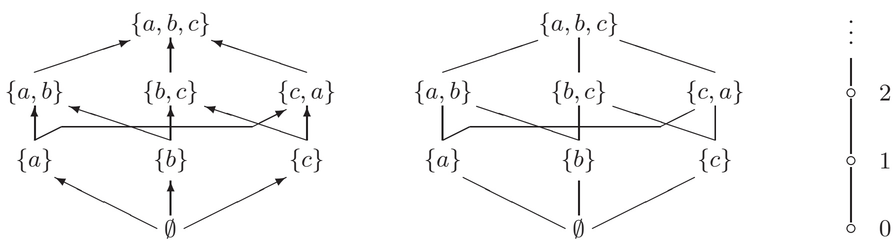
3.4.2 半順序集合とハッセ図

半順序集合の有向グラフを描いてみればたいそう辺が混み入ったものになることがわかる (問 3.34)．半順序は反射律，推移律を満たすから，すべての頂点に自己ループがあり，a から b へ辺があり b から c へ辺があれば a から c へも辺があるからである．こうした無駄な辺 (描かなくても存在することがわかるもの) を省略して簡単にした有向グラフをハッセ図 (H. Hasse，1898–1979) という．

$(A, \leqq)$ を半順序集合とし，$x, y \in A$ とする．$x < y$ (すなわち，$x \leqq y$ かつ $x \neq y$) であり，かつ，$x < z < y$ となる $z \in A$ が存在しないとき，y は x より直接大きいということにし，

$$E := \{\,(x, y) \in A \times A \mid y \text{ は } x \text{ より直接大きい}\,\}$$

とおく．有向グラフ (A, E) のことを半順序集合 $(A, \leqq)$ の**ハッセ図**という．$(x, y) \in E$ のとき平面上で頂点 y を頂点 x の上方に描くと約束すれば，辺の矢印も省略することができる．



(a) (b) (c)

〔例 3.15〕 ハッセ図

（1） 図 (a)，図 (b) は $(2^{\{a,b,c\}}, \leqq)$ のハッセ図である．

（2） 空でない有限の全順序集合のハッセ図は直線になる．上図 (c) は $(\boldsymbol{N}, \leqq)$ のハッセ図である．実数の稠密性より，$(\boldsymbol{R}, \leqq)$ はハッセ図で表わすことはできない．

（3） 擬順序もハッセ図で表わせることは明らかであろう．例えば，ある一族の人間の間の “先祖–子孫” 関係は擬順序であるが (例 3.9 (3) 参照)，そのハッセ図はその一族の系図である． □

半順序集合においては，推移律が成り立つので $a \leqq \cdots \leqq b \leqq \cdots \leqq a$ ならば $a \leqq b \ \wedge \ b \leqq a$ であり，したがって，反対称律により $a = b$ でなければならない．このことは，半順序集合の有向グラフには自己ループ以外に閉路は存在しないことを示している．ゆえに，ハッセ図ではすべての辺の矢印は上向きとなる．これが，ハッセ図の辺に矢印を付ける必要がない理由である．半順序集合の有向グラフではすべての頂点に自己ループがあり，擬順序集合の有向グラフではすべての頂点に自己ループがないことに注意する．

● **半順序集合の元を大きさの順に並べる** $(A, \leqq)$ を全順序集合，n を正整数とする．$\{1, 2, \cdots, n\}$ から A への写像 $\boldsymbol{a}$ のことを A の元を要素とする (1 次元の) **配列**といい，$\boldsymbol{a}(i)$ を $\boldsymbol{a}$ の配列要素 ($\boldsymbol{a}$ の第 i 成分) と言い，

$$\boldsymbol{a}[i]$$

で表わす‡．$\boldsymbol{a}$ は，A の元を重複を許して並べた列 $\boldsymbol{a} = \langle\, \boldsymbol{a}[1], \cdots, \boldsymbol{a}[n] \,\rangle$ を表わしている．$\boldsymbol{a}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{a}$ の要素を $\leqq$ に従った‘大きさ’の順に並びかえること，つまり，

$$\sigma(i) \leqq \sigma(j) \iff \boldsymbol{a}[\sigma(i)] \leqq \boldsymbol{a}[\sigma(j)]$$

を満たすような $\{1, \cdots, n\}$ の置換 $\overset{シグマ}{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ を求めることを (昇順による) $\boldsymbol{a}$ の**ソーティング**(あるいは，$\boldsymbol{a}$ を昇順に**ソート**する) という．降順ソートも同様に定義される．

$$\boldsymbol{a} \circ \sigma^{-1} = \langle\, \boldsymbol{a}[\sigma^{-1}(1)],\ \cdots,\ \boldsymbol{a}[\sigma^{-1}(n)] \,\rangle$$

は $\boldsymbol{a}$ をソートした結果を表わしている．例えば，$(A, \leqq) := (\boldsymbol{R}, \leqq)$ のとき，

$$\boldsymbol{a} = \langle\ 5.0,\ 3.5,\ 7.2,\ 8.3,\ 3.5 \,\rangle$$

に対して $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ とすれば，$\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} \circ \sigma^{-1} = \langle 3.5,\ 3.5,\ 5.0,\ 7.2,\ 8.3 \,\rangle$$

‡配列 (array) という用語は本来はプログラミング言語で使われているものであり，メモリ上での並び順をも規定するものであるが，ここでは単に添え字つき変数と同じ意味で使っている．

とソートされる．

$(A,\ \leqq)$ が全順序集合でないような半順序集合の場合には，配列 $\boldsymbol{a}$ の内容によってはソートできないこともある ($\boldsymbol{a}$ の配列要素に比較不能な 2 要素がある場合)．しかし，比較不能なものは構わず，比較可能なもの同士についてだけ半順序関係 $\leqq$ を満たすように並べること，すなわち，

$$\boldsymbol{a}[\sigma(i)] \leqq \boldsymbol{a}[\sigma(j)] \implies \sigma(i) \leqq \sigma(j)$$

を満たす σ を求めることはできる ($\leqq$ の下で ‘大きい’ ものほど後に並べられる)．このような σ を求めることを $\boldsymbol{a}$ を昇順に**トポロジカルソート**するという．例えば，$(A,\ \leqq) := (\{0, 1, \cdots, 10\},\ |\ )$ のとき (問 3.42 (1) 参照)，

$$\boldsymbol{a} = \langle\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\,\rangle$$

に対して，$\langle\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\,\rangle$，$\langle\, 1,\ 5,\ 3,\ 2,\ 6,\ 4\,\rangle$，$\langle\, 1,\ 3,\ 6,\ 2,\ 5,\ 4\,\rangle$ などが $\boldsymbol{a}$ をトポロジカルソートした結果である．

半順序集合の元を要素とする配列が与えられたとき，それをトポロジカルソートする 1 つの方法 (アルゴリズム) は，まず，A の極大元のすべて $M_1 := \{a_1, \ldots, a_k\}$ を求め，$a_1, \ldots, a_k$ を適当な順序で並べ，次に，$A - M_1$ の極大元をすべて求めて，それらを適当な順序で M_1 の次に並べ，$\cdots$，最後に (m 回目とする)，比較不能な元だけからなる集合 $A - \bigcup_{i=1}^{m-1} M_i$ の元すべてを適当な順序で並べれば，昇順にトポロジカルソートした結果が得られる．以上の処理を，‘極大元’ の代りに ‘極小元’ について行なえば，降順のトポロジカルソートができる．

記号のまとめ (3.4 節)

$G = (V, E)$	有向グラフ
$\text{in–deg}\,(v)$，$\deg^+(v)$	入次数
$\text{out–deg}\,(v)$ $\deg^-(v)$	出次数
$\deg(v) = \text{in–deg}\,(v) + \text{out–deg}\,(v)$	次数
$\langle\, v_1, v_2, \ldots, v_n\,\rangle$	道
$\boldsymbol{a}[i]$	配列 $\boldsymbol{a}$ の第 i 要素