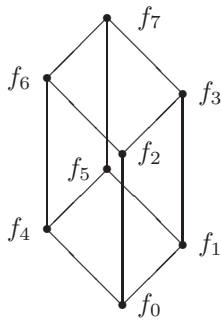


5.3.3 ブール関数の簡単化

$x + xy$ がもっと簡単な x に等しい (吸収律) ように, 同じブール関数でも簡単なものに変形できることがある. これは回路設計の観点からは重要である.

● **カルノー図** ブール関数を簡単化する方法はいろいろ知られているが, 変数の個数が少ない場合 (数変数程度) の簡単化の手法として有効なものに**カルノー図**を用いる方法がある (M.Karnaugh, 1950. 米国のエンジニア). ‖

n 変数ブール関数を表わすためのカルノー図は, n 次元立方体の頂点間の隣接関係を平面に表したものである. $n = 3$ の場合を例として説明する. 3次元の立方体の8個の頂点に番号を付けて $f_0 \sim f_7$ とする. これらは, 隣り合う頂点同士の番号 $0 \sim 7$ が3ビットの2進数として見たときに1ビットだけが違っているように配置する**. 例えば, f_3 の番号 $3 = (011)_2$ と f_7 の番号 $7 = (111)_2$ は1ビットだけ違っているので隣接させる. この3ビットをブール変数 $x_1 \sim x_3$ への値の割り付け (付値) だと考え, 立方体の各頂点にその付値のもとでのブール関数 ($f(x_1, x_2, x_3)$ とする) の値をラベル付けする. 例えば, 頂点 f_6 には $f(1, 1, 0)$ をラベル付けする. このようにラベル付けされた立方体と3変数ブール関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ とは1対1に対応する. (一般の n の場合, n 次元立方体の頂点は 2^n 個あるので, それらに n ビットの2進数 2^n 個を隣接する頂点のハミング距離が1となるように1対1に対応させ, 各頂点にはその n ビット数を付値とするときの n 変数ブール関数の値をラベル付けする.)



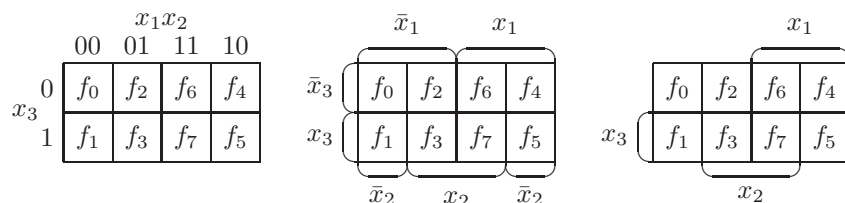
x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

‖ カルノー図は数変数までしか扱えないが, 実用的方法に^{クワイン・マクラスキー}Quine-McCluskey法などがある.

異なるビットの個数をハミング距離**という. この場合はハミング距離が1である.

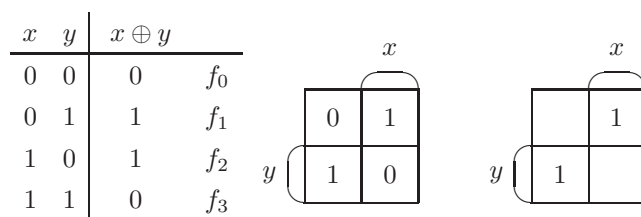
カルノー図は、 $f(x_1, \dots, x_n)$ の真理表を、1 辺の長さが 1 の 2^n 個の正方形 (セルと呼ぶ) に分割された長方形の表として表わしたものである。各セルは 1 つの f_i を表わし、隣り合うセルは隣り合う f_i であるように配置する。ただし、長方形の向かい合う辺は同じものであると見なす。 $n = 3$ の場合を以下に示す。例えば、 f_4 は f_5, f_6, f_0 と隣接している。

各セルがどのような $x_1 \sim x_n$ の付値に対応しているかを下左図に示した (例えば、 f_6 は $x_1 x_2 x_3 = 110$ に対応している。すなわち、 $f_6 = f(1, 1, 0)$ である)。このように書くのは煩わしいが、この左図は下中央の図のように表わすことができる。しかし、(同一辺上の変数 x に対応する部分の残りの部分はその変数の否定 $\bar{x}$ に対応する部分であると見なすことによって) 否定の部分を書かずに、右図のように書く方がもっと簡単であり、一般的にもこのような表記法が使われている。



【例 5.14】 ブール関数 (真理表) とカルノー図

(1) $x \oplus y$ の真理表とカルノー図



カルノー図では、各 f_i の値を対応するセルに書き込むが、図を見やすくするために、この例の右図のように、値 0 は書かずに値 1 のみを書き込む。

(2) 3 変数の多数決関数 $\text{MAJ}_3(x_1, x_2, x_3)$ の真理表を書くとき次ページの上左図。右の 2 つともそのカルノー図である (下側が普通用いられるもの)。 □

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	
0	0	0	0	f_0
0	0	1	0	f_1
0	1	0	0	f_2
0	1	1	1	f_3
1	0	0	0	f_4
1	0	1	1	f_5
1	1	0	1	f_6
1	1	1	1	f_7

		x_1		
	0	0	1	1
x_3	0		1	
1		1	1	1
	0	1	1	0
		x_2		

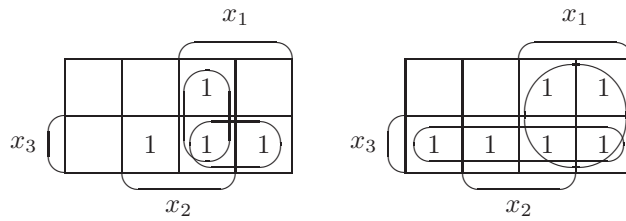
			x_1	
			1	
x_3		1	1	1
		x_2		

4 変数の場合と 5 変数の場合のカルノー図を下に示す：

			x_1		
	f_0	f_4	f_{12}	f_8	
	f_1	f_5	f_{13}	f_9	
x_3	f_3	f_7	f_{15}	f_{11}	x_4
	f_2	f_6	f_{14}	f_{10}	
		x_2			

			x_1			x_5		
	f_0	f_8	f_{24}	f_{16}	f_{17}	f_{25}	f_9	f_1
	f_2	f_{10}	f_{26}	f_{18}	f_{19}	f_{27}	f_{11}	f_3
x_3	f_6	f_{14}	f_{30}	f_{22}	f_{23}	f_{31}	f_{15}	f_7
	f_4	f_{12}	f_{28}	f_{20}	f_{21}	f_{29}	f_{13}	f_5
		x_2			x_2			
							x_4	

● **簡単化のポイント** 同じ行または同じ列において隣接しているセルを考えると、それらに対応する最小項 (リテラルの論理積) はちょうど 1 つの変数が一方の項では肯定リテラル、他方の項では否定リテラルになっている。



例えば、上の左側のカルノー図において $\square$ で囲んだ 2 つのセルは $x_1 x_2 \bar{x}_3 +$

$x_1x_2x_3$ を表わしており、同図の $\square$ で囲んだ 2 つのセルは $x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3$ を表わしている。これらはそれぞれ x_1x_2 , x_1x_3 に簡単化できる。また、同図の右側のカルノー図のように、 $\square$ の所に 1 が 4 個あった場合、それに対応する積和 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3$ は x_3 に簡単化されるし、 $\bigcirc$ で囲まれた積和 $x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ は x_1 に簡単化される。

このように、長方形に隣接し値 1 が書き込まれた 2^k 個のセルからなる部分をループと呼ぶことにすると、

- カルノー図が表わしているブール関数は、1 が立っているセルが表わす最小項すべての論理和をとったものに等しく、
- ループが大きいほど、積項におけるリテラルの個数が少なくなり、
- ループの個数が少ないほど、AND ゲート (積項の個数) が少なくなる

という性質を持つので、**論理式の簡単化**は、

なるべく大きいループをできるだけ少なく用いて、カルノー図上のすべての 1 をループで囲む

という問題になる。複数のループで同じ 1 つのセルを囲んでもよいことに注意する。その理由は、ベキ等律 $x + x = x$ によって、同じ最小項をいくつ加えても論理式は等しいからである。

【例 5.15】 カルノー図を用いた簡単化

(1) 例 5.14 (2) で見たように、3 変数の多数決関数 $\text{MAJ}_3(x_1, x_2, x_3)$ のカルノー図は左下図のようになり、大きさ 2 のループ 3 つによってすべての 1 をカバーすることができるので $\text{MAJ}_3(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2$ が簡単化した結果である。

(2) 一方、右下図はブール関数 $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3$ のカルノー図であるが、これは図に示したようにループを 2 つ取ると $\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_3$ と簡単化できる。太い 2 辺は同一辺であることに注意。□

