

4.3.1 グラフ上の演算

2つのグラフ $G_1 = (V_1, E_1)$ と $G_2 = (V_2, E_2)$ の和 $G_1 \cup G_2$, 共通部分 $G_1 \cap G_2$, 直和 $G_1 + G_2$, 差 $G_1 - G_2$, 直積 $G_1 \times G_2$, 合成 $G_1[G_2]$, G_1 の n 乗 G_1^n を次のように定義する:

$$G_1 \cup G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2), \quad G_1 \cap G_2 := (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$$

$$G_1 + G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{v_1v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\})$$

$$G_1 - G_2 := (V_1 - V_2, E_1 - E_2 - \{uv \mid u \in V_2 \text{ または } v \in V_2\})$$

$$G_1 \times G_2 := (V_1 \times V_2, \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid u_1 = u_2 \text{ かつ } v_1v_2 \in E_2, \text{ または } v_1 = v_2 \text{ かつ } u_1u_2 \in E_1\})$$

$$G_1[G_2] := (V_1 \times V_2, \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid u_1u_2 \in E_1, \text{ または } u_1 = u_2 \text{ かつ } v_1v_2 \in E_2\})$$

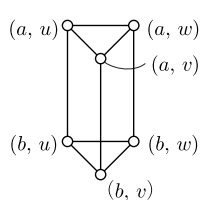
$$G_1^n := \overbrace{G_1 \times \cdots \times G_1}^n \quad \text{とくに, } G_1^0 := K_1$$

ただし, 直和 (や, 頂点が明示されていない和) は $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ の場合にだけ定義できるものとする. また, 差の定義では G_2 を必ずしもグラフに限らず, 任意の頂点集合と辺集合の対でもよいものとする. とくに, 1 頂点 v や 1 辺 e を加除したグラフ $G_1 \pm v$, $G_1 \pm e$ はそれぞれ G_2 が $(\{v\}, \emptyset)$, $(\emptyset, \{e\})$ の場合の略記である.

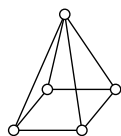
【例 4.14】 いろいろなグラフを演算で表わす

- (1) いろんな特殊なグラフの例を p.123-2 に示した.
- (2) $+$ は結合律を満たさないことに注意する. 例えば, $(K_1 + K_2) + K_2 \not\cong K_1 + (K_2 + K_2)$. 前者は辺数が 9, 後者は辺数が 8 の四角錐 ($\cong C_4 + K_1$) である (p.123-2 の図). 一方, $\cup, -, \times$ はいずれも可換で結合律も満たす. K_1 は $\times$ の単位元である. すなわち, 任意の G に対して, $G \times K_1 \cong G$.
- (3) $K_1^n \cong K_1$, $K_n \cong \overbrace{(\cdots (K_1 + K_1) + \cdots)}^n + K_1$, $K_{m,n} \cong \overline{K_m} + \overline{K_n}$.
- (4) $Q_n := K_2^n$ を n 次元立方体という (p.123-2 の図参照).
- (5) 一般に, $G_1[G_2] \not\cong G_2[G_1]$ である. 例えば,

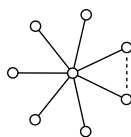
$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} [\text{---}] = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{---} [\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}] = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \square$$



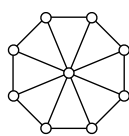
三角柱 $C_3 \times K_2$
 $V(C_3) = \{u, v, w\}$
 $V(K_2) = \{a, b\}$



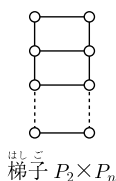
四角錐 $C_4 + K_1$



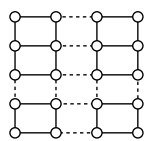
星グラフ $\bar{K}_n + K_1$



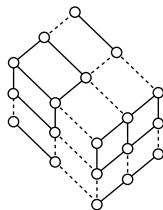
車輪
 $W_n := C_n + K_1$



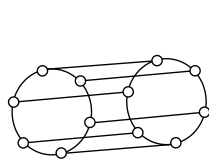
はしこ梯子 $P_2 \times P_n$



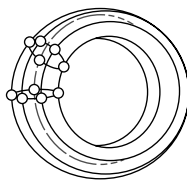
メッシュ $P_n \times P_m$



ジャングルジム $P_1 \times P_m \times P_n$



鼓 $P_2 \times C_m$



ドーナツ $C_n \times C_m$



$Q_0 = K_1$



$Q_1 = K_2$



2次元立方体 Q_2



3次元立方体 Q_3

これらのグラフのうち、星グラフ (star) と車輪 (wheel) と立方体 Q_n ($n \geq 0$) 以外は本書が勝手に付けた名前である。

直積 $G_1 \times G_2$ の定義

$$(V_1 \times V_2, \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid u_1 = u_2 \text{ かつ } v_1 v_2 \in E_2, \text{ または } v_1 = v_2 \text{ かつ } u_1 u_2 \in E_1\})$$

に従うと、 $G_1 \times G_2$ は次のように描けばよい：

- G_1 を描き、そのそれぞれの頂点 (v とする) の代わりに G_2 を同じ位置に描く (v 位置に描くものを $G_2(v)$ と呼ぶことにする)。
- $uv \in E(G_1)$ だったら $G_2(u)$ と $G_2(v)$ の対応する頂点同士をすべて辺で結ぶ。