3.6　チャーチ・ロッサー関係

● **途中経過に依存せず結果が一意的**　あるシステム (あるいはプロセス，作業，操作，アルゴリズム) が 1 動作 (あるいは 1 単位時間，1 ステップ) で状態 a から状態 b へ移ることを $a \vdash b$ と書くことにする．可能な '状態' すべての集合を X とすると，$\vdash$ は X 上の 2 項関係である．$a \vdash^n b$ は状態 a から n 回の動作により (n 単位時間後に，n ステップを経て) 状態 b へ移行することを表わし，$a \vdash^* b$ は a から b へ 0 回 (0 単位時間，0 ステップ) 以上かかって移行することを表わしている (定理 3.2)．$a \vdash^* b$ であり，かつ $b \vdash c$ となる c が存在しないとき，b は a から到達しうる最終結果と見ることができる．このシステム (プロセス，作業，操作，アルゴリズム) が何らかの最終結果を目指している場合には，推移 $\vdash$ の仕方が何通りあったとしても途中経過いかんにかかわらず最終的に到達する結果が一意的に定まることが望ましい．このような性質をチャーチ・ロッサー性という (A. Church，J. B. Rosser，1936)[‖]．

きちんとした定義をしよう．R を集合 A 上の 2 項関係とする．$a\,R^*\,b$ であるとき，a から b へ R により**到達可能**であるという．さらに，$b\,R\,c$ となる c が存在しないとき，b を**終点**と呼ぶ．a から R により到達可能な終点すべての集合を $R\lrcorner(a)$ で表わす：

$$R\lrcorner(a) := \{\, b \in A \mid a\,R^*\,b \wedge \nexists c\,[\,b\,R\,c\,]\,\}.$$

すべての $a \in A$ に対して $|R\lrcorner(a)| = 1$ であるとき，R は**チャーチ・ロッサー**であるという．すべての a に対して $|R\lrcorner(a)| \leqq 1$ であるなら**部分**チャーチ・ロッサーであるという．また，任意の $a \in A$ に対してある整数 k_a が存在して任意の $b \in A$ に対して

$$a\,R^i\,b \implies i \leqq k_a$$

であるならば，R は**有限的**であるという．これは，R による推移が (a に依存して回数は変わるかもしれないが) 有限回で終わることを言っている．A が有限集合なら a に依存しない整数 k をとることができる：$k := \max\{k_a \mid a \in A\}$.

[‖] 二人とも数理論理学者．ラムダ計算 (lambda calculus) と呼ばれる計算の仕組みを数学的に定義した論文の中で使われた．

明らかに，チャーチ・ロッサー性を持つ 2 項関係の有向グラフにはサイクル (長さが 3 以上の閉路) は存在しない．

〔例 3.18〕　チャーチ・ロッサー関係

（1）　アルファベット $\Sigma := \{\,(,\,)\,\}$ 上の語の上の 2 項関係 $\succ$ を

$$x(\,)y \succ xy \qquad (x, y \in \Sigma^*)$$

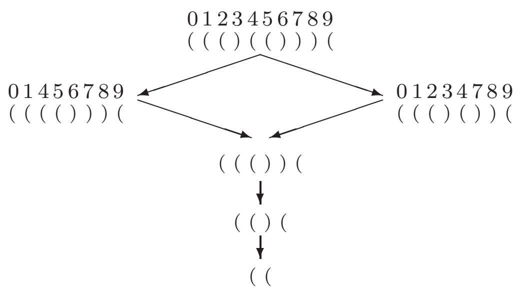
で定義する (すなわち，隣接する 1 対の括弧を取り除く)．$\alpha \succ \beta$ なら β は α より長さが短かくなるので，$\succ$ は有限的である．

$$\alpha \succ^* \lambda \iff \alpha \text{ は括弧対がきちんと整合している}$$

が成り立っていることに注意する (問 3.49 参照)．$\succ$ はチャーチ・ロッサーである．2 項関係 $\sim$ を

$$\alpha \sim \beta \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \succ\rfloor(\alpha) \,=\, \succ\rfloor(\beta)$$

により定義すると $\sim$ は同値関係であり，$[\,\lambda]_\sim$ は例 2.6 で定義した言語 D_1 に等しい．



（2）　$\boldsymbol{N}$ 上の 2 項関係 $\vdash$ を

$$n \vdash m \ \overset{\text{def}}{\iff}\ n = pm \text{ となる素数 } p \text{ が存在する}$$

により定義すると，$0 \vdash 0$，$\vdash\rfloor(0) = \emptyset$ であるから有限的でもチャーチ・ロッサーでもないが，部分チャーチ・ロッサーである：$n \neq 0$ なら $\vdash\rfloor(n) = \{1\}$．

（3）　$R = \{(a,b), (b,a), (a,c), (b,d)\}$ とすると，R は有限的でもチャーチ・ロッサーでも部分チャーチ・ロッサーでもない．実際，任意の $n \geqq 0$ に対して $a\,R^{2n}\,a$ であるし，$R\rfloor(a) = \{c, d\}$ である．　□

定理 3.18 (チャーチ・ロッサー性の判定法) R を A の上の有限的な2項関係とする．R がチャーチ・ロッサーであるための必要十分条件は，任意の $a \in A$ に対して次が成り立つことである：

$$a\,R\,b \wedge a\,R\,c \implies \exists d\,[\,b\,R^*d \wedge c\,R^*d\,] \tag{3.6}$$

証明 ($\Longrightarrow$) $a\,R\,b$ かつ $a\,R\,c$ であるとすると $R\lrcorner(b) \subseteq R\lrcorner(a)$ かつ $R\lrcorner(c) \subseteq R\lrcorner(a)$．ところが $|R\lrcorner(a)| = |R\lrcorner(b)| = |R\lrcorner(c)| = 1$ だから，$R\lrcorner(a) = R\lrcorner(b) = R\lrcorner(c) = \{d\}$．この d が求めるものである．

($\Longleftarrow$) 任意の $a \in A$ に対して $|R\lrcorner(a)| = 1$ であることを示す．$R\lrcorner(a) = \emptyset$ とすると任意の $i \geqq 0$ に対し $a\,R^i\,a_i$ となる終点でないような a_i が存在することが i に関する数学的帰納法で証明できる (実際，aR^0a であるが，a を終点とすると $a \in R\lrcorner(a)$ となってしまい仮定に反す．よって，$a_0 := a$ は終点ではない．$a\,R^i\,a_i$ かつ a_i が終点でないとすると $a_i\,R\,a_{i+1}$ となる a_{i+1} が存在する．a_{i+1} が終点だとすると $a_{i+1} \in R\lrcorner(a)$ となってしまうので a_{i+1} は終点でない)．よって，R は有限的でないことになり仮定に反す．ゆえに，$R\lrcorner(a) \neq \emptyset$ である．

次に，$|R\lrcorner(a)| = 1$ であることを証明しよう．任意の z に対して $[\,x\,R^*z \implies z\,R^*y\,]$ が成り立っているとき，x は y に <u>収束する</u> と言うことにする．任意の x, y に対して次の (3.7) が成り立つことを示せばよい．なぜなら，$y, z \in R\lrcorner(a)$ とすると，aR^*y かつ y は終点だから (3.7) により a は y に収束し，$a\,R^*z$ だから，収束の定義より $z\,R^*y$ が導かれる．ところが z も終点であるから $z = y$ でなければならない．

$$x\,R^*y \text{ かつ } y \text{ は終点} \implies x \text{ は } y \text{ に収束する．} \tag{3.7}$$

R は有限的であるから，任意の x に対し $k_x = \max\{n \mid x\,R^n\,y,\ y \in A\}$ が必ず存在する．k_x に関する数学的帰納法で (3.7) を証明する．

(基礎) $k_x = 0$ は x が終点であることを意味するので，この場合は明らか．

(帰納ステップ) 帰納法の仮定は「$k_x \leqq l$ である任意の x および任意の y に対して (3.7) が成り立つ」である．さて，$x\,R^*y$，y は終点，かつ，この x に対しては $k_x = l+1$ であるとしよう．x が y に収束することを証明したい．

はじめに，$x\,R\,u\,R^*y$ となる u が存在し $k_u \leqq l$ である (そうでないとすると，$k_x \geqq 1+k_u > 1+l$ となり仮定に反す) から，帰納法の仮定より u は y に収束することに注意する．$x\,R^*z$ であるような任意の z に対して $z\,R^*y$ であることを示せばよい．

$z=x$ の場合は明らか．$z \neq x$ とすると $x\,R\,v\,R^*z$ となる v が存在する．$x\,R\,u$ かつ $x\,R\,v$ であるから仮定 (3.6) により $u\,R^*w$ かつ $v\,R^*w$ となる w が存在する．u は y に収束するから $w\,R^*y$ である．一方，$k_v \leqq l$ である (もし $k_v > l$ とすると，$x\,R\,v$ であるから $k_x \geqq 1+k_v > 1+l$ となり $k_x = l+1$ であることに反する)．したがって，帰納法の仮定より v は y に収束する．$v\,R^*z$ であるから，収束の定義より $z\,R^*y$ である． □

〔例 3.19〕　定理 3.18 の応用

（1）　例 3.18（1）の $\succ$ がチャーチ・ロッサーであることを示そう．$\alpha \succ \beta$ かつ $\alpha \succ \gamma$ かつ $\beta \neq \gamma$ であるとすると $\alpha = \alpha_1(\,)\alpha_2(\,)\alpha_3$, $\beta = \alpha_1\alpha_2(\,)\alpha_3$, $\gamma = \alpha_1(\,)\alpha_2\alpha_3$ (または $\beta = \alpha_1(\,)\alpha_2\alpha_3$, $\gamma = \alpha_1\alpha_2(\,)\alpha_3$) となる α_1, α_2, $\alpha_3 \in \Sigma^*$ が存在するはずである．明らかに，$\beta \succ^* \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ かつ $\gamma \succ^* \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ であるから，定理 3.18 により $\succ$ はチャーチ・ロッサーである．

（2）　$\boldsymbol{N}$ 上の 2 項関係 $|_{2,3,5}$ を

$$x\,|_{2,3,5}\,y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x = py \text{ となる } p \in \{2,3,5\} \text{ が存在する}$$

と定義すると，$x\,|_{2,3,5}\,y$ かつ $x\,|_{2,3,5}\,z$ であるなら $x = py$, $x = qz$ となる $p, q \in \{2,3,5\}$ が存在する．したがって，$y = qw$, $z = pw$ となる $w \in \boldsymbol{N}$ が存在する (つまり，$x = pqw$)．すなわち，$y\,|^*_{2,3,5}\,w$ かつ $z\,|^*_{2,3,5}\,w$ が成り立つので，$|_{2,3,5}$ はチャーチ・ロッサーである．例えば，$|_{2,3,5\rfloor}(420) = \{7\}$ であるが，420 から 7 へ到達するルートは何通りもある (問 3.51)． □

記号のまとめ (3.5– 3.6 節)

$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$, $rs(R)$, $\ldots$, $rst(R)$	2 項関係の各種閉包
$R_\rfloor(a)$	R における a の終点の集合

3.5 ～ 3.6 節　理解度確認問題

問 3.44　定理 3.17 には次のように直接的な証明を与えることもできる．すなわち，(1) の場合なら，$R' = R \cup id_A$ とおき，R' が R の反射閉包となるための条件 (i) ～ (iii) を満たすことを示す．この方法で定理 3.17 の (1) ～ (3) を証明せよ．

問 3.45　$\{a, b, c\}$ 上の 2 項関係 R，S で，$s(t(R)) \subsetneqq t(s(R))$ となるもの，および $t(R) \cup t(S) \subsetneqq t(R \cup S)$ となるものを求めよ．

問 3.46　$R \subseteqq A \times A$ のとき，$rst(R)$ と等しいものはどれか？

（1）　$r(st(R))$　　（2）　$s(tr(R))$　　（3）　$t(rs(R))$

問 3.47　定理 3.17 の (2), (3), (5) を証明せよ．

問 3.48　$\boldsymbol{R}$ の上の 2 項関係 $=$，$\fallingdotseq$，$\leqq$，$\emptyset$ について，次のものを求めよ: $r(=)$，$r(\emptyset)$，$s(\leqq)$，$s(=)$，$s(\neq)$，$t(=)$，$t(\leqq)$．

問 3.49　例 3.18 (1) の 2 項関係 $\succ$ はチャーチ・ロッサーであることを証明せよ．

問 3.50　次の 2 項関係は有限的か？ チャーチ・ロッサーか？

（1）　$\boldsymbol{N}_+$ の上の関係 $\Vdash$

$$n \Vdash m \overset{\text{def}}{\iff} n \mid m \text{ かつ } n \fallingdotseq m$$

と，その逆関数 $\Vdash^{-1}$．

（2）　最大元を持つ集合 X の上の擬順序 $\prec$．

問 3.51　例 3.19 (2) の $|_{2,3,5}$ に関して答えよ．

（1）　$|^*_{2,3,5}$ または $|^+_{2,3,5}$ は半順序か？ 擬順序か？

（2）　420 から 7 へ到達するルートは何通りあるか？ ハッセ図を描いて考えよ．

問 3.52　有向グラフ $G = (V, E)$ の上の 2 つの変換 T_1 :「自己ループを削除する」と，T_2 :「$(x, y) \in E$ で in-deg$(y) = 1$ のとき，頂点 x と y を 1 つに合併する」を考える．有向グラフ G_1 に T_1 または T_2 を適用して G_2 が得られることを $G_1 \Rightarrow G_2$ と書くことにすれは，$\Rightarrow$ は有向グラフ上の 2 項関係である．$\Rightarrow$ は有限的かつチャーチ・ロッサーであることを証明せよ．

(参考) : $G \Rightarrow^* 1$ 頂点のみ，となる有向グラフを**可約グラフ**と言う．プログラムの流れ図を有向グラフとして書いたとき可約グラフとなるものは，性質のよい構造を持ったプログラムである．