本文の「再帰的定義」の説明は数学的というには程遠いものである．参考までに，より形式的な説明を以下に記す．

考察の対象になるもの (オブジェクト) が高々可算個であるような集合を離散集合といい，オブジェクトに番号を振って列挙することができるので，次のように定義することができる．

n $(n \in \mathbf{N})$ を任意の自然数とする．$\mathbf{N}$ あるいは $\{0, 1, \ldots, n\}$ から X への全単射 f が存在するとき，集合 X を**離散集合** (discrete set) という (枚挙可能集合ともいう)．$f(n)$ は X の n 番目のオブジェクトであり，$x \in X$ に対して $f^{-1}(x)$ は x の番号である．

離散集合 X から，ある集合 Y への部分関数 F を次のように定義することを (F の) **再帰的定義** (recursive definition) という．ここで，部分関数とは，$F(x)$ が定義されていないような $x \in X$ が存在することも許されているような関数のことである (1.2 節参照)．

(i) (初期ステップ) X の空でない有限部分集合 X_0 に対して $F(X_0)$ を定義する．すなわち，任意の $x \in X_0$ に対して $F(x)$ を定義する．

(ii) (再帰ステップ) $X' \subsetneqq X$, $X'' \subsetneqq X$ で $F(X'')$ がすでに定義されているとき，$F(X'')$ を使って $F(X')$ を定義する．

(iii) (限定句) F は，(i),(ii) によって定まるような $X' \subsetneqq X$ に対してのみ定義される．

F 自身は X から Y への (部分) 関数を定義している．X, Y, F の選び方や，F の定義域 $\{x \in X \mid F(x) \in Y\}$，値域 $F(X) = \{F(x) \in Y \mid x \in X\}$，あるいは F が特定の値 $y_0 \in Y$ を取るような定義域の元の集合 $\{x \in X \mid F(x) = y_0\}$ を考えることによって，いろんな概念を <u>再帰的に</u> 定義することができる．特に，F が X 上の**述語** $F : X \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ である場合に $\{x \in X \mid F(x) = \mathbf{T}\}$ を考えることで多くの概念が定義できる．

[例]　(1) 階乗関数 $n \mapsto n!$ は次のように再帰的に定義される．
$X = Y = \mathbf{N}$ とし，$F : X \to Y$ を次のように再帰的に定義する：

(i) $F(0) = 1$.

(ii) $n \in \mathbf{N}_{\geqq 1}$ に対して $F(n) = nF(n-1)$.

この例の場合には，$X' = \{n\}$, $X'' = \{n-1\}$ である ($X'' = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ と考えてもよい)．また，この例の場合，F は (i),(ii) できちんと定まるので限定句は不要である．

$n \in \mathbf{N}$ に対して，$F(n) = nF(n-1) = n(n-1)F(n-2) = \cdots = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot F(0) = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$ であるから $F(n) = n!$ である．

(2) 偶数の集合 E は次のように再帰的に定義される．$\mathbf{Z}$ 上の述語 F を次のように再帰的に定義する：

(i) $F(0) = \mathbf{T}$.

(ii) $n \in \mathbf{Z}$ で $F(n) = \mathbf{T}$ ならば $F(n+2) = \mathbf{T}$ かつ $F(n-2) = \mathbf{T}$.

(iii) (i),(ii) で定義された以外の $n \in \mathbf{Z}$ に対しては $F(n) = \mathbf{F}$.

$E := \{x \in \mathbf{Z} \mid F(x) = \mathbf{T}\}$ と定義すると，$E = \{\pm 2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ である．

このように述語を使って定義する場合には，次のように述べるのが分かりやすい ($F(x) = \mathbf{T}$ を $x \in E$ で表している)：

(i) $0 \in E$.

(ii) $n \in E$ ならば $n+2 \in E$ かつ $n-2 \in E$.

(iii) E の元は (i),(ii) で定義されたものだけである．