

3.5 関係の閉包

• データを補って完全にする 集合 A の上の 2 項関係 R は, A の元の間
何らかの関係を表わしている. いま, R という, この関係に関して集めたデ
ータは不完全で, R が本来含むべきデータを一部欠いているとする. 例えば, 長
男 a , 次男 b , 三男 c という 3 人兄弟について, $R := \{(a, b), (b, c)\}$ は “ $\circ \circ$
は $\times \times$ の兄である” というを表わすデータとしては十分であっても, “ $\circ \circ$
は $\times \times$ と兄弟である” というを表わすデータとしては不完全である. x が
 y と兄弟なら y は x と兄弟であり, x と y が兄弟であり, かつ y と z が兄弟
であるなら x と z も兄弟であるから, 完全なデータ集合 R' は対称律と推移律
を満たしていなければならないので,

$$R' = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

でなければならない. R という基礎データを含み, かつ, 対称律, 推移律とい
う条件/性質を満たすような最小の 2 項関係が R' である. このような R' を R
の対称推移閉包という. 対称律と推移律から反射律が導かれるので, R' は反射
的でもある[§]. 一般に, 次のように関係 R の閉包を定義する. 推移閉包を例に
しよう.

R を A 上の 2 項関係とする. (集合と考えたとき) R を含み推移的であるよ
うな最小の 2 項関係 R' を R の推移閉包といい, $t(R)$ で表わす. すなわち,
 R' は次の (i) ~ (iii) を満たすものである:

- (i) $R \subseteq R'$.
- (ii) R' は推移的である.
- (iii) $R \subseteq R''$ かつ R'' が推移的ならば $R' \subseteq R''$ である.

反射閉包 $r(R)$, 対称閉包 $s(R)$ も同様に定義される[¶]. また, R を含み反射的
かつ推移的であるような最小の 2 項関係を R の反射推移閉包といい, $rt(R)$ で
表わす. 推移反射閉包 $tr(R)$ と $rt(R)$ とは同じものであることに注意したい.

[§]誰も自分自身と兄弟であると便宜的に考える (定義する) ことにする.

[¶] r, s, t はそれぞれ reflexive (反射的), symmetric (対称的), transitive (推移的) の頭文
字である.

その他の閉包も同様に定義される：

$r(R)$	反射閉包
$s(R)$	対称閉包
$t(R)$	推移閉包
$rs(R), rt(R), st(R)$	反射対称閉包，反射推移閉包，対称推移閉包
$rst(R)$	反射対称推移閉包

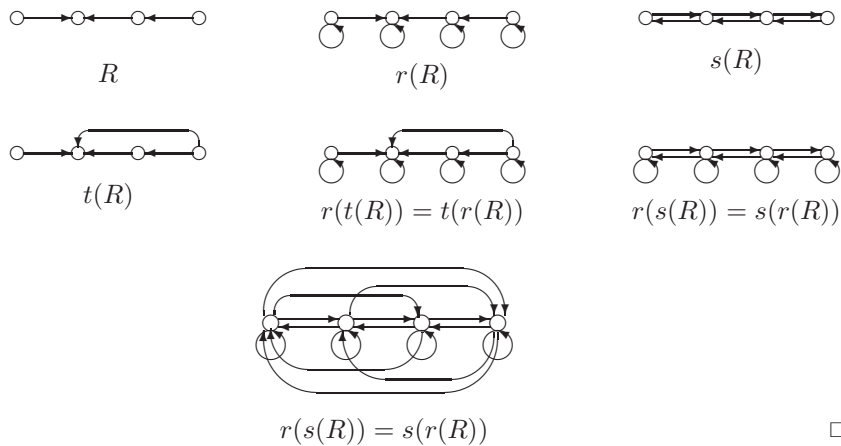
〔例 3.16〕 反射推移閉包ほか

(1) $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$ とすると，

$$r(R) = R \cup \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, \quad s(R) = R \cup \{(b, a), (c, b)\},$$

$$t(R) = R \cup \{(a, c)\}, \quad rs(R) = r(R) \cup s(R), \quad rst(R) = rs(R) \cup t(R).$$

(2) 有向グラフで考えよう．



補題 3.16 R を A の上の 2 項関係とする．

(1) R が反射的 $\iff r(R) = R \iff R = R \cup id_A$.

(2) R が対称的 $\iff s(R) = R \iff R = R \cup R^{-1}$.

(3) R が推移的 $\iff t(R) = R \iff R = R^+$.

証明 (1) R が反射的なら, R を含む反射的であるような最小の 2 項関係は R 自身であるから $r(R) = R$. 逆に, $r(R) = R$ なら R は反射的であることは定義より自明であるから, R が反射的 $\iff r(R) = R$. 後半の $\iff$ は補題 3.5 (p.109) より導かれる.

(2), (3) も同様. □

定理 3.17 R を A の上の 2 項関係とする.

$$(1) \quad r(R) = R \cup id_A. \quad (2) \quad s(R) = R \cup R^{-1}.$$

$$(3) \quad t(R) = R^+.$$

$$(4) \quad rs(R) = r(s(R)) = s(r(R)) = R \cup R^{-1} \cup id_A.$$

$$(5) \quad rt(R) = r(t(R)) = t(r(R)) = R^*.$$

$$(6) \quad rst(R) = (R \cup R^{-1})^*.$$

証明 (1), (2), (3) は類似の証明なので, (1) だけを示す.

$$\begin{aligned} r(R) &= r(R \cup id_A) && (r(R) \text{ が反射的なことと補題 3.16 (1) より}) \\ &= R \cup id_A. && (R \cup id_A \text{ が反射的なことと補題 3.16 (1) より}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad r(s(R)) &= r(R \cup R^{-1}) && ((2) \text{ より}) \\ &= R \cup R^{-1} \cup id_A. && ((1) \text{ より}) \\ s(r(R)) &= s(R \cup id_A) && ((1) \text{ より}) \\ &= R \cup id_A \cup (R \cup id_A)^{-1} && ((2) \text{ より}) \\ &= R \cup id_A \cup R^{-1} \cup id_A^{-1} && (R^{-1} \text{ の性質 : p.102 の (v) より}) \\ &= R \cup R^{-1} \cup id_A. && (id_A^{-1} = id_A \text{ より}) \end{aligned}$$

一方, $rs(R)$ は rs の定義要件 (i), (ii) より R を含む反射的かつ対称的であるので, 補題 3.5 (1), (2) より $R \cup R^{-1} \cup id_A \subseteq rs(R)$ でなければならない. また, $R \cup R^{-1} \cup id_A$ は R を含む反射的 ($id_A \subseteq R \cup R^{-1} \cup id_A$) かつ対称的 ($(R \cup R^{-1} \cup id_A)^{-1} \subseteq R \cup R^{-1} \cup id_A$) なので, rs の定義要件 (iii) により $rs(R) \subseteq R \cup R^{-1} \cup id_A$ である. よって, $rs(R) = R \cup R^{-1} \cup id_A$.

(5) (4) と同様.

(6) $rst(R)$ は R を含む対称的なので, 補題 3.5 (2) より $R \cup R^{-1} \subseteq rst(R)$ である. よって, $(R \cup R^{-1})^* \subseteq rst(R)^*$ である. $rst(R)$ は反射的

かつ推移的であるから，補題 3.16 (1), (3) より $rst(R) = rst(R) \cup id_A$ かつ $rst(R) = rst(R)^+$. よって， $rst(R)^* = id_A \cup rst(R)^+ = rst(R)$. ゆえに， $(R \cup R^{-1})^* \subseteq rst(R)$.

逆に， $id_A \subseteq (R \cup R^{-1})^*$ ， $((R \cup R^{-1})^*)^{-1} \stackrel{\text{問 3.8}}{=} ((R \cup R^{-1})^{-1})^* \subseteq (R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1})^* \subseteq (R \cup R^{-1})^*$ ， $(R \cup R^{-1})^* \circ (R \cup R^{-1})^* \subseteq (R \cup R^{-1})^*$ であるから，補題 3.5 より $(R \cup R^{-1})^*$ は R を含む反射的かつ対称的かつ推移的である . よって， rst の定義要件 (iii) により $rst(R) \subseteq (R \cup R^{-1})^*$ である . 以上より， $rst(R) = (R \cup R^{-1})^*$ である . $\square$

R^+ ， R^* をそれぞれ R の推移閉包，反射推移閉包と呼ぶ理由はこの定理 3.17 の (3), (5) にある . その他，次のことが成り立つ :

- (1) $R \subseteq S$ ならば $r(R) \subseteq r(S)$ ， $s(R) \subseteq s(S)$ ， $t(R) \subseteq t(S)$.
- (2) $r(r(R)) = r(R)$ ， $s(s(R)) = s(R)$ ， $t(t(R)) = t(R)$.
- (3) $r(rs(R)) = s(rs(R)) = rs(R)$ などが成り立つ .
- (4) $r(R) \subseteq rs(R)$ ， $r(R) \subseteq rt(R)$ などが成り立つ .
- (5) $s(t(R)) \subseteq st(R) = t(s(R)) = (R \cup R^{-1})^+$.

[例 3.17] 2 項関係の閉包

(1) N の上の大小関係 $<$ を考える . $<$ の反射閉包は $\leq$ であり， $<$ の対称閉包は $\neq$ であり， $<$ の推移閉包は $<$ である . 例えば，定理 3.17 (2) より，

$$\begin{aligned} s(<) &= (<) \cup (<^{-1}) = (<) \cup (>) \\ &= \{(x, y) \in N \times N \mid x < y \text{ または } x > y\} \\ &= \{(x, y) \in N \times N \mid x \neq y\} \end{aligned}$$

である . また，

$$\begin{aligned} rs(<) &= r(\neq) = N \times N, & r(t(<)) &= r(<) = (\leq), \\ s(t(<)) &= s(<) = (\neq), & t(s(<)) &= t(\neq) = N \times N = st(<) \end{aligned}$$

であるから， $s(t(<)) \subsetneq st(<)$ である .

(2) R が同値関係であるための必要十分条件は R 自身が， R を含む反射的かつ対称的かつ推移的である最小な 2 項関係であるから，定理 3.17 (6) より， $R = rst(R)$ すなわち $R = (R \cup R^{-1})^*$ が成り立つことである . $\square$