -34 \end{cases}$$

step 4: 第 3 行から第 4 行を引き, 第 3 行と置き換える.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ 5y + \frac{10}{3}z = 0 \\ \frac{34}{3}z = 34 \end{cases}$$

step 5: 第 3 行を $\frac{3}{34}$ 倍する.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ 5y + \frac{10}{3}z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

step 6: 第 2 行を $\frac{3}{10}$ 倍する.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ \frac{3}{2}y + z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

step 7: 第 2 行から第 3 行を引き, 第 2 行と置き換える.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ \frac{3}{2}y = -3 \\ z = 3 \end{cases}$$

step 8: 第 2 行を $\frac{2}{3}$ 倍する.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

以下, これを繰り返して, $(x, y, z) = (1, -2, 3)$ が得られる. すなわち,

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

が最終的に得られる. これは, 係数行列 A に次のページに述べるような操作を施せば, 最後に

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{一般に, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \text{の解} \\ \vdots \\ x_n \text{の解} \end{pmatrix}$$

が得られることを意味している (ただし, 解が存在する場合).

● 行列の基本変形*

1. ある行に 0 でない定数を掛ける.
2. ある行を別の行に加える.
3. 2つの行を入れ替える.
4. 2つの列を入れ替える.

では、行列の基本変形によって上述のように解が求められるのはどんな場合であろうか？

定理 1.6 どんな $m \times n$ 行列も、基本変形 1.~4. によって次の形 (標準形) に変形することができる. ここで, $*$ は適当な実数を表わす.

$$r \text{ 行 } \left\{ \begin{array}{cccccc} \overbrace{\hspace{2cm}}^{r \text{ 列}} & & & & & \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

定理 1.6 において、基本変形に 4. (2つの列の入れ替え) も含めている理由は、ある未知数の解が一意的に定まらない場合もあるので、そのような未知数に対応する列を入れ替えて、解が一意的に定まる未知数の係数だけが行列の左上に来るようにする必要があるからである. 列の入れ替えをしても連立方程式 (1.5) の解 $x_1, \dots, x_n$ が変わらない ($x_1, \dots, x_n$ の順序が変わるだけ) であることは明らかである.

*1.~3. は行に関する基本変形であるが、通常、1.~3. の「行」を「列」に置き換えたものも基本変形という. 行に関する基本変形と同様に、そういった列に関する基本変形も行列の階数を変えない. ここでは、列に関する基本変形のうち、4. だけを基本変形に含めている.

定理 1.6 における r は行列 A に対して一意である. この r を A の**階数**[†]といい,

$$\text{rank} A$$

で表わす*. これは, 係数行列が A (n 次正方行列) である連立方程式 ((1.5) において $m = n$ である場合) の階数が r ならば, r 個の未知数については解が一意に定まることを意味する. とくに, $\text{rank} A = n$ ならば, すべての未知数 $x_1, \dots, x_n$ の解が一意に求められる. 実際, 次の定理が成り立つ.

定理 1.7 A を n 次正方行列とする. このとき, 次が成り立つ.

$\text{rank} A = n \iff BA = E_n = AB$ を満たす行列 B が存在する.

定理 1.7 の行列 B を A の**逆行列**[‡]といい,

$$A^{-1}$$

で表わす. 係数の行列 A が正則 (n 次正方行列) である n 元 1 次連立方程式

$$Ax = b \quad (1.6)$$

の解は, (1.6) の両辺に左から A^{-1} を掛けると

$$A^{-1}Ax = Ex = x = A^{-1}b$$

と求めることができる. ただし, **正則行列**とは逆行列を持つ行列のことである. 逆行列は次の性質を満たす.

● 逆行列の性質

以下, A, B は正則な正方行列とする.

- (1) $A^{-1}A = E = AA^{-1}$.
- (2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (3) $(A^{-1})^{-1} = A$.

[†]階数: rank. 行列の階数は, 1 次独立な行の個数 (= 1 次独立な列の個数) に等しい. このことについては, 第 7 章で述べる.

[‡]逆行列: inverse matrix. 正則行列: regular matrix.

● 階数の性質

- (1) $\text{rank } {}^tA = \text{rank } A$.
 (2) B, C が正則行列ならば, $\text{rank } BA = \text{rank } A = \text{rank } AC$.

〔例 1.22〕 基本変形により標準形へ変換する

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ を基本変形によって標準形に変形しよう.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行} \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行} \times (-1)}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行} + \text{第1行}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第3行} + \text{第1行}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2行} \times \frac{1}{2}, \text{第3行} \times (-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第3行} + \text{第2行}, \text{第1行} \times (-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行} + \text{第2行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2} \cdot \text{3列入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって, $\text{rank } A = 2$ である.

(2) 例 1.21 の 3 元連立 1 次方程式を考える. 係数行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

の逆行列は $A = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 11 & -7 & 1 \\ 2 & 8 & -6 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ であり, これを $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ の両

辺に掛けると $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ となり, 例 1.21 で求めたものと同じである. $\square$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX 1.4 節 理解度確認問題 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

問 1.49 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = A^t A$ のとき, 次のそれ

ぞれを求めよ. $n \in \mathbf{N}$ とする.

- (1) ${}^t A$ (2) C (3) $A + {}^t A$
 (4) AB (5) C^1 (6) A^2
 (7) $nA + n{}^t A$ (8) ${}^t C$ (9) $((OA)^n + E)^n$
 (10) $E^n A(E^{-1})^n$ (11) $(A^2)^{-1}$ (12) $(A + A^{-1})^2$

問 1.50 行列の積の性質 (1)~(5) を証明せよ.

問 1.51 行列の積に対する簡約律は必ずしも成り立たない. 次のことを示せ.

- (1) $AB = AC$ であっても $B = C$ ではないような行列 A, B, C の例を示せ.
 (2) A が正則の場合には, $AB = AC \implies B = C$ であることを示せ.

問 1.52 任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ に対し, $(\lambda A)^n = \lambda^n A^n$ が成り立つことを示せ.

問 1.53 転置行列の性質 (1) ~ (4) を証明せよ.

問 1.54 任意の行列 A に対し, $A + {}^t A$ および $A {}^t A$ は対称行列であり, $A - {}^t A$ は交代行列であることを示せ.

問 1.55 次の連立方程式を, 係数行列の逆行列を考察することにより解け.

- (1)
$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 3 \\ 2x - 5y + 7z = 16 \\ 3y + z = -2 \end{cases}$$

 (2)
$$\begin{cases} b + c + 3d = 4 \\ 2a - 3b + 4d = -12 \\ 8a - 4b - 3c - 4d = -5 \\ 2a + 2b - 3c - 13d = 16 \end{cases}$$

問 1.56 ● 逆行列の求め方

定理 1.8 A を n 次正方行列とすると, A の横に単位行列を配置し

て得られる $n \times 2n$ 行列を $(A \vdots E)$ で表わす. $(A \vdots E)$ に行に関する基本変形 (行列の基本変形の 1. ~ 3.) を適用して $(E \vdots B)$ が得られるときに限り A は正則行列であり, このとき, $B = A^{-1}$ である.

この定理を用いて, $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し, 正則ならば逆行列

を求めよ.

問 1.57 次の行列の階数を求めよ. 正則か? 正則である場合には, 逆行列を求めよ.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{単位行列 } E,$$

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{零行列 } O$$

問 1.58 正方行列 A の正則性について, 次のことを証明せよ.

- (1) $A^k = E$ となる $k \in \mathbf{N}$ が存在するならば A は正則である.
- (2) $A^2 = A$, $A \neq E$ であるならば A は正則でない.
- (3) $A^k = O$ となる $k \in \mathbf{N}$ が存在するならば A は正則ではない.
- (4) $A^2 - A + E = O$ であるならば A は正則である.

問 1.59 A, B が正則行列ならば AB も正則行列であることを示せ.

記号のまとめ (1.4 節)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m \times n \text{ 行列, } (m, n) \text{ 型行列}$$

O 零行列

$A + B, AB, \lambda A, A^n$ 和, 積, スカラー倍, n 乗

E_n, E, I_n, I 単位行列

${}^t A$ A の転置行列

$\text{rank} A$ A の階数

A^{-1} A の逆行列