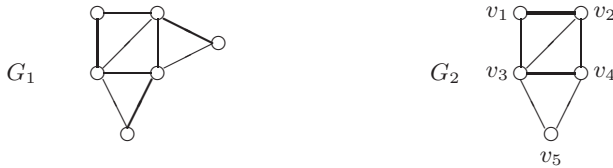


4.5.6 2部グラフとマッチング

ある2つの集団に属するメンバーの間の関係は2部グラフによって表わすことができる。例えば、求職者の集合 A と仕事の集合 B であったとき、求職者 a に仕事 b への適性があるとき a と b の間に辺があるものとして定義されるグラフは2部グラフである。この例からも察せられるように、2部グラフは応用上からも有用である。

● **結婚問題** 2部グラフの問題として表わすことのできる有名な問題の1つに結婚問題と呼ばれるものがある。 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ を未婚の女性の集合、 $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ を未婚の男性の集合とする。各女性 a_i には結婚相手として好ましく思っている B の男性が何人かいる。それらの男性の集合を $B_i \subseteq B$ とする。 $B_1, \dots, B_n$ がどのような条件を満たす場合に、すべての女性が一人ずつ結婚相手を選べるであろうか？

● **マッチング** この問題をグラフの問題として一般化しよう。グラフ G の2つの辺は、端点を共有していないとき**独立**であるという。 G の互いに独立な辺の集合は G の**マッチング**あるいは**独立辺集合**と呼ばれ、とくに辺の数が最大のマッチングは G の**最大マッチング**と呼ばれる。 M が G のマッチングであり、 G のどの頂点も M のどれかの辺の端点となっているとき、 M は G の**完全マッチング**といわれる。 $V(G)$ の互いに素な部分集合 V_1 と V_2 に対し、 $M \subseteq \{v_1v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ となる $\langle V_1 \cup V_2 \rangle_G$ の完全マッチング M が存在するとき、 V_1 と V_2 は**マッチする**という。上述の結婚問題は、 $A \cup B$ を頂点集合とし $\{a_ib \mid 1 \leq i \leq n, b \in B_i\}$ を辺集合とする2部グラフにおいて、 A とマッチする B の部分集合が存在するための条件を求めることに他ならない。



〔例 4.36〕 マッチング

上図のグラフ G_1, G_2 を考える。

(1) G_1 と G_2 の最大マッチングの一例 (それぞれ M_1, M_2 とする) を太線で示した。 M_1 は G_1 の完全マッチングであり、 M_2 は G_2 の完全マッチング

ではない. 一般に, M が (p, q) グラフのマッチングなら $|M| \leq \lfloor p/2 \rfloor$. とくに, 完全マッチングなら p は偶数であり, $|M| = p/2$ である.

(2) G_2 において, $\{v_1, v_3\}$ と $\{v_2, v_4\}$ はマッチするが, $\{v_1, v_3\}$ と $\{v_2, v_4, v_5\}$, $\{v_1, v_2\}$ と $\{v_3, v_5\}$ はそれぞれマッチしない. $\square$

● **マッチングであるための条件** 最大マッチングを特徴付けるために, 2, 3 の用語を準備しよう. M をグラフ $G = (V, E)$ のマッチングとする. $E - M$ の元を (M に関して) **自由辺**といい, M の辺に接続していない頂点を**自由頂点**ということにする. G における道のうち, 自由辺と非自由辺が交互に出現するものを (M に関する) **交互道**という. 例えば, 例 4.36 の G_2 とそのマッチング M_2 において, v_5 だけが M_2 に関する自由頂点, $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ は交互道であり, $\langle v_1, v_2, v_3, v_5 \rangle$ は交互道ではない. 次の補題の証明においては, 道を, 頂点の列としてではなく, 辺の集合として考えることにする. 例えば, $P = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ は, $P = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$ と考える.

補題 4.25 グラフ $G = (V, E)$ において, マッチング M が G の最大マッチングであるための必要十分条件は, M に関して G の相異なる自由頂点間に交互道が存在しないことである.

証明 ($\Rightarrow$) M が G の最大マッチングであり, P が G の相異なる 2 つの自由頂点間の交互道だとすると, 対称差 $P \oplus M$ もやはり G のマッチングであり, しかも $|P \oplus M| = |M| + 1$ である. これは M が最大マッチングであることに反す.

($\Leftarrow$) M は G のマッチングであるとし, G の相異なる自由頂点間には M に関する交互道が存在しないと仮定する. M' を G の最大マッチングとする. $\Rightarrow$ の部分の証明により, M' に関して G の相異なる自由頂点間には交互道が存在しない.

グラフ $G' = (V, M \oplus M')$ を考える. 明らかに G' のどの頂点の次数も 2 以下であるから,

① G' のどの連結成分も基本道かサイクルである.

また, 次数 2 の頂点については, それに接続する辺の 1 つは M の辺, 他の 1 つは M' の辺である. したがって,

- ② G' のどの連結成分においても M の辺と M' の辺が交互に隣接している.
- ①②より, G' の連結成分は,
- ③ 長さが偶数のサイクルであるか,
- ④ M に関しても M' に関しても交互道であるような基本道である.
- 仮定により, M および M' に関する自由頂点間には交互道が存在しないのであるから, ④により,
- ⑤ G' の連結成分である交互基本道の始点か終点の一方は M に関する自由頂点ではなく, もう一方は M' に関する自由頂点ではない.

以上のことから, G' のどの連結成分においても M と M' の辺の数が等しいことがわかる. したがって, G' においても M と M' の辺の数は等しく, $E(G') = (M \cup M') - (M \cap M')$ であるから, G においても M と M' の辺の数は等しい. よって, M も G の最大マッチングである. $\square$

$U \subseteq V(G)$ に対して, $\{v \mid u \in U, uv \in E(G)\}$ をグラフ G における U の**近傍**といい, $N[U]$ で表す. 次の定理は結婚問題に対する答である.

定理 4.26 2部グラフ $G = (V_1, V_2, E)$ において, V_1 とマッチする V_2 の部分集合が存在するための必要十分条件は, V_1 の任意の部分集合 U に対して $|N[U]| \geq |U|$ が成り立つことである.

証明 $\implies$ は明らか. $\impliedby$ の対偶を証明しよう. そのため, V_1 とマッチする V_2 の部分集合は存在しないと仮定する. M を G の最大マッチングとする. 仮定により, M に関して自由な頂点 u が V_1 に存在する. u からの交互道が存在するような頂点の集合を A とすると, 補題 4.25 により A に属す自由頂点は u だけである. $U = A \cap V_1$, $U' = A \cap V_2$ とおくと, A の定義と $A - \{u\}$ のどの頂点も M に関する自由頂点ではないことから, $U - \{u\}$ と U' とは M によってマッチしていることがいえる. したがって, $|U| - 1 = |U'|$ かつ $U' \subseteq [U]$ である. 一方, 任意の $v \in N[U]$ に対して G には交互 uv 道が存在するので, $N[U] \subseteq U'$ である. よって, $N[U] = U'$ であり, これより $|N[U]| = |U'| = |U| - 1 < |U|$ となり, $|N[U]| \geq |U|$ が成り立たないような V_1 の部分集合 U の存在することが示された. $\square$