4.4.3 有限オートマトン

例 4.24 (1) や例 4.25 のように，出発頂点 ($s \to \bigcirc$ で示されている) と目的頂点 (◎ で示されている) が指定されていて，辺にラベルが付いている有向グラフ (例 4.25 のグラフは対称的な有向グラフと考えることができる) あるいは有向多辺グラフによって表わされるシステムを非決定性有限オートマトンといい，対応するラベル付き有向 (多辺) グラフをその遷移グラフと呼ぶ．

形式的には，遷移グラフを使わずに次のように定義する．**有限オートマトン**とは 5 つ組

$$M = (Q,\ \overset{\text{シグマ}}{\Sigma},\ \overset{\text{デルタ}}{\delta},\ q_0,\ F)$$

によって指定されるシステムのことである．Q も Σ も有限アルファベットであり，Q の元を**状態**という．とくに，$q_0 \in Q$ は**初期状態**と呼ばれる特別な状態であり，Q の元のいくつかを**受理状態**として指定しておく．そのような受理状態の集合が F である ($F \subseteq Q$)．δ は $Q \times \Sigma$ から Q への関数であり，これを**状態遷移関数**と呼ぶ．$\delta(p, a) = q$ は，M の現在の状態が p であるときに Σ の元である文字 a を読んだら状態を q に変える (すなわち，p から q に遷移する) ことを表わす．

δ を $Q \times \Sigma$ から 2^Q への関数に拡張したものを**非決定性**有限オートマトンという．この場合，$\delta(p, a) = \{q_1, \ldots, q_m\}$ は状態 $q_1, \ldots, q_m$ のどれへ遷移してもよいことを表わす．有限オートマトンのことを**決定性**有限オートマトンということもある．決定性有限オートマトンは非決定性有限オートマトンの特別な場合 (どの p, a に対しても $|\delta(p, a)| = 1$ であるもの) であることに注意する．

(決定性あるいは非決定性) 有限オートマトン M は，状態を頂点とし，

$$\textcircled{p} \xrightarrow{a} \textcircled{q} \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \delta(p, a) = q$$

によって有向辺とそのラベルが定義される多辺有向グラフによって表わすことができる．とくに，初期状態および受理状態をそれぞれ

$$\text{start} \to \bigcirc \ \text{(あるいは，単に} \ \to \bigcirc\text{)}, \qquad ◎$$

によって示す．このようなラベル付き有向グラフを M の**遷移グラフ**とか**遷移図**という．

初期状態から受理状態へ至る道 $P := \langle q_0, q_1, \ldots, q_n \rangle$ ($q_n \in F$) において

$\delta(q_{i-1}, a_i) = q_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ が成り立っているとき (すなわち，$q_0, q_1, \ldots, q_n$ の順に矢印の向きに沿って辺をたどったとき，それらの辺に付けられたラベルを出現順に並べた列) $a_1 \ldots a_n$ を P 上のラベル列と呼ぶことにする．$n = 0$ のとき $a_1 \ldots a_n$ は λ を意味する．M が**受理**する言語を次のように定義する：

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ は初期状態から受理状態への道上のラベル列}\}$$

〔例 4.26〕　有限オートマトンの遷移図

（1）　例 4.24 (1) は有限オートマトン $M_1 := (Q,\ \Sigma,\ \delta_1,\ 0\,\text{円},\ \{100\,\text{円}\})$ の遷移図である．M_1 は非決定性である (問 4.76 参照)．ただし，

$$Q = \{0\,\text{円}, 10\,\text{円}, \ldots, 100\,\text{円}\}, \quad \Sigma = \{10\,\text{円}, 50\,\text{円}, 100\,\text{円}\},$$

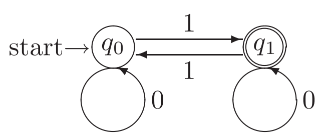
$$\delta_1(0\,\text{円}, 10\,\text{円}) = 10\,\text{円},\ \ldots,\ \delta_1(50\,\text{円}, 50\,\text{円}) = 100\,\text{円},\ \delta_1(0\,\text{円}, 100\,\text{円}) = 100\,\text{円}$$

である．M_1 は 9 個の語だけからなる次の言語を受理する：

$$L(M_1) = \{\overbrace{10\,\text{円} \ldots 10\,\text{円}}^{10},\ \overbrace{10\,\text{円} \ldots 10\,\text{円}}^{i}\,50\,\text{円}\,\overbrace{10\,\text{円} \ldots 10\,\text{円}}^{j},\ 50\,\text{円}\,50\,\text{円},\ 100\,\text{円} \quad \mid\ i + j = 5\}$$

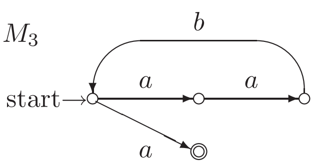
（2）　$M_2 := (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta_2, q_0, \{q_1\})$ は言語 $L(M_2) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ の中には 1 が奇数個$\}$ を受理する決定性有限オートマトンである．M_2 の遷移表と遷移図を下に示す：

δ_2	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_0

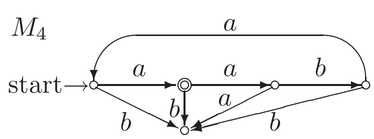


（3）　下図の M_3 と M_4 はどちらも $(aab)^*a$ を受理するが，M_3 は非決定性有限オートマトンであり M_4 は決定性有限オートマトンである．この例のように，頂点に付けたラベル (＝状態) を省略してもよい．　□

M_3



M_4



4.4.1 ～ 4.4.3 節　理解度確認問題

問 4.78　次の式を 2 分木で表せ．

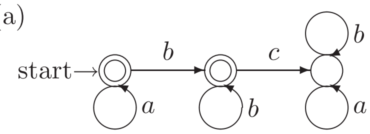
（a）　$-(-a * x - b)$　　（b）　$(a + 3) * x \uparrow x \uparrow x - 2 * b * (x - y)$

問 4.79　3 組の夫婦が旅の途中で河に出会った．そこには 2 人乗りのボートが 1 隻しかなかった．どの男も嫉妬深く自分の妻を男だけの中に残しておくことができない．3 組の夫婦が河を渡る方法をラベル付きグラフを用いて考えよ．

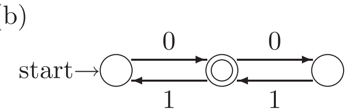
問 4.80　例 2.8 (4) の ‘数式’ の構文図を描け．

問 4.81　次の有限オートマトンが受理する言語を求めよ．

(a)



(b)



問 4.82　次の言語を受理する (決定性/非決定性) 有限オートマトンを示せ．

（a）　$\{000, 01, 110\}$　　（b）　$\{a, b\}^*$　　（c）　$\{a^{3i}b^{2j} \mid i, j \geqq 0\}$

（d）　00 で始まり 11 で終わる語の全体

（e）　0 も 1 も偶数個ずつ含んでいる語の全体

（f）　$\{x \in \{1, 2, \ldots, 9\}\{0, 1, \ldots, 9\}^* \mid 10$ 進数 x は 3 の倍数 $\}$

問 4.83　人間の疲労度を「元気」,「少し疲れている」,「疲れている」の 3 レベルに分け,「食事を取る」,「勉強する」,「遊ぶ」,「寝る」によって疲労度がどう変わるかをまとめたものが右の表である．

	食事	勉強	遊ぶ	寝る
元気	元気	少疲	元気	元気
少疲	元気	疲労	少疲	元気
疲労	少疲	疲労	疲労	元気

元気の状態から食事，勉強，遊び，就寝をくり返して再び元気の状態に戻るまでの行動のパターンすべてを求めよ．

問 4.84　一般に，有限オートマトンが受理する言語は文脈自由言語である．例 4.26 の有限オートマトン $M_1 \sim M_4$ が受理する言語を生成する文脈自由文法 (CFG) を示し，それを構文図で表わせ．

問 4.85　非決定性有限オートマトンは，同じ言語を受理する決定性有限オートマトンへ変換できる．例 4.26 (1) および問 4.82 (解答を参照せよ) の非決定性有限オートマトンを決定性へ変換せよ．