2.1.3 自然数に関するいろいろな性質はどうやってわかる？

N 上の 2 変数関数 a を次のように定義する．任意の $x, y \in N$ に対して，

$$\begin{cases} a(x, 0) = x \\ a(x, S(y)) = S(a(x, y)). \end{cases}$$

このような関数 a は一意的に定まる (問 2.8) . $a(x, y)$ を $x + y$ と略記すると，上式は次のように書き直すことができる：

$$\begin{cases} x + 0 = x & \dots \textcircled{1} \\ x + S(y) = S(x + y) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$S(x)$ によって表わそうしているものが $x + 1$ であることを考慮すると，これは

$$x + 0 = x, \quad x + (y + 1) = (x + y) + 1$$

という，ごく当たり前のことを使って $+$ を定義しようとしていることが理解できよう．この定義の下で， $+$ に関して次のような基本的性質が成り立つ．数学的帰納法は Peano の公理に含まれているので，次の定理を証明する際に証明の手段として使うことができることに注意する．

- 定理 2.4** (1) 任意の $x \in N$ について， $x + 0 = 0 + x$.
 (2) 任意の $x, y \in N$ について， $x + S(y) = S(x + y)$.
 (3) 任意の $x \in N$ について， $S(x) = x + 1$. ただし， $1 := S(0)$.
 (4) 任意の $x, y \in N$ について， $x + y = y + x$.
 (5) 任意の $x, y \in N$ について， $x + y = 0$ ならば $x = y = 0$.

証明 (1) x に関する帰納法で証明する．

(基礎) $x = 0$ のとき，左辺 $= 0 + 0 =$ 右辺 で OK .

(帰納ステップ) としては $S(x) + 0 = 0 + S(x)$ を証明すればよい．

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 0 + S(x) = S(0 + x) && (+\text{の定義の第 2 式 } \textcircled{2}) \\ &= S(x + 0) && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= S(x) && (+\text{の定義の第 1 式 } \textcircled{1}) \\ &= S(x) + 0 = \text{左辺} . && (+\text{の定義の第 1 式 } \textcircled{1}) \end{aligned}$$

ここで、「+の定義の第1式」「+の定義の第2式」とは、 $x+0=x$ 、 $x+S(y)=S(x+y)$ それぞれが任意の x, y に対して成り立つことである。以下では、これらをそれぞれ $\stackrel{\textcircled{1}}{=}$, $\stackrel{\textcircled{2}}{=}$ で表わす。

(2) y に関する帰納法。

(基礎) 左辺 $= x + S(0) \stackrel{\textcircled{2}}{=} S(x+0) \stackrel{\textcircled{1}}{=} S(x) \stackrel{\textcircled{1}}{=} S(x) + 0 =$ 右辺。

一方、(帰納ステップ) では $x + S(S(y)) = S(x) + S(y)$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= x + S(S(y)) \stackrel{\textcircled{2}}{=} S(x + S(y)) \stackrel{\text{帰納法の仮定}}{=} S(S(x) + y) \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{=} S(x) + S(y) = \text{右辺} . \end{aligned}$$

(3) x に関する帰納法。

(基礎) $x = 0$ のとき、1の定義より、 $1 = S(0)$ 。一方、

$$1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1 + 0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 + 1$$

なので、 $S(0) = 0 + 1 \stackrel{\textcircled{1}}{=}$ は(1)の結果を使っていることを表わす。

(帰納ステップ) $y := S(x)$ とするとき、 $S(y) = y + 1$ が成り立つこと、すなわち、 $S(S(x)) = S(x) + 1$ を証明すればよい。このとき、帰納法の仮定は $S(x) = x + 1$ である。我々は、 $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ について、

$$n := S^n(0), \quad S^n(0) := S(S^{n-1}(0))$$

と定義したことを思い出そう。

$$\begin{aligned} S(S(x)) &= S(x+1) && \text{(帰納法の仮定 } S(x) = x+1) \\ &= S(S^{x+1}(0)) && \text{(} n \in \mathbf{N} \text{ の定義)} \\ &= S(S^{S(x)}(0)) && \text{(帰納法の仮定)} \\ &= S^{S(x)+1}(0) && \text{(} S^n \text{ の定義)} \\ &= S(x) + 1. && \text{(} n \in \mathbf{N} \text{ の定義)} \end{aligned}$$

(4) y に関する帰納法。

(基礎) 左辺 $= x + 0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 + x =$ 右辺。

(帰納ステップ)

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= x + S(y) \stackrel{\textcircled{2}}{=} S(x+y) \stackrel{\text{帰納法の仮定}}{=} S(y+x) \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{=} y + S(x) \stackrel{\textcircled{2}}{=} S(y) + x = \text{右辺}. \end{aligned}$$

(5) $y \neq 0$ とすると, Peano の公理 (2) より $y = S(z)$ となる $z \in N$ が存在する. このとき, $x + z = a(x, z) \in N$ であり,

$$x + y = 0 \implies x + S(z) = 0 \stackrel{\textcircled{2}}{\implies} S(x+z) = 0$$

であるが, これは $0 \notin S(N)$ に反す. $x = 0$ としても同様.

掛け算・や大小関係 $\geq$ などとも $+$ と同様に定義でき,

$$(6) \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0, \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

$$(7) \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$(8) \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$(9) \quad x \cdot y = 0 \implies (x = 0) \vee (y = 0)$$

$$(10) \quad (x \geq y) \wedge (y \geq z) \implies x \geq z$$

等の基本的性質が成り立つことが証明できる (問 2.9). 例えば, 掛け算は,

$$\begin{cases} b(x, 0) = 0 \\ b(x, S(y)) = b(x, y) + x \end{cases}$$

と定義すると b が一意的に定まるので, $b(x, y)$ を $x \cdot y$ と略記する. 上の (6) の前半だけ証明してみよう.

$x \cdot 0 = 0$ は $\cdot$ の定義そのもの. $0 \cdot x = 0$ を x に関する帰納法で示す.

(基礎) $x = 0$ のときは, $\cdot$ の定義より $0 \cdot 0 = 0$ であるから OK.

(帰納ステップ) $x = S(y)$ のとき (帰納法の仮定は $0 \cdot y = 0$),

$$0 \cdot x = 0 \cdot S(y) \stackrel{\cdot \text{の定義}}{=} 0 \cdot y + 0 \stackrel{\text{帰納法の仮定}}{=} 0 + 0 \stackrel{+ \text{の性質 (1)}}{=} 0.$$

このようにして, Peano の公理を出発点として, 我々が自然数に関して知っているあらゆる性質を公理的に導くことができる. その一例に過ぎないが, 問 2.9 とその解答を参照のこと.