● **リード・マラー標準形**　どんなブール関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ も,「0 または 1 を係数とする，ブール変数の積からなる項 $x_1\cdots x_i$ $(0 \leqq i \leqq n)$」の排他的論理和 $(\oplus)$ として表わすことができる．係数が 0 の積項は $\oplus$ する必要がない $(x \oplus 0 = x$ だから$)$ ので省略してもよい．このことは任意のブール関数は $\cdot$ と $\oplus$ と定数 1 だけで表わせることを意味する．

定理 5.8　$f(x_1,\cdots x_n)$ を任意のブール関数とする．$f(x_1,\cdots x_n)$ によって定まる定数 $A_{\langle {}_nC_i\rangle} \in \{0,1\}$ $(i=0,1,\ldots,n)$ を用いて

$$\begin{aligned} f(x_1,\cdots x_n) \quad = \quad A_0 \quad & \oplus \quad A_1x_1 \ \oplus \ \cdots \ \oplus \ A_nx_n \\ & \oplus \quad A_{12}x_1x_2 \ \oplus \ \cdots \ \oplus \ A_{(n-1)n}x_{n-1}x_n \\ & \oplus \quad \cdots \\ & \oplus \quad A_{12\cdots n}x_1x_2\cdots x_n \end{aligned}$$

と表わすことができる．ここで，${}_{\langle {}_nC_i\rangle}$ は $1,\ldots,n$ から i 個を選んで並べた添え字 (${}_nC_i$ 個ある) を表わす．ただし，$A_{\langle {}_nC_0\rangle} := A_0$ とする．

これを $f(x_1,\cdots x_n)$ の**リード・マラー展開**とかリード・マラー標準形という (I.S.Reed, D.E.Muller, 1954)*.

この定理を証明する前に，排他的論理和の性質を見ておこう．

補題 5.9　$xy = 0 \iff x \oplus y = x + y.$

証明　$(\Longrightarrow)$　$xy=0$ とすると，

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x\bar{y} + \bar{x}y \\ &= (x\bar{y} + xy) + (\bar{x}y + xy) \qquad (\because xy = 0) \\ &= x(\bar{y} + y) + (\bar{x} + x)y \\ &= x1 + y1 \ = \ x + y. \end{aligned}$$

---

*Reed-Muller expansion, Reed-Muller canonical form．環和標準形とかガロア標準形ともいう．これらの名称は，後述するように $(\{0,1\},\oplus,\cdot,0,1)$ が $\oplus$ を加法として環(かん)をなすこと，また，体(たい)をもなし，それはガロア体と呼ばれることによる (7.1，7.2 節および 7.3 節参照)．リード・マラー展開で表わされたブール関数は論理回路として組んだときに動作テストがしやすいなど，実用的にも有用な標準形の 1 つである．

($\Longleftarrow$) 真理表を書いてみればすぐわかるように，$x \oplus y = x + y$ が成り立つのは $x = y = 1$ 以外の場合だけである．すなわち $xy = 0$. $\square$

補題 5.10 $\oplus$ は次の性質を満たす．

(1) $x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y = (x+y)(\bar{x}+\bar{y})$

(2) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (結合律)

(3) $x \oplus y = y \oplus x$ (可換律，交換律)

(4) $x(y \oplus z) = xy \oplus xz = (y \oplus z)x$ (分配律)

(5) $x \oplus x = 0,\ x \oplus 0 = x,\ x \oplus 1 = \bar{x}$

証明 真理表を書いて確かめよ (問 5.26 参照). $\square$

● **定理** 5.8 **の証明** $\langle {}_nC_i \rangle$ は $1, \ldots, n$ から i 個を選んだ組合せの 1 つであることを思い出そう．

$$A_{\langle {}_nC_i \rangle} = \bigoplus_{a_1,\ldots,a_n \text{ に関する条件}} f(a_1, \ldots, a_n) \tag{5.4}$$

であることを示す．ここで，“$a_1, \ldots, a_n$ に関する条件” は，

$$\begin{cases} \langle {}_nC_i \rangle \text{ が } j \text{ を含むなら } a_j = 0,\ a_j = 1 \text{ の両方の場合を (5.4) 式に} \oplus \text{する} \\ \langle {}_nC_i \rangle \text{ が } j \text{ を含まないなら } a_j = 0 \text{ の場合だけを (5.4) 式に} \oplus \text{する} \end{cases} \tag{5.5}$$

である．また，$A_{\langle {}_nC_0 \rangle} = A_0 := f(0, \ldots, 0)$ である．例えば，$\langle {}_3C_2 \rangle = 12$ の場合 (12 と 21 は同一視して一方しか考えない)，$A_{\langle {}_3C_2 \rangle} = f(0,0,0) \oplus f(0,1,0) \oplus f(1,0,0) \oplus f(1,1,0)$ である．

$f(x_1, \ldots, x_n)$ が変数を 1 つ以上含むときは，定理 5.7$'$ より，主加法標準形

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(a_1,\ldots,a_n) \in \{0,1\}^n} f(a_1, \ldots, a_n) \cdot x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

で表わすことができる．$(a_1, \ldots, a_n) \neq (a'_1, \ldots, a'_n)$ ならば $a_j \neq a'_j$ なるペアが存在する (そのとき，x^{a_j} と $x^{a'_j}$ は互いに他の否定である) ので $(f(a_1, \ldots, a_n) \cdot x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n})(f(a'_1, \ldots, a'_n) \cdot x_1^{a'_1} \cdots x_n^{a'_n}) = 0$ である．よって，補題 5.9 より，(5.4) 式の論理和 $\sum$ は排他的論理和 $\oplus$ で置き換えられる．

$f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n) \cdot x_1^{a_1} \cdots x_j^{a_j} \cdots x_n^{a_n}$ を考える．$f(x_1, \ldots, x_n)$ には，

$a_j = 0$ (したがって，$x_j^{a_j} = \bar{x}_j$) の場合の

$$
\begin{aligned}
& f(a_1, \ldots, \overset{\text{第 } j \text{ 項}}{0}, \ldots, a_n) \cdot x_1^{a_1} \cdots x_j^{a_j} \cdots x_n^{a_n} \\
&= f(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n) \cdot x_1^{a_1} \cdots \bar{x}_j \cdots x_n^{a_n} && (x_j^{a_j} \text{ の定義}) \\
&= f(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n) \cdot x_1^{a_1} \cdots (1 \oplus x_j) \cdots x_n^{a_n} && (\text{補題 } 5.10\,(5)) \\
&= f(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n) \cdot x_1^{a_1} \cdots (x_j\text{欠如}) \cdots x_n^{a_n} \\
&\quad \oplus f(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n) \cdot x_1^{a_1} \cdots x_j \cdots x_n^{a_n} && (\text{補題 } 5.10\,(4))
\end{aligned}
$$

と，$a_j = 1$ の場合の

$$
f(a_1, \ldots, \overset{\text{第 } j \text{ 項}}{1}, \ldots, a_n) \cdot x_1^{a_1} \cdots x_j \cdots x_n^{a_n}
$$

の両方が $\oplus$ される．よって，$\langle {}_nC_i \rangle$ に j を含む積項 $x_1^{a_1} \cdots x_j \cdots x_n^{a_n}$ の係数には $f(a_1, \ldots, \overset{\text{第 } j \text{ 項}}{0}, \ldots, a_n)$ と $f(a_1, \ldots, \overset{\text{第 } j \text{ 項}}{1}, \ldots, a_n)$ の両方が $\oplus$ されて

$$
(\cdots \oplus f(a_1, \ldots, \overset{\text{第 } j \text{ 項}}{0}, \ldots, a_n) \oplus f(a_1, \ldots, \overset{\text{第 } j \text{ 項}}{1}, \ldots, a_n) \oplus \cdots) x_1^{a_1} \cdots x_j \cdots x_n^{a_n}
$$

となり，一方，j を含まない積項 $x_1^{a_1} \cdots (x_j\text{欠如}) \cdots x_n^{a_n}$ の係数に $\oplus$ される $f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$ は $f(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n)$ でなければばならない．

これは (5.5) が任意の j について成り立っていることを意味し，したがって，(5.4) 式が成り立つ． □

〔例 5.12〕　リード・マラー展開

（1）
$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) = f(0,0) & \oplus x_1\{f(0,0) \oplus f(1,0)\} \\
& \oplus x_2\{f(0,0) \oplus f(0,1)\} \\
& \oplus x_1 x_2\{f(0,0) \oplus f(0,1) \oplus f(1,0) \oplus f(1,1)\}.
\end{aligned}
$$

例えば，$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ はこれ自身がすでにリード・マラー標準形であるが，あえて定理 5.8 を用いてみると，

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= 0 \oplus x_1(0 \oplus 1) \oplus x_2(0 \oplus 1) \oplus x_1 x_2(0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0) \\
&= 0 \oplus x_1 1 \oplus x_2 1 \oplus x_1 x_2 0
\end{aligned}
$$

であり，当然であるがこれは $x_1 \oplus x_2$ に等しい．

（2）
$$
\begin{aligned}
x + y &= 0 \oplus x(0 \oplus 1) \oplus y(0 \oplus 1) \oplus xy(0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1) \\
&= x \oplus y \oplus xy.
\end{aligned}
$$

（3） $$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = \ & f(0,0,0) \\ & \oplus x_1\{f(0,0,0) \oplus f(1,0,0)\} \\ & \oplus x_2\{f(0,0,0) \oplus f(0,1,0)\} \\ & \oplus x_3\{f(0,0,0) \oplus f(0,0,1)\} \\ & \oplus x_1x_2\{f(0,0,0) \oplus f(0,1,0) \oplus f(1,0,0) \oplus f(1,1,0)\} \\ & \oplus x_2x_3\{f(0,0,0) \oplus f(0,0,1) \oplus f(0,1,0) \oplus f(0,1,1)\} \\ & \oplus x_3x_1\{f(0,0,0) \oplus f(0,0,1) \oplus f(1,0,0) \oplus f(1,0,1)\} \\ & \oplus x_1x_2x_3\{f(0,0,0) \oplus f(0,0,1) \oplus f(0,1,0) \oplus f(0,1,1) \oplus \\ & \qquad f(1,0,0) \oplus f(1,0,1) \oplus f(1,1,0) \oplus f(1,1,1)\}. \end{aligned}$$

例えば，$f(x,y,z) = x \mid (y \downarrow z)$ は，その真理表

a_1	0	1	0	1	0	1	0	1
a_2	0	0	1	1	0	0	1	1
a_3	0	0	0	0	1	1	1	1
$f(a_1,a_2,a_3)$	1	0	1	1	1	1	1	1

にもとづいてそれぞれの $f(a_1,a_2,a_3)$ の値を上の式に代入すると，

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 1 \oplus x(1 \oplus 0) \oplus y(1 \oplus 1) \oplus z(1 \oplus 1) \\ &\quad \oplus xy(1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1) \oplus yz(1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1) \oplus zx(1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1) \\ &\quad \oplus xyz(1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1) \\ &= 1 \oplus x1 \oplus y0 \oplus z0 \oplus xy1 \oplus yz0 \oplus zx1 \oplus xyz1 \\ &= 1 \oplus x \oplus xy \oplus xz \oplus xyz \end{aligned}$$

となる．この式変形の過程では $x \oplus 0 = x$ や，$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$ (1 が偶数個の場合), $= 1$ (1 が奇数個の場合) であること (問 5.27 (4) 参照) を使っている． □

定理 5.8 (任意のブール関数は 1, ·, $\oplus$ だけで表わすことができること) は，ブール変数を 1 つも含まないブール関数 (すなわち，定数 0 または 1) の場合にも成り立つことに注意する．実際，定数 1 については自明であるし，定数 0 は $0 = 1 \oplus 1$ である．