

4.4.4 グラフの採色

グラフの頂点あるいは辺に色をラベルとして付けることを考えよう.

● **頂点の彩色** 隣接するどの2頂点も異なる色となるように頂点に色をラベル付けすることを採色という*. n 色を用いた採色を n -採色といい, n 色以下で採色できるとき n -採色可能であるという. グラフ G が n -採色可能であるような n の最小値を G の染色数といい,

$$\chi(G)$$

で表わす.

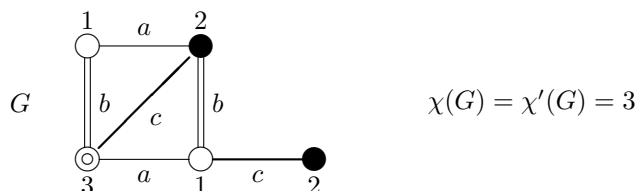
● **辺の彩色** 同様に, 隣接する辺が異なる色となるようにグラフの各辺に色をラベル付けすることを辺採色といい, n 色使うときそれを n -辺採色という. グラフ G が n -辺採色可能であるような n の最小値を G の辺染色数といい,

$$\chi'(G)$$

で表わす.

〔浴@ 4.27〕 頂点と辺の彩色

(1) 彩色の例. 頂点や辺に付けられた数字/英字は色番号/色名.



(2) $\chi(P_1) = 1$, $n \geq 2$ のとき $\chi(P_n) = 2$.

$\chi'(P_1) = 0$, $\chi'(P_2) = 1$, $n \geq 3$ のとき $\chi'(P_n) = 2$.

(3) $\chi(C_{2n}) = \chi'(C_{2n}) = 2$, $\chi(C_{2n+1}) = \chi'(C_{2n+1}) = 3$.

(4) G が自明でない木なら $\chi(G) = 2$. $\therefore$ 適当な頂点を根とする根付き木として G を見て, 根からの距離が偶数の点を色1で, 奇数の点を色2で塗ればよい. 一方, 辺彩色はどの1頂点に接続する辺も異なる色で塗らなければならないので $\Delta(G)$ 色必要. また, $\chi(G)$ 色あれば十分なので, $\chi'(G) = \Delta(G)$. $\square$

*彩色: coloring, 染色数: chromatic number. 正確には, 次の条件を満たす全射 $c_V : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$, $c_E : E \rightarrow \{1, \dots, n\}$ のことをそれぞれ $G = (V, E)$ の n -彩色, n -辺彩色という: $uv \in E \implies c_V(u) \neq c_V(v)$; $c_E(uv) = c_E(u'v') \implies \{u, v\} \cap \{u', v'\} = \emptyset$.

貞 Y 4.20 (1) 一般のグラフ G の染色数と辺染色数

(a) (^{ブルックス}Brooksの定理) $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. とくに, G が奇数長の閉路でも完全グラフでもない連結グラフならば $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

(b) (^{ビジン}Vizingの定理) $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(2) 2部グラフの染色数と辺染色数

(a) (^{ケーニヒ}Königの定理) G が 2 部グラフ $\iff \chi(G) \leq 2$.

(b) G が 2 部グラフ $\implies \chi'(G) = \Delta(G)$.

〔浴@ 4.28〕 定理 4.20 の応用

(1) 明らかに, $\chi(K_n) = n$. 一方, $\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & n \text{ が偶数のとき} \\ n & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$ である. ただし, $\chi'(K_1) = 0$.

定理 4.20 (1)(b) より, $n-1 \leq \chi'(K_n) \leq n$ である. n が奇数のとき, もし $\chi'(K_n) = n-1$ だとすると, 辺の総数は $n(n-1)/2$ なので, 少なくとも $\lceil n/2 \rceil$ 本の辺が同じ色でなければならない. この $\lceil n/2 \rceil$ 本の辺は頂点を共有していないから, K_n には $2\lceil n/2 \rceil = n+1$ 個の頂点があることになり, 矛盾. よって, n が奇数なら $\chi'(K_n) = n$.

n が偶数のときは, K_n は K_{n-1} のすべての頂点と 1 点 v とを辺で結んだグラフであると考え. 上で証明したように, K_{n-1} は $n-1$ 色で彩色できるので, K_n の各頂点 u と v とを結ぶ辺をこれらの n 色だけを使って彩色できればよい. 実際, 辺 uv は, K_{n-1} において u に接続する $n-2$ 本の辺に用いている $n-2$ 色とは別の 1 色を使って塗ればよい.

(2) パーティの参加者達は, 嫌い合う者同士は同じグループに入らないようにいくつかの話の輪を作る. どの人も嫌い合う相手が多くても 5 人であるならば, 話の輪は少ないときには 5 つ以下となる. なぜなら, いま, パーティの参加者を頂点とし, 嫌い合う者同士を辺で結んだグラフ G を考えると, $\Delta(G) \leq 5$ である. 同じ話の輪に入る者同士は同じ色になるように G を採色すれば $\chi(G)$ は, できる話の輪の最小数を表わす. $|V(G)| \leq 6$ なら (1) より G は 5-彩色可能だし, $|V(G)| \geq 7$ なら仮定より G は完全グラフでもないし, 閉路でもないので定理 4.20 (1)(a) が適用できる. $\square$

● 平面グラフの領域の彩色 グラフの採色に関してはもう一つの概念がある。それは平面グラフの領域採色である。平面グラフ G のすべての領域を、境界線を境に隣接するどの2つの領域も異なる色になるように n 色以下で採色できるとき G は n -領域採色可能であるといい、このような n の最小値を G の領域染色数といい、 $\chi''(G)$ で表わす。

領域染色数は、次のような歴史上有名な問題と深い関わりがある。それは、平面上に描かれたどんな地図も、隣り合うどの2国も異なる色となるように4色以下で採色できるかどうかを問う問題で、4色問題と呼ばれている。この問題は1852年にF.Guthrie^{ガスリー}によって提起されて以来、1976年にK.Appel^{アッペル}とW.Haken^{ハーケン}によって肯定的に解決[†]されるまで120年以上に亘りグラフ理論における最も有名な未解決問題であった。

貞 Y 4.21 (4色定理) (Appel-Haken) すべての平面グラフ G は4-領域採色可能である。すなわち、 $\chi''(G) \leq 4$ 。

4色定理の証明のむずかしさに比べ、平面グラフが5色で領域彩色可能であることを証明するのは本書でも取り上げられるほど容易である(問4.94)。その準備として、領域の彩色と頂点の彩色の間の関係について述べておこう。

平面グラフ G が与えられたとき、 G の各領域内に1つずつ頂点を置き、 G の各辺 e に対し、それを挟んで接している領域に置かれた頂点同士を e と交差するような辺 e^* で結ぶ。こうして得られるグラフを G の双対^{そうつい}といい、 G^* で表わす。 e が切断辺の場合には e^* は自己ループになり、 $\{e_1, e_2\}$ が G のカットである場合には e_1^* と e_2^* は同じ頂点对を結ぶ多重辺になる。

平面グラフの双対は平面グラフになり、平面グラフの領域染色数を求める問題は平面グラフの頂点染色数を求める問題と同値になる。よって、次の定理から、すべての平面グラフは5-領域採色可能であることが導かれる。

貞 Y 4.22 (5色定理) (Kempe-Heewood^{ケンペヒーウッド}) G が平面グラフなら $\chi''(G) \leq 5$ である。

[†]138 ページに及ぶ長大な論文の出版は1977年。証明の最終段階では、ある種の部分グラフについて調べるために高速コンピュータで1200時間を越える計算が必要だった。

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX 4.4.4 項 理 解 度 確 認 問 題 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

磨@ 4.86 次のグラフの染色数, 辺染色数を求めよ. 平面的グラフの場合には, 平面グラフを描きその領域染色数も求めよ.

- (a) 例 4.4 の各グラフ (b) $\overline{K_n}$ (c) $C_n \times C_n$ ($n \geq 3$)
 (d) 正 12 面体のグラフ (p.104) (e) Q_n (f) $K_{p_1, \dots, p_n}$
 (g) ^{ベテルセン}Petersen グラフ (問 4.71 の解答参照) (h) $P_3 + P_3$ (i) P_5^2

磨@ 4.87 有限平面内で交わらない直線だけで作られた領域を塗り分けるには 2 色あれば十分であることを示せ.

磨@ 4.88 隣接する県が異なる色となるように日本地図を塗るには何色必要か?

磨@ 4.89 K_n の辺彩色を具体的に示せ.

磨@ 4.90 偶数長のサイクルしかないグラフは 2-彩色可能であることを示せ.

磨@ 4.91 どの頂点も偶頂点の平面グラフは 2-領域彩色可能であることを示せ.

磨@ 4.92 定理 4.20 に関して, 次の各問に答えよ.

- (i) (1)(a): $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ を頂点の個数に関する帰納法で証明せよ.
 (ii) (2)(a): G が 2 部グラフ $\iff \chi(G) \leq 2$, を証明せよ.
 (iii) (2)(b): 証明せよ. また, 逆が成り立たない例を示せ.

磨@ 4.93 9 人の学生が次のような科目を取りたいと考えている. 1 科目 1 クラスしかないとき, 全員が望むように受講できるためには最低何時限必要か?

学生	希 望 科 目	学生	希 望 科 目	学生	希 望 科 目
桜井	物理, 数学, 英語	山田	物理, 地学, 音楽	佐藤	地学, 歴史
鈴木	音楽, 国語	近藤	数学, 歴史, 生物	斉藤	物理, 地学
三井	歴史, 国語, 数学	高橋	数学, 地学	太田	物理, 生物

磨@ 4.94 定理 4.22 を頂点数 p に関する帰納法で証明せよ.

記号のまとめ (4.4 節)

$G = (V, E, f, g), f : V \rightarrow L_V, g : E \rightarrow L_E$	ラベル付きグラフ
$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$	有限オートマトン
$L(M)$	M が受理する言語
$\chi(G), \chi'(G)$	染色数, 辺染色数
G^*	G の双対