6.3　再帰方程式の解法

分割統治法をはじめとして，再帰的な方法で設計されたアルゴリズムの実行時間はほとんどの場合、再帰方程式 (漸化式) で表わすことができる．この節では，その解 (厳密解ではなく，漸近的な解) を求める方法のうち代表的なものをいくつか述べる．

6.3.1　展　開　法

再帰方程式 (不等式の場合も含む) のもっとも自然な解法は，方程式の右辺をその方程式 (あるいは不等式) 自身に従って展開していく方法である．

〔例 6.6〕　再帰方程式を展開して，解を推測する

（1）　$f(0)=0$, $f(n)=f(n-1)+n$ を考える．第 2 式に従って展開すると，

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1)+n \\ &= f(n-2)+(n-1)+n = \cdots \\ &= f(0)+1+2+\cdots+n \\ &= 0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

となる．この場合は，解の推測にとどまらず，厳密解が求められた．しかし，例えば $f(0)=\Theta(1)$ とか $f(n)=f(n-1)+O(n)$ となっている場合には， 計算しやすい $f(0)=0$, $f(n)=f(n-1)+n$ を用いて解 $f(n)=O(n)$ を推測して，それを数学的帰納法で証明するという方法をとる．$f(n)=O(n)$ であることを証明するには，ある定数 $c>0$ とある自然数 n_0 に対して，$n \geqq n_0$ ならば $f(n) \leqq cn^2$ であることを示せばよい ($f(n)=O(n)$ の定義)．

（2）　merge-sort の比較回数に関する漸化式

$$f(1)=0, \quad f(n)=f(\lfloor n/2 \rfloor)+f(\lceil n/2 \rceil)+n-1$$

を考えよう．このままの形で展開すると複雑な式となってしまうので，解を予想してからそれが正しい解であることを証明するという方法をとることにする．解の予想をつけるために，$\lfloor n/2 \rfloor$ および $\lceil n/2 \rceil$ は漸近的には $n/2$ に等しいことを考慮し，右辺を $2f(n/2)$ に置き換えた漸化式 $f(n)=2f(n/2)+n-1$ を考え，これを展開法で解いてみる (n は 2 の累乗とする)．

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 2f(n/2)+n-1 \\
&= 2\{2f(n/2^2)+n/2-1\}+n-1 \\
&= 2^2\{2f(n/2^3)+n/2^2-1\}+n-1+n-2 \\
&\quad \cdots \\
&\leqq 2^{\log_2 n} f(1)+n\log_2 n = n\log_2 n.
\end{aligned}
$$

よって，ある正定数 c に対して $f(n) \leqq cn\log n$ であろうと予想できる．この予想が正しいことを n に関する数学的帰納法で証明する．

(基礎ステップ)　$1 \leqq n \leqq 9$ のときは $c \geqq 2$ であれば成り立つことが容易に確かめられる．

(帰納ステップ)　$n \geqq 10$ のとき，$f(\lceil n/2 \rceil) \leqq c\lceil n/2 \rceil \log \lceil n/2 \rceil$ と仮定する．

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(\lfloor n/2 \rfloor)+f(\lceil n/2 \rceil)+n-1 \\
&\leqq 2f(\lceil n/2 \rceil)+n && (\because f \text{ は単調増加関数}) \\
&\leqq 2c\lceil n/2 \rceil \log \lceil n/2 \rceil + n. && (\text{帰納法の仮定})
\end{aligned}
$$

ここで，$\lceil n/2 \rceil \leqq (n+1)/2$ であることと，$n \geqq 10$ ならば $\lceil n/2 \rceil \leqq e^{-1/2}n$ (e は自然対数の底) であることを用いると，

$$
\begin{aligned}
&\leqq c(n+1)(\log n - 1/2)+n \\
&\leqq cn\log n + n(1-c/2)+c\log n \\
&\leqq cn\log n.
\end{aligned}
$$

最後の不等号は $c=6$, $n \geqq 5$ に対して成り立つ．

以上により，1 以上のすべての自然数 n に対して $f(n) \leqq 6n\log n$ であることが証明された (問 2.6 参照)．よって，$f(n)=O(n\log n)$ である．　□

例 6.5 で示したように，n 個のデータを大小比較だけを用いてソートするのに必要な比較の回数は $\Omega(n\log n)$ であるから，上の結果により，マージソート法はソーティングの比較回数の下界を実現しているアルゴリズムであることがわかった．よって，$\Theta(n\log n)$ がソーティングの比較回数の最良下界 (かつ最良上界) である．

6.3.2　漸近解の公式

特定の形をした再帰方程式の場合，式の形から漸近解が即座に求められることがある．次の定理はそのようなものを与える 1 つである．

> **定理 6.1**　$a \geqq 1$, $b > 1$, $k \geqq 0$ を定数とし，$g : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ とする．
>
> $n \leqq k$ に対し $f(n)$ は定数，　$n > k$ に対し $f(n) = af(n/b) + g(n)$
>
> によって定義された再帰方程式の漸近解 $f(n)$ は次のように与えられる．ただし，n/b は $\lfloor n/b \rfloor$ あるいは $\lceil n/b \rceil$ を意味するものとする．
>
> (1)　$g(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ となる定数 $\varepsilon > 0$ が存在するならば，$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
>
> (2)　$g(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ ならば，$f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
>
> (3)　$g(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ となる定数 $\varepsilon > 0$ が存在し，ある定数 $c < 1$ と，十分大きいすべての n に対して $ag(n/b) \leqq cg(n)$ が成り立つならば，$f(n) = \Theta(g(n))$.

厳密な証明は長いので省略するが，直感的な意味を述べておこう．まず，$f(n) = af(n/b) + g(n)$ は，解こうとしている問題をほぼ同じサイズの b 個の小問題に分割して再帰的に解こうとしていること，その際，小問題のうちの a 個を再帰的に呼び出し，それらの小問題に対する実行前後の処理 (実行前は小問題に分割するための処理，実行後は得られた実行結果を用いた後処理) にかかる時間が $g(n)$ であることを意味する．

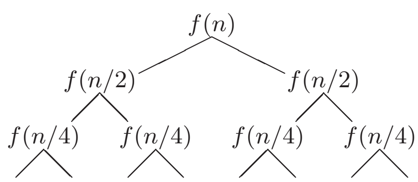
再帰のたびにサイズが $\frac{1}{b}$ になるので，再帰の深さは高々 $\log_b n$ である．3 つの場合分けのどれも，$g(n)$ と $n^{\log_b a}$ との大小比較をしており，この 2 つのうちの大きい方が解に関わっている．つまり，$n^{\log_b a}$ の方が $g(n)$ よりも大きい (1) の場合には解は $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ であり，$g(n)$ の方が $n^{\log_b a}$ よりも大きい (3) の場合には解は $f(n) = \Theta(g(n))$ であり，2 つが同じ程度の大きさである (2) の場合には再帰の深さ $\log_b n$ も関わってくるのである．

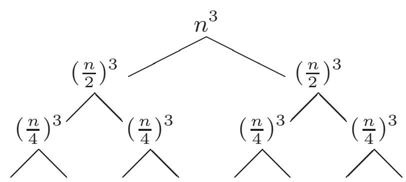
この辺りのことを具体的な例で見てみよう．典型的な

$$f(n) = f(n/2) + f(n/2) + n^3$$

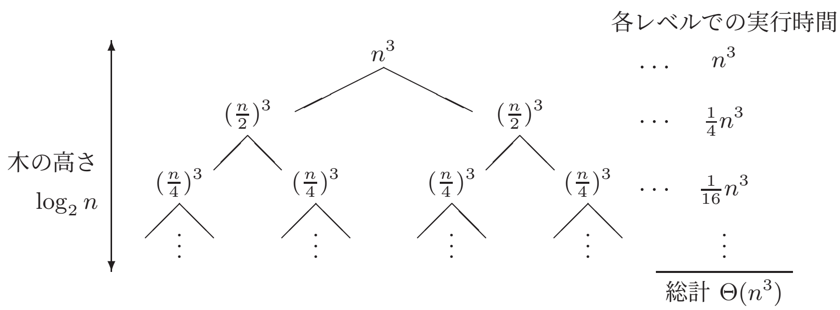
を取り上げて考える．問 6.19 (3) でやったように，再帰の実行の過程を木で表

わしてみると下左図のようになる．その各節における $f(\cdot)$ を，そのレベル (再帰呼び出しの深さ) における $g(n)$ の値で置き換えたものが下右図である．





上右図の各節に付けられた値は，再帰の各段階で呼ばれた $f(\cdot)$ がそこで費やす実行時間を表わしているので，その総和が $f(n)$ の実行時間である．再帰のそれぞれのレベル (深さ) におけるそのような実行時間の和と，それらの総和を下図に示した．



この例では木の高さ $\log_2 n$ は実行時間のオーダーを左右しないが，

$$f(0) = \Theta(1),\ f(n) = 2f(n/2) + \Theta(n)$$

では $g(n) = \Theta(n)$ が $n^{\log_2 2} = n$ とオーダーが等しいので，木の高さが実行時間のオーダーに影響する (問 6.20 参照)．

〔例 6.7〕　定理 6.1 の適用例

（1）　6.2 節の 2 分探索法の実行時間に関する再帰不等式 $f(1) = 1$，$f(n) \leqq f(\lceil n/2 \rceil) + 1$ 解は，定理 6.1 の (2) より，$f(n) = O(\log n)$ である．

（2）　例 6.6 (2) の $f(1) = 0$，$f(n) = 2f(\lceil n/2 \rceil) + n - 1$ の解は，定理 6.1 の (2) より，$f(n) = \Theta(n \log n)$ である．

（3）　$f(1) = 1$，$f(n) = 4f(\lfloor n/2 \rfloor) + n \log n$ の解は，定理 6.1 の (1) より，$f(n) = \Theta(n^2)$ である．□

6.3.3　母関数と線形差分方程式

数列 $\{a_n\}$ の各項を係数とする級数

$$f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$$

をこの数列の**母関数**（ぼかんすう）あるいは**生成関数**¶という．母関数を使って再帰方程式を解くことができる．数列 $\{a_n\}$ は，$\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{R}$ への関数 $f : n \mapsto a_n$ に他ならないことに注意する．

〔例 6.8〕　母関数を使って解を予想する

再帰方程式

$$\begin{cases} H(0) = 1,\ H(1) = -2, \\ H(n) = 5H(n-1) - 6H(n-2) \quad (n \geqq 2) \end{cases} \tag{6.1}$$

の解を求めよう．数列 $a_0 = 1$，$a_1 = -2$，$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ の母関数を $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ とし，次のように形式的な計算を行なう‖．

$$\begin{array}{rrl} & f(X) = & a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots \\ & -5Xf(X) = & \quad - 5a_0X - 5a_1X^2 - \cdots - 5a_{n-1}X^n - \cdots \\ + & 6X^2f(X) = & \quad\quad 6a_0X^2 + \cdots + 6a_{n-2}X^n + \cdots \\ \hline & (1-5X+6X^2)f(X) = & a_0 + (a_1 - 5a_0)X + (a_2 - 5a_1 + 6a_0)X^2 + \cdots \\ & & \quad + (a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2})X^n + \cdots \\ & = & a_0 + (a_1 - 5a_0)X \\ & = & 1 - 7X. \end{array}$$

よって，

$$f(X) = \frac{1-7X}{1-5X+6X^2} = \frac{5}{1-2X} - \frac{4}{1-3X}.$$

一方，

¶生成関数：generating function．形式的ベキ級数 (formal power series) ともいう．

‖なぜ “形式的” と言うのかというと，級数の収束条件等をまったく考慮しない (したがって，結果が正しいかどうか保証されない) 計算だからである．

$$\frac{1}{1-2X} = 1 + 2X + 2^2X^2 + \cdots,$$
$$\frac{1}{1-3X} = 1 + 3X + 3^2X^2 + \cdots$$

だから (右辺が左辺に収束する $|X| < 1$ の場合を考える),

$$\begin{aligned} f(X) &= 5(1 + 2X + 2^2X^2 + \cdots) - 4(1 + 3X + 3^2X^2 + \cdots) \\ &= 1 + (-2)X + (-16)X^2 + \cdots + (5 \times 2^n - 4 \times 3^n)X^n + \cdots \end{aligned}$$

と 形式的に 計算することができる．これより

$$a_n = 5 \times 2^n - 4 \times 3^n \quad (n \geqq 0)$$

が得られる．すなわち，(6.1) の解は $H(n) = 5 \times 2^n - 4 \times 3^n$ であると予想され，実際，それは正しい ((6.1) 式へ代入してみよ). □

● **同次線形差分方程式**　特殊な形の再帰方程式の場合，解の形が決まる場合がある．例えば,

$$a_0 f(n) + a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k) = g(n) \quad (n \geqq k) \tag{6.2}$$

という形の方程式を**線形差分方程式**という**．とくに，$g(n) = 0$ であるとき,

$$a_0 f(n) + a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k) = 0 \quad (n \geqq k) \tag{6.3}$$

を**同次**線形差分方程式といい,

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \tag{6.4}$$

を (6.3) の**特性方程式**††という．(6.4) の異なる実数解 (存在すれば) を $x = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ とすると，$f(n) := \alpha_1^n, \ldots, \alpha_k^n$ のどれも (6.3) の解であることが容易にわかる．したがって，それらの定数倍の和 $c_1\alpha_1^n + \cdots + c_k\alpha_k^n$ も (6.3) の解になる．すなわち，任意の定数 $c_1, \ldots, c_k$ に対して

$$f(n) = c_1\alpha_1^n + \cdots + c_k\alpha_k^n \tag{6.5}$$

**(同次) 線形差分方程式：(homogeneous) linear differnece equation.

††特性方程式：characteristic equation.

は (6.3) の解である．ただし，通常は (6.3) は初期条件

$$f(0) = m_0,\ f(1) = m_1,\ \ldots,\ f(k-1) = m_{k-1} \qquad (6.6)$$

を満たさなければならない．このような場合，(6.5), (6.6) から，$c_1, \ldots, c_k$ が一意的に定まる．

〔例 6.9〕　フィボナッチ数列を同次線形差分方程式で表わして解く

フィボナッチ数列の第 n 項を $f(n)$ で表わすと，

$$\begin{cases} f(0) = 0,\ f(1) = 1, \\ f(n) - f(n-1) - f(n-2) = 0 \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

であるから，その特性方程式は $x^2 - x - 1 = 0$ である．この実数解は $\alpha_1 := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\alpha_2 := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ であるから，$f(n) = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n$ と書くことができる．$f(0) = 0$，$f(1) = 1$ より，$c_1\alpha_1^0 + c_2\alpha_2^0 = 0$，$c_1\alpha_1^1 + c_2\alpha_2^1 = 1$．これを解くと，$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$，$c_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$．よって，

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \qquad \square$$

● 非同次線形差分方程式の場合　非同次の線形差分方程式 (6.2) の場合，まず，(6.2) を満たす解 ($h(n)$ とする) を 1 つ何とかして見つける (一般的な解でなくてもよいので，このような解を**特殊解**という)．また，(6.2) に対応する同時線形差分方程式 (6.3) の解 (**同次解**という) $h_0(n)$ を求める．このとき，$h(n)+h_0(n)$ は (6.2) の一般解になる．

〔例 6.10〕　ハノイの塔の円盤移動回数を求める

問 6.18 (の解答) で見たように，ハノイの塔の円盤移動回数 $f(n)$ は

$$f(1) = 1,\ f(n) = 2f(n-1) + 1$$

を満たすものであった．これは非同次線形差分方程式である．明らかに，$f_0(n) := -1$ は特殊解である．一方，特性多項式 $x - 2 = 0$ を解いて，同次解 $c2^n$ が得られる．$f(n) = c2^n - 1$ に対する初期条件 $f(1) = 1$ より，$c = 1$．よって，一般解は $f(n) = 2^n - 1$ である．　$\square$

6.3 節　理解度確認問題

問 6.20　例 6.6 (2) を参考にして，同例 (1) の $f(0) = \Theta(1)$, $f(n) = f(n-1) + O(n)$ の解が $f(n) = O(n^2)$ であることを数学的帰納法で証明せよ．

問 6.21　(1)　次の再帰方程式の実行過程を木で表わすことにより，漸近解を推測せよ: $f(0) = \Theta(1)$, $f(n) = 2f(n/2) + \Theta(n)$.

(2)　次の場合も(1)と同様にできるか？

$$f(0) = \Theta(1),\ f(n) = f(n/3) + f(2n/3) + \Theta(n)$$

問 6.22　再帰方程式 $f(0) = 0$, $f(n) = 3f(\lfloor n/4 \rfloor) + n$ の解の漸近上界 (すなわち，$f(n) = O(g(n))$ となる $g(n)$) を求めよ．

問 6.23　漸化式を解くとき，次の関係式は有用である．これらを証明せよ．

(1)　任意の実数 x に対して，$x - 1 < \lfloor x \rfloor \quad x \quad \lceil x \rceil < x + 1$.

(2)　任意の整数 n と，0 でない任意の整数 a, b に対して，次のことが成り立つ．

(a)　$\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$.　　(b)　$\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$.

(c)　$\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil$.

問 6.24　次のことを証明せよ．

(1)　任意の実数 x に対して，$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

(2)　任意の整数 $m, n\ (n > 0)$ に対して，$\lfloor (x+m)/n \rfloor = \lfloor (\lfloor x \rfloor + m)/n \rfloor$.

(3)　$\lceil \cdot \rceil$ について(2)と同様なことが成り立つか？

問 6.25　問 6.17 (1), (2) のアルゴリズムにおけるデータ同士の比較回数 $f(n)$ に関する漸化式を作り，解け．

問 6.26　フィボナッチ数列の第 n 項を母関数を使って求めよ．

問 6.27　次の再帰方程式 (再帰不等式) の漸近解あるいは $f(n)$ の漸近上界を求めよ．$n \quad 2$ については $f(n)$ は定数であるとする．

(1)　$f(n) = 4f(n/2) + n^2$　　(2)　$f(n) = 2f(n/4) + \sqrt{n}$

(3)　$f(n) = 3f(n/2) + n \log n$　　(4)　$f(n) = f(n-1) + 1/n$

(5)　$f(n) = 3f(\lfloor n/3 \rfloor) + O(n^3)$　　(6)　$f(n) \quad 2f(n-1)$

問 6.28　(**変数変換**) $f(n) = f(\sqrt{n}) + 1$ はこのままではこの節で述べたどの方法でも解くことがむずかしい．しかし，$m = \log_2 n$ と変数変換すると

$$f(2^m) = f(2^{m/2}) + 1$$

となり，さらに，$g(m) = f(2^m)$ とおくと，

$$g(m) = g(m/2) + 1$$

となるので，$g(m) = O(\log m)$ と解くことができ，$f(n) = \log \log n$ が得られる．同様な方法で次の再帰方程式を解け：$f(n) = 3f(\sqrt[3]{n}) + \log n$.

問 6.29　次の線形差分方程式を解け．

(1)　$f(0) = 1$, $f(n) - 2f(n-1) = 0$

(2)　$f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $n \quad 3$ のとき $f(n) = 3f(n-1) + 4f(n-2)$

(3)　$f(0) = 0$, $f(n) - f(n-1) = 2n - 1$

(4)　$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 6$, $f(n) - 6f(n-1) + 12f(n-2) - 8f(n-3) = -1$